Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. P. Bourguignon

Sur une condition d'intégrabilité d'origine géométrique pour une famille d'équations aux dérivées partielles non linéaires sur la sphère

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. n° 16, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A15_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 1 - 1 9 8 2

SUR UNE CONDITION D'INTEGRABILITE D'ORIGINE GEOMETRIQUE POUR UNE FAMILLE D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES SUR LA SPHERE

par J. P. BOURGUIGNON

Exposé n° XVI

16 Mars 1982

L'ensemble des résultats et techniques présentés dans cet exposé est le thème de la thèse de doctorat d'Etat soutenue par Jean-Pierre Ezin à l'Université de Lille I.

Sur une variété riemannienne compacte (M,g_o) de dimension n, nous nous intéressons à la famille d'équations aux dérivées partielles non linéaires

$$(*_2) \qquad F_2(\varphi) \equiv e^{-2\varphi}(2\Delta_o\varphi + u_o) = u \qquad \text{si } n = 2,$$

$$(*_n) \qquad F_n(\varphi) \equiv \varphi^{-\frac{n+2}{n-2}}\left(4\frac{n-1}{n-2}\,\Delta_o\varphi + u_o\varphi\right) = u \quad \text{si } n \geqslant 3\ ,$$

où φ est l'inconnue , u_o et u des fonctions données (supposées C^∞) et où Δ_o désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique g_o (avec le signe qui le rend non négatif).

Ce problème avait été considéré par L. Nirenberg en 1953 dans le cas de la sphère S^2 munie de sa métrique canonique c.

Dans cet exposé nous présentons des conditions nécessaires d'intégrabilité d'origine géométrique sur le membre de droite. Nous ne faisons que quelques commentaires sur les résultats d'existence déjà connus. Par contre nous donnons avec plus de soin de nouveaux exemples de fonctions u qui ne sont pas dans l'image des applications F_n dans le cas de la sphère standard.

<u>Plan de l'article</u>

I. ORIGINE GEOMETRIQUE DES EQUATIONS

Ces équations peuvent être aisément considérées comme les équations d'Euler-Lagrange de problèmes variationnels définis sur l'espace de Sobolev $H^1(M)$ avec contraintes. Il apparaît immédiatement que ces problèmes sont délicats, car, quand n = 2, prouver que e^{φ} est dans $L_1(M)$ pour φ dans $H^1(M)$ nécessite un raffinement des inégalités de Sobolev et, quand $n \geqslant 3$, $\varphi^{\frac{n+2}{n-2}} . \varphi = \varphi^{\frac{2n}{n-2}}$ de sorte que nous nous trouvons dans le cas-limite du théorème d'inclusion compacte de Rellich-Kondrakov.

Présenter l'origine de ces équations nécessite d'introduire quelques concepts géométriques.

Une métrique riemannienne g_o étant donnée, sa classe conforme $[g_o]$ est l'ensemble des métriques g sur M se déduisant de g_o par multiplication par une fonction (partout non nulle) sur M. Il s'agit donc de l'ensemble des métriques définissant la même notion d'angle sur chaque espace tangent.

La manière la plus adaptée de paramétrer une classe conforme se trouve être la suivante :

$$g = e^{2\varphi} g_o \qquad \text{pour } n = 2 ,$$

$$g = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g_o \qquad \text{pour } n \geqslant 3 \quad (\text{on suppose alors } \varphi \text{ positive}).$$

Parmi les invariants attachés à une métrique riemannienne g figurent bien sûr l'élément de volume riemannien v_g (avec les relations, $v_g = e^{2\varphi} v_{g_o}$ pour n = 2 et $v_g = \varphi^{\frac{2n}{n-2}} v_{g_o}$ pour $n \geqslant 3$) et le tenseur de courbure de Riemann R_g qui est un champ de 4-tenseurs (dont la variation dans une classe conforme est assez compliquée). Nous nous intéressons en fait ici à la forme la plus contractée de R_g, la courbure scalaire u_g, qui est une fonction sur la variété M.

On peut encore donner la définition suivante (peut-être plus concrète) de la courbure scalaire : soit $B^g(m,r)$ la boule géodésique de rayon r centrée en un point m de M (pour r assez petit, c'est une vraie boule); dans l'espace tangent $T_m M$, on peut considérer la boule euclidienne $B^{g_m}(O_m,r)$ centrée à l'origine. Nous avons alors

$$\int_{B^g(m,r)} v_g = \left(\int_{B^{g_m}(O_m,r)} v_{g_m}\right)\left(1 - \frac{r^2}{6(n+2)}\, u_g(m) + o(r^2)\right)$$

où $u_g(m)$ désigne bien sûr la valeur en m de la courbure scalaire. (L'absence de termes en r dans le développement traduit le fait que la géométrie euclidienne de chaque espace tangent est osculatrice à la géométrie riemannienne). Dans le cas des surfaces la courbure scalaire n'est rien d'autre que le double de la courbure de Gauss.

Dans une classe conforme, la courbure scalaire varie comme suit :

$$u_g = e^{-2\varphi}(2\,\Delta_o\varphi + u_{g_o}) \qquad \text{pour } n = 2 \text{ et } g = e^{2\varphi} g_o\ ,$$

$$u_g = \varphi^{\frac{n+2}{n-2}}\left(4\,\frac{n-1}{n-2}\,\Delta_o\varphi + u_{g_o}\varphi\right) \qquad \text{pour } n \geqslant 3 \text{ et } g = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g_o .$$

On reconnaît là les équations données au départ si <u>on a pris pour u_o la courbure scalaire de la métrique g_o, ce que nous supposerons dans la suite.</u> En résumé :

<u>Sur une variété riemannienne (M,g), étudier l'équation $F_n(\varphi) = u$ consiste donc à étudier les fonctions courbure scalaire de la classe conforme de g.</u>

Il est important de bien comprendre en quoi ce problème est distinct de l'étude des fonctions qui peuvent être la courbure scalaire d'une métrique quelconque sur M.

Le rôle des classes conformes de métriques est spécialement important en dimension 2 pour la raison suivante : sur une surface orientée, à toute classe conforme de métriques riemanniennes, on peut associer en chaque point la rotation positive d'angle $\frac{\pi}{2}$ qu'on peut interpréter comme une structure presque complexe. Le théorème d'existence de coordonnées isothermes (cf. [8] p.182) nous assure que cette structure est intégrable. Mais le théorème d'uniformisation (cf. [12] p.226 par exemple) nous dit que l'espace des structures complexes (à isomorphismes près!) sur une surface de Riemann compacte est une boule (un point pour la sphère S^2, une boule de dimension réelle 2 pour le tore T^2 et une boule de dimension réelle $6\gamma - 6$ pour une surface de genre γ si $\gamma \geqslant 2$). Cela nous permet de dire par exemple que sur la sphère S^2 toute métrique peut s'écrire

$$g = \psi^*(e^{2\varphi} g_o)$$

où ψ est un difféomorphisme de la sphère (on dit quelquefois que g est difféoconforme à g_o). Sur une surface orientée, il faudrait que g_o parcoure un espace de métriques de dimension $6\gamma - 6$ si la surface est de genre $\gamma \geq 2$ et 2 si la surface est un tore.

En dimension 2, travailler dans la classe conforme d'une métrique g_o revient à s'interdire la transport par un difféomorphisme général.

En dimension plus grande, une métrique riemannienne arbitraire ne peut se relier de façon aussi simple à une métrique donnée g_o et l'espace des classes de métriques difféoconformes est de dimension infinie.

L'ensemble des fonctions courbure scalaire sur une variété M est presque complètement connu grâce aux travaux de J. L. Kazdan et F. Warner (cf. [6]) et plus récemment de M. Gromov et H. B. Lawson (cf. [4]) pour les cas restés en suspens (essentiellement les fonctions positives).

Il est intéressant de mentionner qu'une des preuves proposées par J. L. Kazdan et F. Warner pour décrire les fonctions courbure scalaire d'une métrique quelconque utilise la surjectivité locale des applications F_n, puis la composition par un difféomorphisme. Qu'une telle construction suffise repose sur le lemme suivant : "L'adhérence dans une topologie L^p $(p > n)$ de l'orbite d'une fonction donnée consiste en les fonctions ayant même ensemble de valeurs prises". Le point important est que les applications F_n sont localement surjectives pour un choix générique de métrique (voir [7] page 319), mais justement pas les métriques les plus naturelles comme la métrique standard sur la sphère.

II. DES CONDITIONS NECESSAIRES D'INTEGRABILITE

Nous supposons que φ est solution de l'équation

$$(*_n) \qquad F_n(\varphi) = u .$$

Une condition nécessaire évidente d'intégrabilité sur u s'obtient par intégration de l'équation $(*_n)$ par rapport à l'élément de volume de la métrique g conforme à g_o définie par φ . On obtient

$$(E_2) \qquad \int_M u_o\, v_o = \int_M u\, v_g \qquad \text{si } n = 2$$

(c'est la version analytique du théorème de Gauss-Bonnet), et

$$(E_n) \qquad 4\,\frac{n-1}{n-2} \int_M |d\varphi|^2\, v_o + \int_M u_o\, \varphi^2 v_o = \int_M u\, v_g \qquad \text{si } n \geqslant 3 \, .$$

Il suit par exemple de ces relations que u ne peut avoir partout le même signe qui soit opposée à celui de u_o.

Mais il y a une autre famille de conditions nécessaires qui sont plus subtiles et dont la nature n'est pas encore complètement élucidée. Elle fut d'abord mise en évidence dans un cas particulier par J. L. Kazdan et F. Warner à partir d'un point de vue très analytique. Pour la discuter, nous préférons introduire un invariant géométrique attaché à une classe conforme [g] de métriques : le groupe de ses transformations conformes C(M,[g]). Rappelons qu'un difféomorphisme ψ de M est dit une transformation conforme de la métrique g si les métriques $\psi^*(g)$ et g appartiennent à la même classe conforme. Il suit d'un théorème de Myers (cf. [10]) que C(M,[g]) est un groupe de Lie si M est compacte (en fait complète suffit). Un champ de vecteurs X est dit conforme si X est un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{C}$(M,[g]) du groupe C(M,[g]), c'est à dire si le flot de X est fait de transformations conformes.

Pour que u soit l'image d'une fonction φ par l'application F_n, la nouvelle famille de conditions nécessaires géométriques est la suivante :

pour tout champ de vecteurs conforme X,

$$(N_X) \qquad \int_M X.u\, v_g = 0$$

(où nous rappelons que g est la métrique dont u doit être la courbure scalaire).

Nous donnons la preuve de ces relations pour n = 2 (et faisons quelques remarques sur la preuve pour n $\geqslant$ 3) au paragraphe suivant après avoir étudié de plus près le groupe C(M,[g]) et son action sur les métriques et les fonctions.

Nous examinons ici quelques conséquences de cette famille de conditions nécessaires dans le cas particulier de la classe conforme de la métrique standard c de la sphère S^n.

Ce cas particulier est en fait très spécial à cause d'un théorème dû à J. Ferrand et à M. Obata (voir [3] et [11]) selon lequel "le groupe des transformations conformes d'une classe conforme est compact sauf pour la classe conforme standard sur la sphère S^n". Par rapport à la famille de conditions nécessaires, ce cas se révèle donc être le seul intéressant pour trouver des fonctions interdites. En effet lorsqu'un champ de vecteurs X engendre un groupe compact de transformations, il n'admet pas de fonction de Liapounov, i.e. de fonction f telle que $X.f \geqslant 0$. (Sinon, si g est une métrique pour laquelle X est une isométrie infinitésimale, $\int_M X.f \, v_g = \int_M f \, \mathrm{div}_g X \, v_g = 0$ donc si $X.f \geqslant 0$, alors $X.f \equiv 0$).

Le groupe $C(S^n,[c])$ est isomorphe au groupe $O(n+1,1)$ de telle sorte que son algèbre de Lie $\mathfrak{c}(S^n,[c])$ admet la décomposition

$$\mathfrak{c}(S^n,[c]) = \mathfrak{so}_{n+1} \oplus \mathfrak{pc}$$

où l'espace vectoriel de dimension n+1 $\mathfrak{pc}$ est quelquefois appelé l'espace des champs de vecteurs purement conformes. Il s'identifie à l'espace vectoriel des gradients des premières harmoniques sphériques ξ qui ne sont rien d'autre que les restrictions à S^n des fonctions linéaires sur $\mathbb{R}^{n+1}$ quand S^n y est plongée de façon standard. Dans [6], J. L. Kazdan et F. Warner avaient trouvé les relations (N_X) pour les champs de vecteurs X purement conformes. Elles sont particulièrement intéressantes parce qu'elles livrent beaucoup de fonctions qui ne peuvent être la courbure scalaire d'une métrique conforme à c (nous dirons plus brièvement des fonctions interdites), à savoir les fonctions de Liapounov pour un champ de vecteurs grad ξ. Cette classe comprend les fonctions dépendant de façon monotone de la distance à un point. En effet, si u est une fonction monotone de la dsitance à un point m, alors pour la première harmonique sphérique ξ ayant pour pôles m et son antipode, $\mathrm{grad}\,\xi.u$ garde un signe constant et la relation $(N_{\mathrm{grad}\,\xi})$ est violée.

Remarquons que la classe de fonctions que nous venons d'exhiber contient des fonctions de tout signe, en particulier des fonctions partout positives, donc qui ne sont pas interdites par la condition nécessaire évidente mentionnée au début du paragraphe.

Dans [5] page 187, J. L. Kazdan conjecture que la famille des conditions $(N_{\text{grad}\,\xi})$ où ξ est une première harmonique sphérique et la condition évidente sont suffisantes. Dans le dernier paragraphe nous présentons un contre-exemple à cette conjecture en exhibant des fonctions interdites qui ne le sont pas par la seule collection des conditions $(N_{\text{grad}\xi})$ où ξ varie parmi les premières harmoniques sphériques.

III. L'ACTION DU GROUPE CONFORME

Sur l'espace des fonctions, le groupe des difféomorphismes et par suite le groupe conforme agissent par composition à droite, i.e. (ψ,φ) donne $\varphi \circ \psi$. L'action infinitésimale est donnée par $(X,\varphi) \longmapsto X.\varphi$.

Pour l'action sur la classe conforme, il faut prendre garde qu'un champ de vecteurs conforme agit non seulement sur le facteur conforme mais aussi sur la métrique.

Si ψ est un difféomorphisme conforme, alors

pour $n = 2$, $$\psi^*(e^{2\varphi} g_o) = e^{2(\varphi\circ\psi + \alpha_2(\psi))} g_o,$$

pour $n \geq 3$, $$\psi^*(\varphi^{\frac{4}{n-2}} g_o) = [(\varphi\circ\psi)\,\alpha_n(\psi)]^{\frac{4}{n-2}} g_o\ ,$$

où les applications α_n décrivent l'action du groupe conforme sur la métrique g_o.

Nous définissons aussi une nouvelle action de $C(M,[g])$ sur l'espace des fonctions que nous notons $\varphi \square_n \psi^o$. L'action infinitésimale est alors donnée pour $n = 2$ par

$$X \blacksquare_2 \varphi = X.\varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{div}_o X$$

et pour $n \geq 3$ par

$$X \blacksquare_n \varphi = X.\varphi + \frac{n-2}{2n}\,\mathrm{div}_o X\,\varphi$$

La remarque fondamentale suit alors du caractère géométrique de la courbure scalaire qui s'exprime par

$$u_{\psi^*(g)} = u_g \circ \psi\ ,$$

autrement dit, en introduisant les applications F_n, nous avons

$$F_n(\varphi \,\square_n\, \psi) = F_n(\varphi) \circ \psi.$$

Si nous introduisons le flot (ψ_t) d'un champ de vecteurs conforme X, nous pouvons prendre la dérivée en t = 0 de l'identité ci-dessus. Pour $\varphi = 0$ et n = 2, nous obtenons l'identité

$$\Delta_o(\mathrm{div}_o X) - u_o \mathrm{div}_o X = X.u_o$$

et pour $\varphi = 1$ et $n \geqslant 3$

$$\Delta_o(\mathrm{div}_o X) - \frac{u_o}{n-1} \mathrm{div}_o X = \frac{n}{2(n-1)} X.u_o \ .$$

Nous établissons maintenant la condition (N_X) pour n = 2, renvoyant pour le cas général à [2].

Nous différentions la relation de commutation en un point général. Nous obtenons

$$e^{-2\varphi}\{2\Delta_o(X.\varphi + \tfrac{1}{2}\mathrm{div}_o X) - 2(2\Delta_o\varphi + u_o)(X.\varphi + \tfrac{1}{2}\mathrm{div}_o X)\} = X.u \ .$$

En intégrant cette identité contre l'élément de volume de la métrique g, nous avons

$$2\int_M \Delta_o\varphi(X.\varphi)v_o + \int_M u_o X.\varphi\, v_o + \int_M \Delta_o\varphi\, \mathrm{div}_o X\, v_o + \frac{1}{2}\int_M u_o \mathrm{div}_o X\, v_o = -\frac{1}{2}\int_M X.u\, v_g \ .$$

Après intégration par parties, le dernier terme de gauche donne $\frac{1}{2}\int_M X.u_o v_{g_o}$. Si nous montrons que les 3 autres termes ne contribuent pas, cela sera suffisant puisque nous aurons montré que, dans une classe conforme, la quantité $\int_M X.u_g\, v_g$ est indépendante de la métrique choisie et que, sur les surfaces, toute classe conforme contient une métrique à courbure de Gauss constante donc à courbure scalaire constante. Le premier terme est effectivement nul : sa nullité est la traduction de l'invariance par transformation conforme de l'intégrale de Dirichlet,

$$\int_M g_o^{-1}(d\varphi,d\varphi)\,v_{g_o} = \int_M (\psi^* g_o)^{-1}(d\varphi,d\varphi)\,v_{\psi^* g_o} = \int_M g_o^{-1}(d(\varphi\circ\psi_t),d(\varphi\circ\psi_t))\,v_{g_o}$$

soit, par dérivation en $t = 0$ et intégration par parties ,

$$\int_M X.\varphi\;\Delta_o\varphi\;\mathbf{v}_o = 0$$

En utilisant le fait que X est une dérivation et la formule de Stokes, nous obtenons

$$-\int_M u_o X.\varphi\; v_o = +\int_M u_o \operatorname{div}_o X\;\varphi\; v_o + \int_M X.u_o\,\varphi\, v_o$$

$$-\int_M \Delta_o\varphi\;\operatorname{div}_o X\; v_o = -\int_M \varphi\,\Delta_o \operatorname{div}_o X\, v_o \quad ,$$

d'où finalement une contribution nulle à cause de la relation établie précédemment sur la divergence d'un champ de vecteurs conforme.

La preuve des relations (N_X) en dimension $n \geqslant 3$ se fait de façon analogue. L'identité s'appuyant sur l'invariance de l'intégrale de Dirichlet est remplacée par une identité qui tient compte de sa variation avec le poids conforme.

L'identité intermédiaire à laquelle on arrive n'est plus $\int_M X.u_g v_g = \int_M X.u_o\; v_o$, comme dans le cas des surfaces, mais directement $\int_M X.u_g v_g = 0$ après avoir utilisé bien sûr l'identité vérifiée par la divergence d'un champ de vecteurs conforme.

IV. QUELQUES RESULTATS D'EXISTENCE

Nous nous limitons à quelques remarques en relation avec l'exposé.

De la nature même du problème suit que l'ensemble des fonctions courbure scalaire est invariant par composition avec les difféomorphismes conformes. Il en est de même pour les fonctions interdites.

Il suit par ailleurs d'un raffinement dû à J. Moser ([9]) de la norme de l'exponentielle de fonctions de classe H^1 antipodalement symétriques sur S^2 que toute fonction paire sur S^2 et positive en au moins un point est la courbure scalaire d'une métrique de la classe conforme standard.

Par conséquent sur le plan projectif réel $\mathbb{RP}^2$ toute fonction positive en au moins un point est la courbure scalaire d'une métrique conforme à la métrique standard. On rappelle qu'à la différence de $C(S^2,[c])$, $C(\mathbb{RP}^2,[c])$ s'identifie au groupe des isométries de $(\mathbb{RP}^2, c)$.

En combinant les remarques précédentes, on peut montrer que les fonctions courbure scalaire des métriques de la classe conforme de S^2 sont denses dans les topologies L^p parmi toutes les fonctions (pour une preuve, voir [ ])

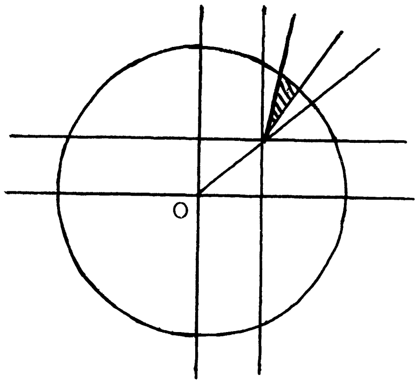
Dans [1] , T. Aubin a proposé des améliorations des meilleures constantes dans les inégalités de Sobolev si, au lieu de considérer l'espace $H^1(M)$ tout entier, on se limite à une sous-variété définie par orthogonalité L^2 à une exponentielle si $n = 2$ ou de la puissance $\frac{2n}{n-2}$ si $n \geqslant 3$ à une famille de fonctions $(f_i)_{i \in I}$ changeant toutes de signe et telles que pour point de m de M, $\sum_{i \in I} |f_i(m)| > 0$. On en déduit qu'à une combinaison linéaire près des fonctions f_i toute fonction positive en au moins un point est une courbure scalaire. Parmi les choix particuliers de fonctions $(f_i)_{i \in I}$, signalons sur la sphère S^2 une base de premières harmoniques sphériques ou toute collection de 3 harmoniques sphériques de même ordre linéairement indépendantes. De ce choix spécial, il ressort que parmi les fonctions courbure scalaire figurent certaines harmoniques impaires (jamais les premières comme nous l'avons vu). Il suffit en effet de prendre pour u une harmonique sphérique et pour (f_i) des harmoniques sphériques de même ordre bien choisies. Remarquons que toutes les harmoniques sphériques d'ordre pair sont des fonctions paires donc sont déjà connues comme étant des courbure scalaires d'après une remarque précédente.

V. DE NOUVEAUX EXEMPLES DE FONCTIONS INTERDITES SUR LA SPHERE CONFORME STANDARD

Nous décrivons maintenant des fonctions sur la sphère S^2 qui ne peuvent être la courbure de Gauss d'une métrique conforme à la métrique standard. Elles sont nouvelles car elles ne sont pas interdites par une condition $(N_{\mathrm{grad}\,\xi})$ où ξ est une première harmonique sphérique pour la métrique induite. Ce sont des fonctions de Liapounov pour des champs de vecteurs conformes, donc des fonctions interdites par une condition (N_X). On peut aussi montrer que X n'est le gradient d'une première harmonique sphérique pour aucune métrique conforme à la métrique standard (voir [2]).

Une fonction de la famille peut se décrire ainsi. On choisit une première harmonique sphérique ξ . On modifie ξ par une fonction f à support dans une boule géodésique qu'on prendra très petite (au point de pouvoir assimiler grad ξ sur cette boule à un champ de vecteurs constant). La fonction f, elle, ne sera pas petite. On peut prendre pour f la fonction hauteur d'un cône dont le sommet A est convenablement décentré.

grad ξ



L'intérêt de décentrer le sommet est que le gradient de la fonction hauteur sera le plus grand le long de la génératrice la plus courte, de telle sorte que grad ξ + grad f a une composante verticale négative dans la zone hachurée. Cela assure que la fonction $\xi + f$ n'est pas une fonction de Liapounov pour grad ξ . Par contre il est possible de trouver un angle α de telle sorte que grad ξ + grad f appartient à l'intérieur du demi-espace déduit du demi-plan supérieur par rotation d'un angle α . Pour cela il faut analyser le comportement de grad ξ + grad f par quadrant. Le calcul exact se fait dans l'espace euclidien, puis on utilise le fait que l'inclusion est stricte pour transplanter la construction sur S^2. Pour le champ conforme $\cos\alpha$ grad ξ + $\sin\alpha$ X, où X désigne l'isométrie infinitésimale déduite de grad ξ par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, la fonction ξ + f est une fonction de Liapounov. On peut ensuite superposer plusieurs fonctions f du type décrit à supports disjoints ne contenant pas les pôles de ξ . Pour les détails, nous renvoyons à [2] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Aubin : Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire, J. Funct. Analysis 32 (1979), 148-174.