Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. Ginibre

Le problème de Cauchy pour les équations de Yang-Mills

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. nº 13, p. 1-26

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A12_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 1 - 1 9 8 2

LE PROBLEME DE CAUCHY POUR LES EQUATIONS DE YANG-MILLS

par J. GINIBRE

Exposé n° XIII

16 Février 1982

1. INTRODUCTION

On présente dans cet exposé quelques résultats récents concernant le problème de Cauchy pour les équations de Yang Mills, éventuellement couplées de façon minimale à l'équation de Klein Gordon. Les équations de Yang Mills (YM dans tout ce qui suit) ont été introduites en 1954 et sont maintenant devenues, dans leur version quantique, c'est-à-dire en principe pour des champs à valeurs opérateurs dans un espace de Hilbert, l'un des piliers des théories décrivant les particules élémentaires et leurs interactions. Les équations classiques, c'est-à-dire pour des champs à valeurs scalaires ou plutôt à valeurs dans un espace de dimension finie, ont été étudiées surtout dans leur version elliptique, c'est-à-dire dans l'espace euclidien obtenu à partir de l'espace de Minkowski en remplaçant le temps t par it. La raison en est que les solutions classiques euclidiennes sont en principe utiles pour construire la théorie quantique, par une méthode de quantification basée sur l'intégration fonctionnelle. Ici on considère les équations classiques dans l'espace de Minkowski. Ces équations sont hyperboliques et le premier problème qu'on peut naturellement se poser à leur sujet est le problème de Cauchy. La solution de ce problème a connu des progrès importants au cours des deux dernières années et ce sont ces progrès qu'on va tenter de présenter. Dans ce but, on commence par introduire brièvement quelques notions qui seront précisées plus loin et qui permettent de faire le point des résultats établis. On conclura ensuite cette introduction par une présentation élémentaire des équations elles-mêmes, dans l'espoir de les faire apparaître comme naturelles à un lecteur non prévenu. Le problème de Cauchy proprement dit sera traité dans les sections suivantes.

Les équations de YM sont essentiellement la généralisation non commutative des équations de Maxwell. Une de leurs propriétés remarquables est d'être invariantes par un groupe de transformations de dimension infinie, formé des fonctions de l'espace temps $M = \mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans un groupe de Lie compact G donné à l'avance, la loi de groupe étant la multiplication point par point. Pour les besoins des problèmes traités, on impose des conditions de régularité à ces fonctions, et on prend par exemple $\mathcal{C}^{\ell}(M,G)$ pour un ℓ convenable. Ce groupe est appelé <u>groupe de jauge</u>, et une théorie admettant un tel groupe comme groupe d'invariance est généralement appelée théorie de jauge. Le cas des équations de

Maxwell correspond à $G = U(1)$ (groupe unitaire à une dimension), et les équations gardent la même forme (en particulier restent linéaires) si G est abélien. Le cas de YM proprement dit est obtenu pour G non abelien. les équations de YM sont lagrangiennes, c'est-à-dire sont les équations d'Euler déduites d'un principe variationnel consistant à chercher les extrema de l'action

$$A(\Lambda) = \int_{\Lambda} \mathcal{L}(x)\, d^{n+1}x \tag{1.0}$$

dans une partie bornée Λ de M. Le lagrangien $\mathcal{L}(x)$ est invariant de jauge, ce qui assure l'invariance des équations.

Pour formuler le problème de Cauchy, on essaie de mettre les équations sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Tu + f(u) \tag{1.1}$$

où $u : M \ni (t,x) \longmapsto u(t,x) \in \mathcal{V}$ est une fonction à valeurs dans un espace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension finie, T est un opérateur différentiel à coefficients constants dans les variables d'espace, et f un terme d'interaction non linéaire, mais d'ordre inférieur à celui de T. Dans cette étape, on se heurte à la difficulté suivante : l'invariance de jauge entraîne que le système de YM est dégénéré, et pour le mettre sous la forme (1.1), on doit ajouter une équation supplémentaire qui ne résulte pas du principe variationnel et qu'on peut choisir de façon assez arbitraire. Cette équation est appelée <u>condition de jauge</u>. On considèrera par la suite les deux conditions de jauge qui ont été utilisées pour traiter le problème de Cauchy : la condition de jauge temporelle et la condition de jauge de Lorentz (voir ci-dessous. En termes d'un potentiel vecteur A_μ, elles s'expriment respectivement par $A_o = 0$ et $\partial_\mu A^\mu = 0$). Le problème de Cauchy consiste à chercher les solutions de (1.1) satisfaisant une condition initiale $u(0,x) = u_o(x)$ pour un u_o donné. Il est techniquement commode (et traditionnel) de décomposer le problème en deux étapes.

- Le problème local consiste à démontrer l'existence d'un $\bar{t} > 0$ (pouvant dépendre de u_o) tel qu'il existe une solution (et de préférence une seule) dans $[0,\bar{t}] \times \mathbb{R}^n$.
- Le problème global consiste à démontrer l'existence d'une solution définie dans M entier.

De même que l'équation de Klein-Gordon, le système de YM est hyperbolique et décrit une propagation à vitesse finie. Pour cette raison , la formulation

précédente du problème local est à la fois peu naturelle et trop restrictive. On considèrera donc aussi un problème local généralisé qui exploite mieux l'hyperbolicité du système. En particulier, on cherchera des solutions dans des espaces locaux, c'est-à-dire sans aucune restriction sur le comportement à l'infini dans l'espace, et pour des données initiales du même type.

Pour diverses raisons, il est intéressant de coupler le champ de YM à un champ scalaire en autointeraction satisfaisant une équation de Klein Gordon, et il existe une façon canonique, dite minimale, de le faire (voir ci-dessous). Pour certaines formes de l'interaction, les solutions statiques d'un tel système en dimension 3 d'espace, sont considérées comme physiquement intéressantes, et ont été activement étudiées, sous le nom de monopoles. D'autre part, la présence du champ scalaire assure que le problème est non trivial (en l'occurrence non linéaire) même dans le cas commutatif. La présence de ce champ scalaire n'entraîne aucune difficulté supplémentaire dans les développements qui vont suivre, et on l'incorporera à la théorie dans une partie de cet exposé.

Les résultats actuellement établis sont les suivants (champ scalaire inclus). Le problème local a été traité d'abord dans [9] [12], et tous les auteurs suivants en ont donné une version comme étape intermédiaire dans le traitement du problème global. L'existence de solutions locales est démontrée pour n quelconque (n ≡ dimension d'espace), en jauge temporelle et en jauge de Lorentz. Les méthodes utilisées sont en général des méthodes de point fixe. Le problème local généralisé a été traité dans [6] (ce traitement n'est d'ailleurs pas propre à YM) avec des conclusions similaires, du moins si on prend les bonnes équations (la formulation de [3] est impropre à cette généralisation). Le problème global a été résolu par des méthodes d'estimations a priori dans les cas suivants : en jauge temporelle, en dimensions 1 + 1, 2 + 1 [5,6] et 3 + 1 [4], [2] ; en jauge de Lorentz, en dimension 2+1 pour G abélien [10] et en dimension 1 + 1 pour G quelconque [7]. De plus il est clair que la méthode de [4] permet de traiter le cas abélien en dimension 3+1. Tous les résultats de globalisation précédents s'étendent sans difficultés majeures à la théorie généralisée dans les espaces locaux [6] [7]. Un cas particulier en dimension 3+1 (solutions essentiellement à symétrie sphérique) a été traité dans [8]. Parallèlement à ces résultats, le problème global a été résolu dans [1] en dimension 3 + 1 en jauge de Lorentz sans estimations a priori, mais pour des données initiales petites et décroissant assez rapidement à l'infini (ce qui entraîne en particulier que la charge totale est nulle).

La méthode utilise de façon essentielle l'invariance conforme des équations, et ne sera pas décrite ici. Dans la suite de cet exposé, on traitera le problème local, ainsi que sa généralisation aux espaces locaux, dans la Section 2, en suivant la référence [6] . On traitera ensuite le problème global dans la Section 3, en suivant les références [6] pour les généralités et les dimensions basses et [4] pour la dimension 3+1 .

Dans la fin de cette introduction on présente les équations de YM de façon élémentaire en mettant l'accent sur leurs propriétés d'invariance. Le lecteur qui connaît déjà les équations est invité à passer immédiatement à la Section 2.

L'espace temps de Minkowski est $M = \mathbb{R}^{n+1}$, muni d'une pseudométrique g. On se place toujours dans un repère où g est diagonale, on utilise des indices grecs variant de O à n, l'indice O pour la variable temps ($t = x^o$), et des indices latins variant de 1 à n pour les variables d'espace. On prend $g_{oo} = -g_{ii} = 1, g_{\lambda\mu} = 0$ pour $\lambda \neq \mu$. On utilise g pour abaisser ou élever les indices, et on utilise la convention de sommation des indices répétés . On note $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, si bien que

$$\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \equiv \partial_\mu \partial^\mu.$$

Soit G un groupe de Lie compact et $r : g \longmapsto r(g)$ une représentation unitaire de G dans un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de dimension finie. On note $< \ , \ >$ et $| \ . \ |$ le produit scalaire et la norme dans $\mathcal{F}$. Soit ϕ une application (appelée par la suite champ scalaire) de M (ou d'un ouvert de M) dans $\mathcal{F}$. On considère d'abord l'équation de Klein Gordon avec une interaction non linéaire typique

$$\Box\phi + |\phi|^2\phi = 0 \tag{1.2}$$

qui est l'équation d'Euler associée au Lagrangien

$$\mathcal{L}_o = <\partial_\mu\phi, \partial^\mu\phi> - \frac{1}{2}|\phi|^4. \tag{1.3}$$

Il est clair que l'équation (1.2) est invariante par G dans le sens suivant. Si ϕ est solution de (1.2) et $g \in G$, le champ ϕ' défini par $\phi = r(g)\phi'$ satisfait également (1.2). On considère maintenant le cas plus compliqué où g dépend du point d'espace temps : on se donne une fonction $g : M \ni x \mapsto g(x) \in G$, qui définit une fonction $s : M \ni x \mapsto s(x) \equiv r(g(x))$. ϕ étant une solution de (1,2), on définit ϕ' par

$$\phi(x) = s(x)\ \phi'(x) \tag{1.4}$$

Il est clair que ϕ' satisfait alors l'équation

$$s^{-1}\ \Box\ s\ \phi' + |\phi'|^2\ \phi' = 0$$

ou encore

$$(\partial_\mu + s^{-1}(\partial_\mu\ s))(\partial^\mu + s^{-1}(\partial^\mu s))\ \phi' + |\phi'|^2\ \phi' = 0$$

et l'équation (1.2) n'est donc pas invariante par la transformation (1.4). On s'obstine néanmoins à construire un système invariant, et pour cela, on introduit un champ vectoriel, c'est-à-dire une application $A : M \mapsto M^* \otimes \mathcal{G}$, où M^* est le dual de M et $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G, c'est-à-dire encore une 1-forme $A_\mu\ dx^\mu$ sur M à valeurs dans $\mathcal{G}$. Dénotant encore par r la représentation de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}$, on introduit la dérivation covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + e\ r(A_\mu) \tag{1.5}$$

où e est une constante de normalisation réelle ayant la signification physique de la charge électrique élémentaire, et on remplace l'équation (1.2) par l'équation modifiée

$$D_\mu D^\mu \phi + |\phi|^2\ \phi = 0 \tag{1.6}$$

On voit alors que cette équation est invariante par le changement de ϕ en ϕ' défini par (1.4) pourvu qu'en même temps on change A en A' défini en chaque point par

$$A'_\mu = g^{-1} A_\mu\ g + \frac{1}{e}\ g^{-1}(\partial_\mu\ g). \tag{1.7}$$

Autrement dit, l'équation (1.6) est invariante par le groupe des fonctions de M dans G (suffisamment régulières, par exemple $\mathcal{C}^\ell(M,G)$ pour un ℓ convenable), la loi de transformation des champs étant donnée par (1.4) et (1.7). Ce groupe est appelé groupe de jauge, et les transformations correspondantes, transformations de

jauge. L'équation (1.6) est l'équation d'Euler pour ϕ associée au Lagrangien

$$\mathcal{L}_S = \langle D_\mu \phi , D^\mu \phi \rangle - \frac{1}{2} |\phi|^4 . \tag{1.8}$$

Elle décrit la dynamique d'un champ scalaire dans un champ de Yang Mills extérieur (dans un champ électromagnétique extérieur si $G = U(1)$).

La loi de transformation (1.7) est un bon point de départ pour établir le contact avec la structure de géométrie différentielle sous-jacente. Soit $\mathcal{P}$ un espace fibré principal de base M et de groupe G, et ω une connexion sur $\mathcal{P}$. A chaque section σ de $\mathcal{P}$, ω associe une 1-forme $A_\mu \, dx^\mu$ sur M à valeurs dans $\mathcal{G}$ et (1.7) est simplement la loi de transformation de cette 1-forme par le changement de section $\sigma \longrightarrow \sigma'$ défini par $\sigma'(x) = \sigma(x) g(x)$. Le champ de YM défini par A modulo les transformations du type (1.7) s'identifie donc naturellement avec une connexion sur un fibré principal de base M et de groupe G. Cette structure joue un rôle important dans l'étude des solutions euclidiennes des équations de YM, mais elle n'est d'aucune utilité ici et ne sera plus mentionnée dans les sections suivantes.

On veut maintenant compléter l'équation (1.6) par une équation décrivant la dynamique du champ vectoriel A et généralisant les équations de Maxwell correspondant au cas $G = U(1)$. Pour cela, on remarque que

$$[D_\lambda , D_\mu] = e \, r(F_{\lambda\mu}) \tag{1.9}$$

où $F_{\lambda\mu}$ est le tenseur antisymétrique à valeurs dans $\mathcal{G}$ défini par

$$F_{\lambda\mu} = \partial_\lambda A - \partial_\mu A_\lambda + e[A_\lambda , A_\mu] \cdot \tag{1.10}$$

Ce tenseur généralise le champ électromagnétique, le commutateur étant absent dans le cas abélien. Du point de vue de la géométrie différentielle, la 2-forme $\frac{1}{2} F_{\lambda\mu} \, dx^\lambda \wedge dx^\mu$ est la forme sur M associée à une section σ de $\mathcal{P}$ par la forme de courbure $\Omega = d\omega + \frac{1}{2} [\omega \wedge \omega]$ de la connexion ω. Par transformation de jauge (changement de section), D_λ se transforme selon $D_\lambda \longmapsto D'_\lambda = s^{-1} D_\lambda \, s$ par construction. Il n'est donc pas surprenant que F se transforme en chaque point par la représentation adjointe de G :

$$F_{\lambda\mu} \longmapsto F'_{\lambda\mu} = g^{-1} F_{\lambda\mu} \, g. \tag{1.11}$$

En particulier F est invariant de jauge dans le cas abélien. Les équations de Maxwell, correspondant au cas où G = U(1), sont les équations d'Euler associées au Lagrangien

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} \tag{1.12}$$

Dans le cas général, on suppose définie sur $\mathcal{G}$ une forme hermitienne positive non dégénérée, qu'on notera encore $\langle . , . \rangle$, invariante par la représentation adjointe de G. Pour G semi-simple, on peut prendre la forme de Killing sur $\mathcal{G}$. Pour G abélien, n'importe quelle forme hermitienne positive non dégénérée fait l'affaire. On généralise (1.12) en prenant

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} \langle F_{\lambda\mu} , F^{\lambda\mu} \rangle \tag{1.13}$$

qui est invariant de jauge par construction. Les équations de YM sont les équations d'Euler associées au Lagrangien (1.13). Elles s'écrivent

$$D^{\lambda} F_{\lambda\mu} = 0 \tag{1.14}$$

où la dérivation covariante agissant sur les fonctions à valeurs dans $\mathcal{G}$ est définie par

$$D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} + e\, ad(A_{\mu}) \equiv \partial_{\mu} + e\, [A_{\mu} , .] \quad . \tag{1.15}$$

Les équations de YM et de Klein-Gordon couplées sont les équations d'Euler associées au Lagrangien $\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}$. Ce Lagrangien est invariant de jauge par construction et il en est de même des équations. C'est ce système d'équations qu'on va étudier dans les sections suivantes.

2. LE PROBLEME DE CAUCHY LOCAL

On rappelle que G est un groupe de Lie compact, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, $<.\ ,\ .>$ une forme hermitienne positive non dégénérée sur $\mathcal{G}$, invariante par la représentation adjointe. Le champ de YM est une application $A : M \mapsto M^* \otimes \mathcal{G}$, F est défini par (1.10). $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel hermitien de dimension finie, dont le produit scalaire est encore dénoté par $<.\ ,\ .>$, et où agit une représentation unitaire r de G. Le champ scalaire ϕ est une application de M dans $\mathcal{F}$. La dérivation covariante est définie par (1.5) et (1.15) respectivement pour des fonctions à valeurs dans $\mathcal{F}$ et dans $\mathcal{G}$. On se donne en outre une fonction $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ avec $V(0) = 0$, qui décrira l'autointeraction du champ scalaire, et on considère le système des équations d'Euler associé au Lagrangien invariant de jauge

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}<F_{\lambda\mu}, F^{\lambda\mu}> + <D_\mu\phi, D^\mu\phi> - V(|\phi|^2). \tag{2.1}$$

Les équations sont

$$K_\mu \equiv D^\lambda F_{\lambda\mu} + J_\mu = 0 \tag{2.2}$$

$$L \equiv D^\mu D_\mu \phi + \phi V'(|\phi|^2) = 0 \tag{2.3}$$

où J_μ (l'analogue du courant électromagnétique) est l'application de M dans $M^* \otimes \mathcal{G}$ définie par :

$$\forall C \in \mathcal{G}, \quad <C, J_\mu> = 2e \operatorname{Re} <D_\mu\phi, r(C)\phi> \tag{2.4}$$

Le premier travail est de choisir les variables dynamiques composant u et de mettre ce système sous la forme (1.1). Ce choix comporte beaucoup d'arbitraire. Il est commode d'utiliser le formalisme du premier ordre, c'est-à-dire de choisir u de façon que T soit un opérateur différentiel du premier ordre. Pour cela, on prend comme variables les A_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, $F_{\lambda\mu}$ $(0 \leqslant \lambda,\mu \leqslant n)$, ϕ et ψ_μ $(0 \leqslant \mu \leqslant n)$, où $\psi_\mu = D_\mu\phi$. Les équations d'évolution pour ces variables sont

$$\partial_o A_j = D_j A_o + F_{oj} \tag{2.5}$$

$$D^o F_{oj} = - D^k F_{kj} - J_j \tag{2.6}$$

$$D_o F_{kj} = D_k F_{oj} - D_j F_{ok} \tag{2.7}$$

$$D_o \phi = \psi_o \tag{2.8}$$

$$D^o \psi_o = - D^j \psi_j - \phi\, V'(\,|\phi|^2) \tag{2.9}$$

$$D_o \psi_j = D_j \psi_o + er(F_{oj})\phi \tag{2.10}$$

L'équation (2.5) est la composante (O,j) de (1.10), (2.6) est la composante j de (2.2) et (2.7) est la dérivée par rapport au temps de la composante (kj) de (1.10), modulo (2.5). (2.8) est la définition de ψ_o, (2.9) est la répétition de (2.3), et (2.10) est la dérivée par rapport au temps de la définition de ψ_j, modulo (2.5).

Le système (2.5)-(2.10) ainsi obtenu est incomplet pour plusieurs raisons.

(1) On n'a pas incorporé les définitions de F_{kj} et ψ_j,

$$F_{kj} = \partial_k A_j - \partial_j A_k + e[A_k, A_j] \tag{2.11}$$

$$\psi_j = D_j \phi \tag{2.12}$$

mais seulement leurs dérivées temporelles sous la forme (2.7) et (2.10). On doit donc imposer en outre (2.11) et (2.12) comme contraintes sur les données initiales. Grâce aux équations (2.7) et (2.10), ces contraintes seront préservées par l'évolution et donc satisfaites pour toutes valeurs du temps par les solutions de (2.5)-(2.10).

(2) On n'a pas incorporé la composante O de (2.2),

$$K_o = 0 \tag{2.13}$$

On impose donc cette condition comme contrainte sur les données initiales, et on doit alors s'assurer qu'elle est préservée par l'évolution. Ce dernier point résulte de l'invariance de jauge du système. Cette invariance entraîne en effet que la dérivée variationnelle de l'action (1.O) dans une direction dans l'espace

des champs correspondant à une transformation de jauge infinitésimale est identiquement nulle, et par conséquent on s'attend à ce que les équations d'Euler (2.2)-(2.3) ne soient pas indépendante. Effectivement, (2.3) entraîne que $D^\mu J_\mu = 0$ et par suite que

$$D^\mu K_\mu = D^\mu D^\lambda F_{\lambda\mu} = \frac{e}{2}[F^{\mu\lambda}, F_{\lambda\mu}] = 0 \tag{2.14}$$

En particulier, les équations (2.5)-(2.10) entraînent que $K_j = 0$, donc $D_o K_o = 0$, ce qui assure la préservation de la contrainte (2.13) par l'évolution. Dans le cas des équations de Maxwell ($G = U(1)$), la contrainte (2.13) est simplement la loi de Gauss $\operatorname{div} E = J_o$, E étant le champ électrique et J_o la densité de charge.

(3) En raison du phénomène précédent, on a perdu une équation. On voit effectivement que le système (2.5)-(2.10) contient explicitement A_o pour lequel on n'a pas d'équation d'évolution. Pour mettre ce système sous la forme (1.1) on doit ajouter une équation supplémentaire. Le choix de cette équation, appelée condition de jauge, est assez arbitraire. Les deux conditions qui ont été utilisées dans l'étude du problème de Cauchy sont la condition de jauge temporelle $A_o = 0$ et la condition de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$. Dans le premier cas, u est formé des variables déjà choisies et le système (1.1) coïncide avec (2.5)-(2.10) simplifié par le fait que $A_o = 0$ (en particulier $D_o = \partial_o$). Dans le second cas on inclut en outre A_o dans u, et le système (1.1) consiste en (2.5)-(2.10) et la condition de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, qui sert d'équation d'évolution pour A_o. Dans les deux cas, l'opérateur T et l'interaction f se lisent directement sur les équations. En particulier, f est quadratique, à l'exception possible du terme $\phi V'$, et ne contient pas de dérivées. Dans les deux cas, on doit imposer les conditions (2.11)-(2.13) comme contraintes sur les conditions initiales, ces contraintes étant préservées par l'évolution.

Dans toute la suite de l'exposé, on considère seulement la condition de jauge temporelle, qui est beaucoup mieux adaptée au problème de Cauchy que la condition de Lorentz. On renvoie à [7] pour un traitement de cette dernière.

Le système étant maintenant mis sous la forme (1.1), le traitement du problème de Cauchy se fait par une méthode classique. On définit le groupe libre

$$U(t) = \exp(tT) \tag{2.15}$$

et on met le problème de Cauchy sous forme de l'équation intégrale

$$u(t) = U(t)u_o + \int_o^t d\tau \quad U(t-\tau)f(u(\tau)) \equiv [S(u)]\ (t) \tag{2.16}$$

On cherche ensuite un espace de Banach X de fonctions de $x \in \mathbb{R}^n$ et un $\bar{t} > 0$ tels que la situation suivante soit réalisée. Soit $I = [0,\bar{t}]$. $\mathcal{C}(I,X)$ est un espace de Banach avec la norme

$$|||u||| = \sup_{t \in I} \|u(t)\|_X . \tag{2.17}$$

Pour $\rho > 0$, soit $B(I,\rho)$ la boule de centre 0 et de rayon ρ dans $\mathcal{C}(I,X)$. Soit $u_o \in X$ tel que $U(.)u_o \in B(I,\rho)$ pour un $\rho > 0$. On veut assurer que l'opérateur S applique la boule $B(I,2\rho)$ dans elle même et y soit strictement contractant, par exemple

$$|||S(u) - S(v)||| \leqslant \frac{1}{2}|||u - v||| \tag{2.18}$$

pour tous les $u,v \in B(I,2\rho)$. Si cela est vrai, un résultat classique assure que l'équation (2.16) a une solution unique dans $B(I,2\rho)$, et par un argument supplémentaire, la solution est unique dans $\mathcal{C}(I,X)$. Bien entendu, on n'espère réaliser (2.18) que pour $\bar{t}$ assez petit, et dépendant en général de ρ .

Un choix de X adapté au problème présent est l'espace $X = \mathcal{H}^k$ (k entier $\geqslant 0$ convenable) des u définis dans $\mathbb{R}^n$ et pour lesquels

$$\|u\|_X^2 \equiv \|u\|^2 \equiv \sum_{\alpha:|\alpha|\leqslant k} \sum_{\sigma} \| \ |\partial^\alpha u_\sigma| \ \|_2^2 < \infty \tag{2.19}$$

où α est un multiindice, σ indexe les composantes de u correspondant au choix fait plus haut, et $\|.\|_2$ désigne la norme dans $L^2 \equiv L^2(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{H}^k$ est une somme directe d'espace de Sobolev usuels. On voit facilement que dans $\mathcal{H}^k$, U(.) défini par (2.15) est un groupe borné à un paramètre satisfaisant l'estimation

$$\|U(t)u\| \leqslant \mu(t)\|u\| \tag{2.20}$$

avec $\mu(t) = 1 + |t|$ pour tout $u \in \mathcal{H}^k$, et que f est lipchitzienne pour V assez régulier et $k \geqslant [\frac{n}{2}] + 1$, et satisfait une estimation du type

$$\| f(u) - f(v)\| \leqslant \beta(\rho)\| u - v\| \tag{2.21}$$

pour tous les u, v $\in \mathcal{H}^k$ tels que $\| u\| \leqslant \rho$, $\| v\| \leqslant \rho$. Ces deux propriétés permettent d'assurer (2.18) pour $\bar{t}$ assez petit et conduisent au résultat d'existence locale suivant.

<u>Proposition 2.1</u> : Soit $k = [\frac{n}{2}] + 1$, $V \in \mathcal{C}^{k+2}(\mathbb{R}^+)$ et $u_o \in \mathcal{H}^k$. Alors il existe $\bar{t} > 0$ (dépendant de u_o) tel que (2.16) a une solution unique dans $\mathcal{C}([-\bar{t},\bar{t}], \mathcal{H}^k)$. Si de plus u_o satisfait (2.11)-(2.13), alors u(t) satisfait (2.11)-(2.13) pour tout $t \in [-\bar{t},\bar{t}]$.

On peut également établir par des méthodes classiques des propriétés de régularité supplémentaires des solutions de (2.16) si u_o et V sont suffisamment réguliers, et des propriétés de continuité des solutions par rapport aux données initiales.

On présente maintenant dans la fin de cette section une théorie généralisée du problème local dans des espaces locaux. Cette généralisation n'est pas propre au système de YM considéré ici, et s'applique à une large classe de systèmes hyperboliques décrivant une propagation à vitesse finie. Elle est particulièrement souhaitable dans le cas présent pour au moins deux raisons. L'une est que la contrainte elliptique (2.13) conduit à des effets de longue portée qui peuvent interdire aux données initiales d'être dans des espaces globaux comme $\mathcal{H}^k$. Par exemple, pour n = 2, la loi de Gauss div E = J_o entraîne que $E \sim C|x|^{-1}$ à l'infini si la charge totale n'est pas nulle, ce qui exclut que $E \in L^2$. La situation est encore pire pour n = 1. L'autre raison vient de l'intérêt de cas comportant par exemple une interaction $V = - |\phi|^2 + \frac{1}{2} |\phi|^4$ ayant un minimum pour $|\phi| = 1$, et dans lesquels on cherche des solutions pour lesquelles $|\phi| \to 1$ à l'infini , ce qui exclut que $\phi \in L^2$.

On aura besoin des notations suivantes. Pour toute boule ouverte $\Omega = B(x,R)$ de centre x et de rayon R dans $\mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on note

$$\Omega_{\pm}(t) = B(x,R \pm|t|), \tag{2.22}$$

avec la convention que $B(x,R) = \emptyset$ si $R \leqslant 0$. Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{H}^k(\Omega)$ l'espace des u définis dans Ω et pour lesquels (cf. (2.19))

$$\|u\|_\Omega^2 \equiv \sum_{\alpha:|\alpha|\leqslant k} \sum_\sigma \| |\partial^\alpha u_\sigma| \|_{2,\Omega}^2 < \infty , \tag{2.23}$$

où $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ désigne la norme dans $L^2(\Omega)$. Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on note r_Ω l'opérateur de restriction à Ω, c'est-à-dire de multiplication par la fonction caractéristique de Ω. Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{H}^k_{loc}(\Omega)$ l'espace (local) des u définies dans Ω et tels que $r_{\Omega'}u \in \mathcal{H}^k(\Omega')$ pour tout ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$, c'est-à-dire à fermeture compacte contenue dans Ω. Si $u \in \mathcal{H}^k_{loc}(\Omega)$ et $\Omega' \subset\subset \Omega$, on note $\|u\|_{\Omega'} = \|r_{\Omega'}u\|$, en accord avec (2.23). Enfin, on note $\mathcal{H}^k_{loc}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{H}^k_{loc}$.

La propriété de propagation à vitesse finie par le groupe libre (plus précisément à vitesse constante, égale à 1 dans les unités naturelles choisies ici) s'exprime par le fait que pour tout $u \in \mathcal{H}^k_{loc}$, toute boule $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $U(t)$ satisfait la majoration

$$\|U(t)u\|_\Omega \leqslant \mu(t)\|u\|_{\Omega_+(t)} . \tag{2.24}$$

D'autre part, l'interaction f est locale en ce sens que pour tout $u \in \mathcal{H}^k_{loc}$ et tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$f(r_\Omega u) = r_\Omega f(r_\Omega u). \tag{2.25}$$

Ces deux propriétés suggèrent que, si u est une solution de (2.16) et Ω une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, alors $r_\Omega u(t)$ ne dépend de u_o que par l'intermédiaire de $r_{\Omega_+(t)}u_o$, et en particulier ne dépend pas du comportement de u_o à l'infini. On va alors chercher des solutions de (2.16) dans le sens décrit ci-dessous (on se limite au temps positif. Pour un système comme celui considéré ici qui a de bonnes propriétés par renversement du temps, le problème pour le temps négatif se traite de la même façon). On appelle <u>galette</u> tout ensemble ouvert Γ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ tel que, si $(t,x) \in \Gamma$, alors

$$\{(t',x') : 0 \leqslant t' \leqslant t, |x - x'| \leqslant t - t'\} \subset \Gamma . \tag{2.26}$$

Autrement dit, si Γ contient un point (t,x), Γ contient aussi tous les points susceptibles de l'influencer. Une galette peut également être définie au moyen d'une fonction $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ telle que $|\gamma(x) - \gamma(x')| \leqslant |x - x'|$ pour tous les $x, x' \in \mathbb{R}^n$, par

$$\Gamma = \{(t,x) : 0 \leqslant t < \gamma(x)\} . \tag{2.27}$$

Il est clair qu'une réunion quelconque et une intersection finie de galettes sont encore des galettes. Pour toute boule ouverte $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$, on définit le tronc de cône (qui est aussi une galette)

$$\Gamma(\Omega,t) = \{(t',x') : 0 \leqslant t' < t \text{ et } x' \in \Omega_-(t')\}. \tag{2.28}$$

Pour toute galette Γ, on définit les sections horizontales par

$$\Gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in \Gamma\} ; \tag{2.29}$$

Ce sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Soit maintenant Γ une galette et $\bar{t} = \operatorname{Sup}\{t : \Gamma(t) \neq \emptyset\}$, et soit $u_o \in \mathcal{H}^k_{loc}(\Gamma(0))$. On appellera $\mathcal{H}^k_{loc}$-solution de (2.16) dans Γ un ensemble de couples $(t,u(t))$, $0 \leqslant t < \bar{t}$, tels que

(1) pour tout $t \in [0,\bar{t})$, $u(t) \in \mathcal{H}^k_{loc}(\Gamma(t))$,

(2) pour tout $t \in [0,\bar{t})$ et toute boule ouverte $\Omega \subset\subset \Gamma(t)$,

$$r_\Omega u(.) \in \mathcal{C}([0,t],\mathcal{H}^k(\Omega)),$$

(3) pour tout $t \in [0,\bar{t})$ et toute boule ouverte $\Omega \subset\subset \Gamma(t)$, la relation suivante est satisfaite

$$r_\Omega u(t) = r_\Omega U(t)u_o + \int_0^t d\tau\, r_\Omega U(t-\tau)f(u(\tau)). \tag{2.30}$$

Il résulte de (2.24) et (2.25) que (2.30) ne fait intervenir u que par l'intermédiaire de sa rextriction à $\overline{\Gamma(\Omega_+(t),t)}$, qui est contenu dans Γ par définition. Il est clair que si Γ et Γ' sont deux galettes, $\Gamma \subset \Gamma'$, et u une $\mathcal{H}^k_{loc}$-solution de (2.16) dans Γ', alors u a une restriction naturelle à Γ qui est une $\mathcal{H}^k_{loc}$-solution de (2.16) dans Γ.

Pour traiter le problème de Cauchy local généralisé, on utilisera le fait que l'interaction f satisfait une condition de Lipschitz locale, à savoir que pour toute boule ouverte $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tout $\rho > 0$ et tous les $u,v \in \mathcal{H}^k_{loc}$

tels que $\|u\|_\Omega \leqslant \rho$ et $\|v\|_\Omega \leqslant \rho$,

$$\|f(u) - f(v)\|_\Omega \leqslant \beta(\Omega,\rho)\, \|u - v\|_\Omega \quad . \tag{2.31}$$

Si le groupe libre U satisfait (2.24) et si l'interaction satisfait (2.25) et (2.31), on peut alors établir pour l'équation (2.16) les résultats d'unicité et d'existence suivants. D'une part, si u_1 et u_2 sont deux $\mathcal{H}^k_{loc}$-solutions de (2.16) dans deux galettes Γ_1 et Γ_2 et si les données initiales $u_{o,1}$ et $u_{o,2}$ coïncident dans $\Gamma_1(0) \cap \Gamma_2(0)$, alors les restrictions de u_1 et u_2 à $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ coïncident. D'autre part, si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u_o \in \mathcal{H}^k_{loc}(\Omega)$, alors il existe une galette Γ telle que $\Gamma(0) = \Omega$ et une (unique) $\mathcal{H}^k_{loc}$-solution u de (2.16) dans Γ . Cette solution est construite de la façon suivante : pour toute boule $\Omega' \subset\subset \Omega$, on définit $u'_o \in \mathcal{H}^k, u'_o$ à support compact, tel que $r_{\Omega'}\, u_o = r_{\Omega'}\, u'_o$. La proposition 2.1 assure l'existence d'une solution u' de (2.16) avec donnée initiale u'_o dans une bande $[0,t(\Omega')] \times \mathbb{R}^n$, et la restriction de u' à $\Gamma(\Omega',t(\Omega'))$ est une $\mathcal{H}^k_{loc}$-solution de (2.16) dans $\Gamma(\Omega',t(\Omega'))$. Il ne reste plus qu'à recoller, grâce au résultat d'unicité précédent, toutes les solutions partielles associées ainsi aux boules $\Omega' \subset\subset \Omega$. Dans le cas considéré ici, on obtient le résultat suivant.

<u>Proposition 2.2</u> : Soit $k = [\frac{n}{2}] + 1$, $V \in \mathcal{C}^{k+2}(\mathbb{R}^+)$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u_o \in \mathcal{H}^k_{loc}(\Omega)$. Alors il existe une galette Γ avec $\Gamma(0) = \Omega$ et une unique $\mathcal{H}^k_{loc}$-solution de (2.16) dans Γ . Si u_o satisfait les contraintes (2.11)-(2.13) dans Ω , alors u(t) satisfait ces contraintes dans $\Gamma(t)$ pour tout t.

La théorie précédente est d'une grande flexibilité pour l'étude du problème local. Elle permet de considérer des données initiales $u_o \in \mathcal{H}^k_{loc}$ qui explosent arbitrairement vite à l'infini. Dans ce cas, on s'attend à ce que la galette d'existence Γ s'aplatisse rapidement à l'infini. Inversement, si u_o tend vers zéro à l'infini (par exemple, avec $\Omega = B(x,R)$, si $\|u_o\|_\Omega \to 0$ quand $|x| \to \infty$ à R fixé) on s'attend à ce que la galette Γ s'épaississe à l'infini, et on peut relier sa vitesse d'épaississement à celle de la décroissance de $\|u_o\|_\Omega$. Un cas extrême est celui où u_o est à support compact, par exemple contenu dans la boule B(O,R). On obtient alors pour Γ la réunion d'une bande $[0,\bar{t}) \times \mathbb{R}^n$ et de l'extérieur $|x| > R + t \geqslant R$ d'un cône s'appuyant sur Ω .

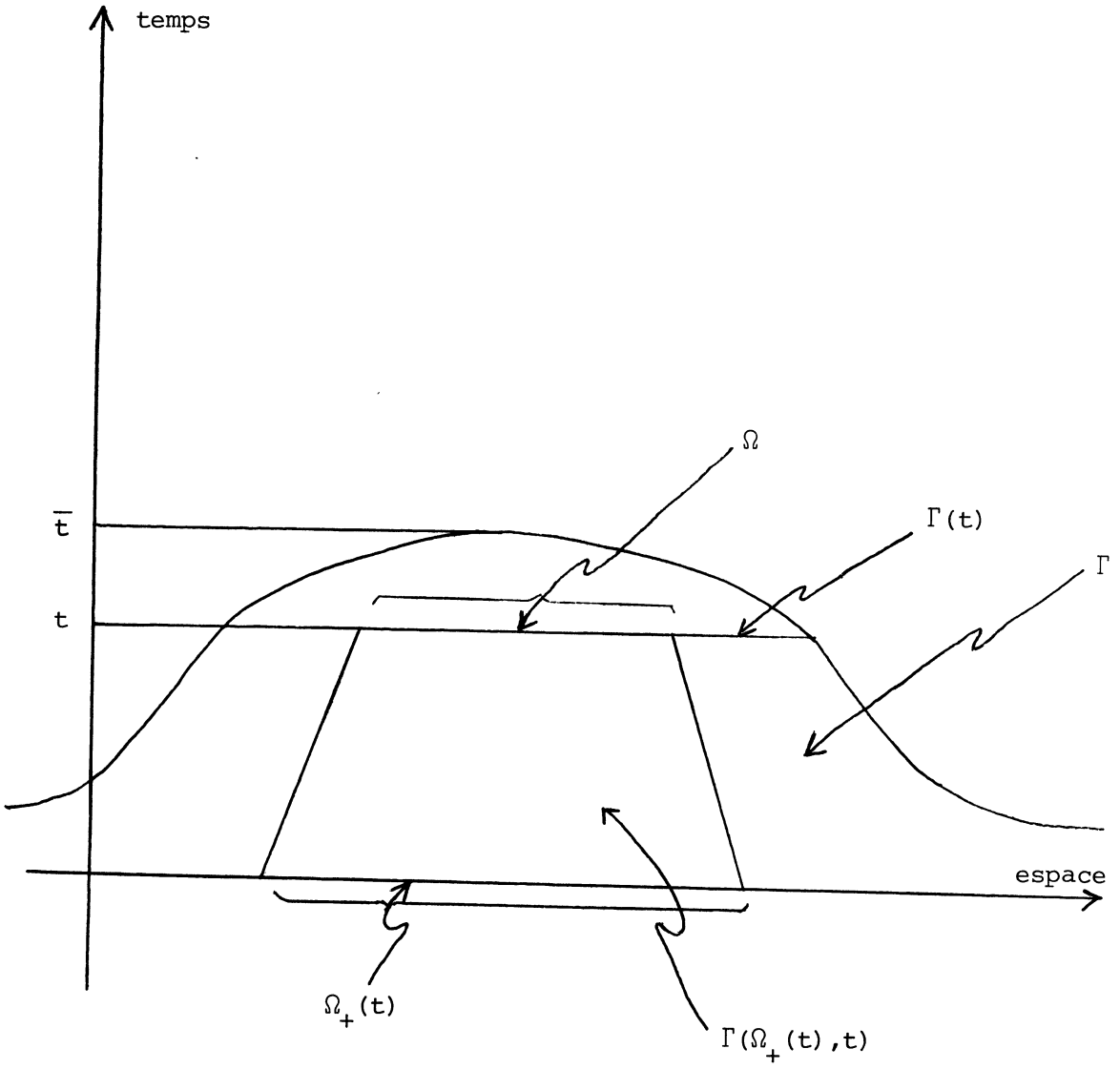

Figure illustrant les différentes définitions introduites à la fin de la Section 2 .

3. LE PROBLEME DE CAUCHY GLOBAL

Pour démontrer l'existence de solutions globales du problème de Cauchy dans l'espace global $\mathcal{H}^k$, plus précisément de solutions $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{H}^k)$ de l'équation (2.16) pour des données initiales $u_o \in \mathcal{H}^k$, il suffit, par un argument classique, de montrer qu'une solution quelconque $u \in \mathcal{C}(I, \mathcal{H}^k)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant l'origine, admet pour tout $t \in I$ une estimation a priori dans $\mathcal{H}^k$ en termes des données initiales, de la forme

$$\|u(t)\| \leqslant h(t, \|u_o\|). \tag{3.1}$$

L'essentiel de la démonstration, esquissée dans cette section, consiste donc à obtenir une telle estimation.

Pour démontrer l'existence de solutions globales dans l'espace local $\mathcal{H}^k_{loc}$, plus précisément de solutions $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{H}^k_{loc})$ pour des données initiales $u_o \in \mathcal{H}^k_{loc}$, on voit assez facilement qu'il suffit en outre d'obtenir cette estimation sous la forme locale suivante : soit $u_o \in \mathcal{H}^k_{loc}$ et $u \in \mathcal{C}(I, \mathcal{H}^k_{loc})$ une solution de (2.16). Alors, pour toute boule $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, u satisfait une estimation de la forme

$$\|u(t)\|_\Omega \leqslant \tilde{h}(t, \Omega, \|u_o\|_{\Omega_+(t)}). \tag{3.2}$$

Une telle estimation permet en effet de montrer que pour toute boule $\Omega = B(O,R)$, l'équation (2.16) admet une (unique) $\mathcal{H}^k_{loc}$-solution dans la galette $\Gamma(\Omega, R-1)$, et on obtient la solution globale cherchée (pour $t \geqslant 0$) en recollant grâce au résultat d'unicité les solutions partielles ainsi obtenues pour une suite croissante de valeurs de R tendant vers l'infini (un argument symétrique vaut pour t négatif). On renvoie à [6], Proposition 5.3 et [7], Proposition 4.4 pour deux exemples de cette démonstration. Toutes les estimations décrites ci-dessous, et plus généralement celles de [4], [6], [7], sont localisables au sens de (3.2) et permettent donc de globaliser dans des espaces locaux. Dans la suite de l'exposé, on se limitera à la démonstration des estimations sous la forme globale (3.1).

On continue à se limiter au cas de la condition de jauge temporelle $A_o = 0$, et on rappelle qu'on doit controler dans ce cas les composantes de $F_{\lambda\mu}$, ψ_μ, A_j et ϕ dans H^k ($k = [\frac{n}{2}] + 1$). La première étape de l'estimation est d'écrire la conservation de l'énergie

$$E_o = \frac{1}{2} \sum_{\lambda < \mu} \| F_{\lambda\mu} \|_2^2 + \sum_{\mu} \| \psi_\mu \|_2^2 + \int dx\ V(|\phi|^2) . \tag{3.3}$$

(Pour alléger l'écriture, on omet les barres simples $|.|$ dans les normes $\| . \|_p$). On voit facilement en utilisant les équations que $\partial_o E_o = 0$. Il en résulte en particulier, dans le cas répulsif, c'est-à-dire pour $V \geqslant 0$, que F et ψ sont uniformément bornés dans L^2. Par intégration, en utilisant (2.5) et (2.8), on en déduit qu'il en est de même de A et ϕ dans tout intervalle borné :

$$\| A(t) \|_2 \leqslant \| A(0) \|_2 + \sqrt{2E_o}\ t \tag{3.4}$$

$$\| \phi(t) \|_2 \leqslant \| \phi(0) \|_2 + \sqrt{E_o}\ t . \tag{3.5}$$

Ces résultats admettent une généralisation au cas d'un V non partout positif, mais satisfaisant une minoration $V(\rho) \geqslant - a^2 \rho$. Ils sont valables pour toute valeur de n.

Pour simplifier l'exposé de la suite des majorations, on se limite maintenant au système de YM seul, et on laisse de côté le champ scalaire. L'inclusion de ce dernier ne présente pas de difficulté supplémentaire et s'effectue par une extension immédiate des mêmes méthodes.

L'étape suivante consiste à contrôler les dérivées premières de F dans L^2. Pour cela, il est commode d'exploiter l'invariance de jauge de la théorie en contrôlant d'abord les dérivées covariantes, et on introduit la quantité invariante de jauge

$$E_1 = \frac{1}{2} \sum_k \sum_{\lambda<\mu} \| D_k F_{\lambda\mu} \|_2^2 . \tag{3.6}$$

Si e = 0 (cf. (1.5), (1.9), (1.10)), les équations de YM se réduisent aux équations de Maxwell, les dérivées covariantes aux dérivées usuelles, et E_1 est invariant par l'évolution. Pour $e \neq 0$, E_1 cesse d'être invariant mais dans sa dérivée $\partial_o E_1$, les termes d'ordre 0 en e, qui sont de la forme $O(D^3F^2)$, c'est-à-dire avec 2 champs et trois dérivées, disparaissent, et il reste seulement des termes d'ordre $O(e\ D\ F^3)$, résultant des commutateurs de type (1.9). Plus précisément

$$\partial_o E_1 = e \int dx\ \{ \langle D_k F^{oj}, [F^{\mu k}, F_{\mu j}] \rangle - \langle D_k F^{ij}, [F^{ok}, F_{ij}] \rangle \}. \tag{3.7}$$

On estime le second membre de (3.7) par les inégalités de Hölder et de Sobolev. Il est important de remarquer que ces dernières, par exemple

$$\|F\|_q \leqslant C\|DF\|_2^{\sigma}\,\|F\|_2^{1-\sigma} \tag{3.8}$$

avec $1/q = 1/2 - \sigma/n$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, sont valables indifféremment en dérivées usuelles ou en dérivées covariantes, grâce à la remarque

$$\partial_\mu |F|^2 = 2\ \mathrm{Re} < F,\ D_\mu F> \tag{3.9}$$

qui entraîne

$$\partial_\mu |F| \leqslant |D_\mu\ F| \ . \tag{3.10}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} |\partial_o E_1| &\leqslant C\|DF\|_2\ \|F\|_4^2 \\ &\leqslant C\|DF\|_2^{1+n/2}\ \|F\|_2^{2-n/2} \\ &\leqslant C\ E_1^{1/2+n/4}\ \ E_o^{1-n/4} \ . \end{aligned} \tag{3.11}$$

En particulier pour $n = 1,2$, le dernier membre de (3.11) est sous-linéaire en E_1, ce qui entraîne par l'inégalité de Gronwall que E_1 est contrôlé pour tout t en fonction de u_o. Par exemple, pour $n = 2$,

$$E_1(t) \leqslant E_1(0)\ \exp(C\ \sqrt{E_o}\ t) \ . \tag{3.12}$$

Pour $n = 3,4$, le dernier membre de (3.11) augmente plus vite que linéairement en E_1, et (3.11) ne suffit pas à contrôler E_1. En appliquant les inégalités de Sobolev différemment, on peut cependant estimer $\partial_o E_1$ par

$$|\partial_o E_1| \leqslant C\|DF\|_2^2\ \|F\|_n \leqslant\ C\ E_1\ \|F\|_n \ , \tag{3.13}$$

si bien qu'une estimation indépendante de F dans L^n permet de contrôler E_1. On verra plus loin que pour $n = 3$, on peut obtenir en fait une estimation a priori beaucoup plus forte, en l'occurence une estimation de F dans L^∞ , qui entraîne donc

une estimation a priori de E_1 dans ce cas.

E_1 étant contrôlé, on poursuit les estimations de la façon suivante. Pour $n \geqslant 2$, on a $k \geqslant 2$, et on doit estimer les dérivées secondes de F dans L^2. Pour cela, on considère d'abord la quantité invariante de jauge

$$E_2 = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} \sum_{\lambda<\mu} \| D_k D_\ell F_{\lambda\mu} \|_2^2 . \tag{3.14}$$

On voit comme précédemment que

$$\begin{aligned} |\partial_o E_2| &\leqslant C \int dx \; |< D^2F, [DF,F]>| \\ &\leqslant C \| D^2F \|_2 \| F \; DF \|_2 , \end{aligned} \tag{3.15}$$

et on en déduit facilement une estimation de $|\partial_o E_2|$ sous-linéaire en E_2 pour E_1 donné si $n \leqslant 4$. En particulier, un contrôle a priori de E_1 entraine un contrôle a priori de E_2 pour $n \leqslant 4$.

Une fois estimées les quantités invariantes de jauge E_o, E_1 (pour $n = 1,2,3$) et en outre E_2 (pour $n = 2, 3$), il reste à estimer dans L^2 les dérivées premières de A (pour $n = 1,2,3$) et en outre les dérivées secondes de A (pour $n = 2,3$), et à remplacer dans les estimations de F les dérivées covariantes par des dérivées usuelles. Ces estimations se démontrent par des méthodes analogues, et ne présentent pas de difficultés en jauge temporelle. Par exemple, on déduit de l'identité

$$\partial_o \{\frac{1}{2} \int dx <\partial^k A^j, \partial_k A_j >\} = \int dx <\partial^k A^j, \partial_k F_{oj}>$$

que pour $n \leqslant 4$,

$$\begin{aligned} \partial_o \| \partial A \|_2 &\leqslant \| DF \|_2 + C \|A\|_4 \| DF\|_4 \\ &\leqslant \| DF \|_2 + C (\| DF \|_2 \| \partial A \|_2)^{n/4} (\| F \|_2 \| A\|_2)^{1-n/4} \end{aligned}$$

qui entraîne manifestement le contrôle de A dans H^1 si on contrôle E_o et E_1 .

En résumé, on obtient l'estimation cherchée (3.1) pour $1 \leqslant n \leqslant 3$. Une étape importante est l'estimation de E_1 qui résulte, pour $n = 1$ et 2, des considérations précédentes, et pour $n = 3$, d'une estimation indépendante de F dans

L^∞, qu'on décrira plus loin. On énonce dès maintenant le résultat final, en y incorporant le champ scalaire, avec des hypothèses appropriées sur V, et l'extension de la théorie aux espaces locaux.

<u>Proposition 3.1</u> : Soit $n = 1, 2$ ou 3, $k = [\frac{n}{2}] + 1$, $V \in \mathcal{C}^{k+2}(\mathbb{R}^+)$ satisfaisant $V(\rho) \geqslant -a^2\rho$ et en outre, pour $n = 2,3$, la condition

$$|V'(\rho)| + \rho\,|V''(\rho)| \leqslant b(1 + \rho^p) \tag{3.16}$$

avec $0 \leqslant p < \infty$ pour $n = 2$ et $0 \leqslant p < 2$ pour $n = 3$. Soit $u_o \in \mathcal{H}^k_{loc}$ satisfaisant les contraintes (2.11) - (2.13). Alors l'équation (2.16) (correspondant à la jauge temporelle $A_o = 0$) a une solution unique $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{H}^k_{loc})$, et $u(t)$ satisfait les contraintes (2.11) - (2.13) pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Dans la fin de cette section et en se limitant de nouveau pour simplifier au cas de YM pur, on va décrire la démonstration [4] de l'estimation de $\|F\|_\infty$ qui est essentielle pour contrôler E_1 en dimension $n = 3$. Cette estimation utilise trois ingrédients.

(1) la représentation explicite du groupe d'évolution associé à l'équation des ondes pour $n = 3$, qui permet d'exprimer les solutions de ce type d'équations au moyen d'intégrales sur le cône de lumière passé.

(2) l'invariance de jauge de la théorie et plus précisément de la quantité $|F_{\lambda\mu}|$, qui permet d'estimer cette quantité en chaque point dans une jauge spécialement adaptée à ce point.

(3) la conservation de l'énergie impulsion utilisée dans des cônes.

On remarque tout d'abord en appliquant les équations du mouvement que F satisfait l'équation

$$D_\nu D^\nu F_{\lambda\mu} = 2e[F_{\lambda\nu}, F_\mu{}^\nu] \tag{3.17}$$

Cette équation est du type

$$\Box v = w \equiv -2e\,\partial_\mu(A^\mu v) + e(\partial_\mu A^\mu)v - e^2 A_\mu A^\mu v + \tilde{w} \tag{3.18}$$

où v et w prennent leurs valeurs dans un espace où agit une représentation de G et de $\mathcal{G}$, et en identifiant A^μ , $\partial_\mu A^\mu$, etc, avec leurs représentants. Ici, $v = F_{\lambda\mu}$ et $\tilde{w}$ est le second membre de (3.17). Une telle équation avec conditions initiales $v(0) = v_o$, $\partial_o v(0) = \dot{v}_o$, se résoud pour $t > 0$ par

$$v(t) = \cos \omega t \, v_o + \omega^{-1} \sin \omega t \, \dot{v}_o + \int_o^t d\tau \; \omega^{-1} \sin \omega(t-\tau) \; w(\tau) \tag{3.19}$$

où $\omega = (-\Delta)^{1/2}$. En dimension n = 3, l'opérateur $\omega^{-1} \sin \omega t$ est la convolution en x avec la mesure $(4\pi t)^{-1} \delta(|x| - t)$. On va partir de l'équation (3.19) pour estimer v(t) dans L^∞ en faisant une estimation de v(t,x) en chaque point. Pour simplifier l'écriture, on change l'origine et on la ramène au point où on veut estimer v, si bien que le plan des données initiales devient le plan $x^o = -t$. L'équation (3.19) devient

$$v(0) = \int_\Sigma \frac{d^2\sigma}{4\pi} \left[(-x^o\partial_o + x^i\partial_i + 1)v\right]_{|x| = t = -x^o} + \int_{B(t)} \frac{d^3x}{4\pi\,|x|} \, w(-|x|,x) \tag{3.20}$$

où Σ est la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$, σ le point générique de Σ , $d^2\sigma$ la mesure de surface sur Σ, $x = |x|\sigma$ le point générique de $\mathbb{R}^3$, de coordonnées $\{x^i\}$, et $B(t) \equiv B(0,t)$ la boule de centre 0 et de rayon t dans $\mathbb{R}^3$. Le premier terme du second membre est la contribution des données initiales, et on doit estimer la contribution de w. La partie la plus dangereuse de w est la divergence $\partial_\mu(A^\mu v)$, qui contient des dérivées de v. Par un calcul élémentaire (avec une intégration par parties) on obtient

$$v(0) = \int_\Sigma \frac{d^2\sigma}{4\pi} \left[(-x^oD_o + x^iD_i + 1)v + e\,x^\mu A_\mu v\right]_{|x| = t = -x^o} + 2\,e \int_{B(t)} \frac{d^3x}{4\pi|x|^3} \left[(1 - x^o\partial_o)x^\mu A_\mu v\right]_{x^o=-|x|}$$

$$+ \text{ autres termes} \tag{3.21}$$

où les autres termes sont la contribution à (3.20) des trois derniers termes de (3.18).

On utilise maintenant l'invariance de jauge. Pour estimer, en un point, $|v|$, c'est-à-dire $|F_{\lambda\mu}|$, qui est invariant de jauge, on effectue une transformation de jauge qui rend A particulièrement simple par rapport à ce point. La condition de jauge utile ici, qui est suggérée par (3.21), est la condition de jauge de Cronström, définie par $x^\mu A_\mu = 0$. On peut montrer qu'il est toujours possible de passer dans une telle jauge par une transformation du type (1.7). On doit pour cela résoudre l'équation différentielle sur le groupe

$$e\, x^\mu A'_\mu \equiv g^{-1} x^\mu \partial_\mu\, g + e\, g^{-1}\, x^\mu\, A_\mu\, g = 0. \qquad (3.22))$$

Dans cette jauge la seconde intégrale (et une partie de la première) dans (3.21) disparaît, si bien que la contribution du terme $\partial_\mu(A^\mu v)$ dans w est entièrement exprimée au moyen des données initiales. Il reste à estimer les contributions des autres termes de w. Désignant encore par A et F les champs en jauge de Cronström relative à l'origine, on voit facilement que

$$A_\mu(x) = \int_0^1 d\alpha\, \alpha x^\lambda\, F_{\lambda\mu}\, (\alpha x) \qquad (3.23)$$

En particulier, A en un point du cône de lumière passé s'exprime entièrement en termes de la restriction de F à la génératrice du cône allant à ce point, si bien que l'intégrale de w sur ce cône s'exprime entièrement en termes de la restriction de F à ce cône. Plus précisément, on trouve :

$$e\partial_\mu\, A^\mu - e^2 A_\mu\, A^\mu = -\, 2\, e^2 \int_0^1 d\beta \int_0^\beta d\alpha\, \alpha\beta\, x_\rho\, x^\lambda\, F_{\lambda\mu}(\alpha x) F^{\rho\mu}\, (\beta x) \qquad (3.24)$$

et les "autres termes" de (3.21) se réduisent à des intégrales sur le cône de lumière passé d'expressions cubiques en F (venant de (3.24)) et quadratiques en F (venant de $\tilde{w}$).

Pour estimer ces intégrales, on injecte l'information fournie par la conservation de l'énergie impulsion. Pour cela, on remarque que le vecteur énergie impulsion θ du système, défini par

$$\theta^o = \frac{1}{2} \sum_{\lambda<\mu} |F_{\lambda\mu}|^2 \quad , \quad \theta^j = - \langle F_{ok}, F^{jk} \rangle \tag{3.25}$$

satisfait $\partial_\mu \theta^\mu = 0$. Le théorème de Stokes appliqué à l'intérieur $\Delta(t)$ du cône passé $x^o = - |x|$ limité au plan $x^o = - t$ donne alors

$$\int_{B(t)} d^3x \; \theta^o(-t,x) + \int_{B(t)} \frac{d^3x}{|x|} \; x_\mu \theta^\mu \; (- |x|,x) = -\int_{\Delta(t)} d^4x \; \partial_\mu \theta^\mu = 0 \tag{3.26}$$

La première intégrale est l'énergie $E_{o,t}$ des données initiales dans la boule $B(t)$. Substituant (3.25) dans (3.26), on obtient par un calcul élémentaire

$$\int_{B(t)} \frac{d^3x}{4|x|^2} \{\sum_\mu |x^\lambda F_{\lambda\mu}|^2 + \sum_{\lambda<\mu<\nu} |\mathrm{Circ}\; x_\lambda \; F_{\mu\nu}|^2\}_{x^o = -|x|} = E_{o,t} \tag{3.27}$$

où Circ signifie somme sur les permutations circulaires. La relation (3.27) est valable en dimension quelconque. En dimension $n = 3$, elle est symétrique par dualité électrique-magnétique, car la deuxième somme dans l'accolade est simplement $\sum_\mu |x^\lambda (*F)_{\lambda\mu}|^2$.

Le point remarquable qui nous intéresse ici est que l'identité d'énergie (3.27) contrôle précisément les composantes $x^\lambda F_{\lambda\mu}$ qui apparaissent dans l'expression à estimer (3.24). La suite du calcul consiste à estimer la contribution de (3.24) à (3.21) en factorisant une norme dans L^∞, plus précisément

$$\bar{v}(r) = \sup_{\sigma \in \Sigma} |v(-r,r\sigma)|, \tag{3.28}$$

ce qui laisse une intégrale quadratique en $x^\lambda F_{\lambda\mu}$, qu'on estime (après application de l'inégalité de Schwarz) au moyen de (3.27) en termes de l'énergie des données initiales dans $B(t)$. On obtient ainsi pour la contribution de ces termes une estimation de la forme

$$C \; E_{o,t} \int_o^t dr \; \bar{v}(r) \; . \tag{3.29}$$

Tout aussi remarquablement, le terme en $\tilde{w}$, grâce au commutateur, admet une factorisation en somme de produits de deux facteurs dont l'un au moins est du type $x^\lambda F_{\lambda\mu}$ ou $\mathrm{Circ}\; x_\lambda \; F_{\mu\nu}$, et par suite contrôlé par (3.27), donnant ainsi une

contribution à (3.21) majorée (après application de l'inégalité de Schwarz) par

$$C\, E_{o,t}^{1/2} \{\int_o^t dr\ \bar{v}(r)^2\}^{1/2} . \tag{3.30}$$

Finalement, on obtient pour $v(O) \equiv F_{\lambda\mu}(O)$ une estimation du type

$$|v(O)| \leqslant \text{ Contribution des données initiales } + C\, E_{o,t} \int_o^t dr\ \bar{v}(r)$$
$$+ C\, E_{o,t}^{1/2} \{\int_o^t dr\ \bar{v}(r)^2\}^{1/2} . \tag{3.31}$$

On achève maintenant la démonstration de l'estimation de $\|F\|_\infty$ en visant tout de suite la forme localisée analogue à (3.2). On remet l'origine dans le plan des données initiales, on considère la boule $\Omega = B(R)$ pour un $R > O$, et on introduit

$$f(t) = \|F(t)\|_{\infty,\Omega_-(t)} \tag{3.32}$$

Appliquant l'estimation (3.31) en chaque point de la galette $\Gamma(\Omega,t)$, on obtient

$$f(t) \leqslant \text{ Contribution des données initiales dans } \Omega$$
$$+ C\, E_\Omega \int_o^t f(\tau)d\tau + C\, E_{o\Omega}^{1/2} \{\int_o^t d\tau\ f(\tau)^2\}^{1/2} \tag{3.33}$$

et on en déduit par l'inégalité de Gronwall une estimation a priori de $f(t)$ en fonction des données initiales dans Ω , ce qui est précisément l'estimation cherchée de $\|F\|_\infty$ sous la forme locale.

L'inclusion du champ scalaire, qu'on a négligé ici, ne présente pas de difficultés. L'équation pour $F_{\lambda\mu}$ contient un terme supplémentaire $D_\mu J_\lambda - D_\lambda J_\mu$ dans $\tilde{w}$, et on estime simultanément $F_{\lambda\mu}$ et ψ_μ , ce dernier satisfaisant de son côté l'équation

$$D_\nu D^\nu \psi_\mu = 2e\ r(F_{\lambda\mu})\psi^\lambda - e\ r(J_\mu)\phi - D_\mu(\phi\ V'). \tag{3.34}$$

Les termes provenant de la dérivée covariante s'estiment exactement comme plus haut, avec maintenant $v = \psi_\mu$ au lieu de $v = F_{\lambda\mu}$, et les termes de $\tilde{w}$ de façon analogue. En présence du champ scalaire, l'identité d'énergie (3.27) comporte au premier membre un terme supplémentaire

$$\int_{B(t)} \frac{d^3x}{|x|^2} \{|x^\mu \psi_\mu|^2 + \sum_{j<k} |x_j \psi_k - x_k \psi_j|^2 + |x|^2 V(|\phi|^2)\} \tag{3.35}$$

qui contrôle précisément les composantes de ψ dont on a besoin (en l'occurence les dérivées covariantes de ϕ le long du cône).

REFERENCES

[1] Y. Choquet-Bruhat, D. Christodoulou : C. R. Acad. Sc. Paris, 293, 195-200 (1981) et Ann. Scient. E.N.S. sous presse.

[2] Y. Choquet-Bruhat, I. E. Segal : C. R. Acad. Paris, sous presse.

[3] D. Eardley, V. Moncrief : Commun. Math. Phys. 83, 171-192, (1982).

[4] D. Eardley, V. Moncrief : Commun. Math. Phys. 83, 193-212, (1982).

[5] J. Ginibre, G. Velo : Phys. Lett. B 99, 405-410 (1981).

[6] J. Ginibre, G. Velo : Commun. Math. Phys. 82, 1-28, (1981).

[7] J. Ginibre, G. Velo : Ann. I. H. P. 36, 59-78, (1982).

[8] R. T. Glassey, W. A. Strauss : Commun. Math. Phys. 81, 171-188, (1981).

[9] R. Kerner : Ann. I. H. P., 20 , 279-284 (1974).

[10] V. Moncrief : J. Math. Phys. 21, 2291-2296, (1980).

[11] I. E. Segal : Ann. Math. 78, 339-364 (1963).

[12] I. E. Segal : J. Funct. Anal. 33, 175-194 (1979).

***