M. TSUJI

Localisation et front d'onde analytique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 3, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 0 - 1 9 8 1

LOCALISATION ET FRONT D'ONDE ANALYTIQUE

par M. TSUJI

Exposé n°III

21 Octobre 1980

§ 1. INTRODUCTION

Soit $P(D_x)$ un opérateur d'ordre m à coefficients constants hyperboliques par rapport à $\vartheta \in R^n \setminus \{0\} \equiv \dot{R}^n$ où $x \in R^n$ et $D_x = \partial / i\partial_x$, c'est-à-dire, le symbole $P(\zeta)$ satisfait

i) $P_m(\vartheta) \neq 0$ où P_m est la partie principale de P, et

ii) $P(\xi - i\gamma\vartheta) \neq 0$ pour $\xi \in R^n$ et $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$ où γ_0 est constant. Alors

$$(1) \qquad E(P)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{R^n - i\gamma\vartheta} P(\zeta)^{-1} e^{i\langle x,\zeta\rangle} d\zeta \qquad (\gamma \geqslant \gamma_0)$$

définit l'unique solution élémentaire de $P(D_x)$ dont le support est contenu dans $\{x \in R^n;\ \langle x, \vartheta\rangle \geqslant 0\}$. Le but de cet exposé est de déterminer le front d'onde analytique de E(P) exactement.

Soit $u(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$. Alors on note Su le support, SSu le support singulier, WF(u) le front d'onde, et $WF_A(u)$ le front d'onde analytique de u. On écrit ici la définition de $WF_A(u)$ précisément. Soient $x^0 \in R^n$ et $\xi^0 \in \dot{R}^n$. Le point (x^0, ξ^0) est dans le complémentaire de $WF_A(u)$ si et seulement s'il existe un voisinage U de x^0 et un voisinage ouvert conique Γ de ξ^0 tels que

$$(2) \qquad |\widehat{\phi_N u}(\xi)| \leqslant C(CN)^N (1 + |\xi|)^{-N} \qquad \text{pour} \quad \xi \in \Gamma ,$$

où $\{\phi_N\} \subset C_0^\infty(U)$ vérifie

$$(3) \qquad |D^\alpha \phi_N| \leqslant C(CN)^{|\alpha|} \qquad \text{pour} \quad |\alpha| \leqslant N,$$

$\phi_N(x) \equiv 1$ sur un voisinage fixé de x^0 contenu dans U, et $\hat{f}(\xi)$ est la transformée de Fourier de f(x), c'est-à-dire,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{R^n} f(x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx .$$

Si ξ est complexe, nous appelons $\hat{f}(\xi)$ la transformée de Laplace de f(x) en utilisant le même symbole.

§ 2. ENONCE DES RESULTATS

Notre problème est de décrire WF(E(P)) et $WF_A(E(P))$ exactement. Quoique ce problème ait une longue histoire, nous partons des travaux d'Atiyah-Bott-Gårding [2] et [3].On développe $s^m P(s^{-1}\xi + \zeta)$ en un polynôme de s,

$$s^m P(s^{-1}\xi + \zeta) = s^p P_\xi(\zeta) + O(s^{p+1})$$

où $P_\xi(\zeta) \not\equiv 0$. Le nombre $p = m_\xi(P)$ est la multiplicité de ξ par rapport à P. On appelle le polynôme $P_\xi(\zeta)$ la localisation de P à ξ . Alors $P_\xi(\zeta)$ est aussi hyperbolique par apport à ϑ . Atiyah-Bott-Gårding [2] ont démontré le :

<u>Théorème 1</u> :

$$\lim_{s\to\infty} s^{m-p} e^{-is<x,\xi>} E(P) = E(P_\xi) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(R^n)$$

où $E(P_\xi)$ est la solution élémentaire de $P_\xi(D_x)$, et

$$\bigcup_{\xi\neq 0} SE(P_\xi)\times\{\xi\} \subset WF(E(P)) \subset WF_A(E(P)) \subset \bigcup_{\xi\neq 0} c.h.SE(P_\xi)\times\{\xi\}$$

où c.h.A signifie l'enveloppe convexe de A.

Dans [2] , ils ont proposé les conjectures suivantes :

i) $WF(E(P)) = \bigcup_{\xi\neq 0} SE(P_\xi)\times\{\xi\}$,

ii) $WF(E(P)) = WF_A(E(P))$.

La conjecture (i) n'est pas vraie. Pour les exemples, voir l'exposé de l'auteur [7] . Le but de cet exposé est de donner la description exacte de $WF(E(P))$ et de démontrer la conjecture (ii) pour les opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles. Nous généralisons d'abord le théorème de localisation d'Atiyah-Bott-Gårding.

On développe $s^{m-p} P(s\xi + \zeta)^{-1}$ en une série formelle de Taylor par rapport à $1/s$ comme suit :

$$\frac{s^{m-p}}{P(s\xi+\zeta)} = \frac{1}{P_\xi(\zeta)} + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(\zeta)P_\xi(\zeta)^{-j-1}\left(\frac{1}{s}\right)^j$$

et on écrit

$$E_0(P_\xi) = E(P_\xi) \quad \text{et}$$

$$E_j(P_\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{R^n - i\gamma\vartheta} Q_j(\zeta)P_\xi(\zeta)^{-j-1} e^{i<x,\zeta>} d\zeta .$$

Alors nous avons le théorème de localisation généralisé,

Théorème 2 : Pour un entier N quelconque, on a

$$(4)\qquad \lim_{s\to\infty} s^N\{s^{m-p}e^{-is<x,\xi>}\, E(P) - \sum_{j=0}^{N-1} E_j(P_\xi)s^{-j}\} = E_N(P_\xi)$$

dans $\mathcal{D}'(R^n)$, et

$$(5)\qquad WF(E(P)) \supset \bigcup_{\xi\neq 0} \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} SE_j(P_\xi)\right) \times \{\xi\} .$$

Nous proposons une conjecture pour un opérateur hyperbolique $P(D_x)$ quelconque :

$$(C)\qquad WF(E(P)) = WF_A(E(P)) = \bigcup_{\xi\neq 0} \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} SE_j(P_\xi)\right) \times \{\xi\}$$

Posons ici l'hypothèse suivante :

(H) La multiplicité des caractéristiques de P est au plus deux .

Alors nous obtenons le théorème principal de cet exposé :

Théorème 3 : Supposons (H), alors (C) est vrai.

L'ensemble $\bigcup_{j=0}^{\infty} SE_j(P_\xi)$ n'est pas concret. De plus, pour comparer le résultat d'Atiyah-Bott-Gårding (Théorème 1) avec le nôtre, nous l'écrivons pour le premier terme $E(P_\xi)$ seulement. Dans ce but, nous classifions des points caractéristiques comme suit :

$$C_1 = \{\ \xi \in \dot{R}^n\ ;\ P_m(\xi) = 0\ ,\ \mathrm{grad}\ P_m(\xi) \neq 0\}$$

et

$$C_2 = \{\xi \in \dot{R}^n;\ P_m(\xi) = 0,\ \mathrm{grad}\ P_m(\xi) = 0\}\ .$$

Pour $\xi^o \in C_2$, on peut supposer sans perdre la généralité que $\xi^o = (1,0,\dots,0)$, $\vartheta = (1,1,0,\dots,0)$ et

$$P_{\xi^o}(\zeta) = \zeta_2^2 - \sum_{j=3}^{\ell} \zeta_j^2 + C\ .$$

Le point crucial est la localisation de P à ξ^o telle que l'enveloppe convexe de $SE(P_{\xi^o})$ n'est pas égale à $SE(P_{\xi^o})$. Cette localisation doit satisfaire la condition suivante :

(*) $$C = 0, \text{ et } \ell \text{ est impair } \geqslant 5 .$$

Et puis, la condition suivante joue un rôle important :

(**) $$P(\xi) \equiv 0 \text{ et grad } P(\xi) \equiv 0 \text{ sur } \{\xi_2 = \ldots = \xi_\ell = 0\} .$$

Ici on divise l'ensemble C_2 en deux comme suit :

$$S_o = \{\xi \in C_2 \,;\, P_\xi \text{ satisfait } (*), \text{ mais } (**) \text{ est violé}\}$$

et

$$S_1 = \{\, \xi \in C_2; \quad \xi \in S_o\}.$$

<u>Proposition 4</u> : Supposons (H), alors on a

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} SE_j(P_\xi) = \begin{cases} \text{c.h. } SE(P_\xi) & \text{pour } \xi \in S_o , \\ SE(P_\xi) & \text{pour } \xi \in C_1 \cup S_1 . \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : Nous donnons une autre représentation des conditions (*) et (**) invariantes par changement de coordonnées. Soit $P(\xi)$ un polynôme de $\xi \in R^n$. On définit l'espace linéaire $L(P) \equiv \{\, \xi \in \dot{R}^n; P(\xi + \zeta) \equiv P(\zeta)$ identiquement pour $\zeta \in R^n\}$. Alors la condition (*) est équivalente à la suivante (*)' :

(*)' $P_{\xi^o}(\zeta)$ est un polynôme homogène d'ordre 2, et $n - \dim L(P) - \dim L(P_{\xi^o})$ est pair $\geqslant 4$.

Et puis, (**) est équivalent à (**)' :

(**)' $$P(\xi) \equiv 0 \quad \text{et grad } P(\xi) \equiv 0 \text{ sur } L(P_{\xi^o}) .$$

§ 3. DEMONSTRATION DU THEOREME 2

Posons

$$K_{s,N} = s^N\{\frac{s^{m-p}}{P(s\xi + \zeta)} - \frac{1}{P_\xi(\zeta)} - \sum_{j=1}^{N-1} Q_j(\zeta)P_\xi(\zeta)^{-j-1}s^{-j}\} ,$$

alors on a, pour $\zeta \in R^n - i\gamma\vartheta$ où $\gamma \geqslant \gamma_o > 0$,

$$\lim_{s\to\infty} K_{s,N} = Q_N(\zeta)P_\xi(\zeta)^{-N-1} ,$$

et, en appliquant le théorème de Seidenberg ,

$$|K_{s,N}| \leqslant C(1+|\zeta|)^d \quad \text{pour } s \geqslant 1 \text{ et } \zeta \in R^n - i\gamma\vartheta,$$

où C et d sont des constantes indépendantes de s et ζ . Donc on a, pour $\varphi \in C_o^\infty(R^n)$ quelconque,

$$\lim_{s\to\infty} \langle s^N\{s^{m-p}e^{-is\langle x,\xi\rangle}E(P) - \sum_{j=0}^{N-1} E_j(P_\xi)s^{-j}\} , \varphi \rangle =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \int_{R^n-i\gamma\vartheta} K_{s,N}(\zeta)\ \hat{\varphi}\ (-\zeta)d\zeta \quad = \langle E_N(P_\xi),\varphi\rangle .$$

Soit $(x^o, \xi^o) \notin WF(E(P))$, alors il existe un voisinage U de x^o et un voisinage ouvert conique Γ de ξ^o tels que, pour $\varphi \in C_o^\infty(U)$ quelconque, $\widehat{E(P)\varphi}$ est rapidement décroissant dans Γ . Donc on peut successivement obtenir $\langle E_j(P_{\xi^o}),\varphi\rangle = 0$ pour tout j. Comme cela montre $x^o \notin SE_j(P_{\xi^o})$, on obtient (5).

§ 4. DEMONSTRATION DU THEOREME 3

Les théorèmes 1 et 2 montrent que, pour obtenir le Théorème 3, il nous suffit de démontrer

$$(\bigcup_{\xi\neq 0} (c.h.SE(P_\xi) - \bigcup_{j=0}^{\infty} SE_j(P_\xi)) \times \{\xi\}) \cap WF_A(E(P)) = \phi .$$

Donc on considère la localisation de P à ξ^o telle que

$$c.h.SE(P_{\xi^o}) - \bigcup_{j=0}^{\infty} SE_j(P_{\xi^o}) \neq \phi .$$

Alors on peut supposer, sans perdre la généralité, que $\xi^o = (1,0,\dots,0)$, $\vartheta = (1,1,0,\dots,0)$, et $P_{\xi^o}(\zeta) = \zeta_2^2 - \sum_{j=3}^{\ell} \zeta_j^2$ où ℓ est impair $\geqslant 5$. De plus, la proposition 4 dit que la condition (**) est aussi vérifiée. Quand on pose $x' = (x_2,\dots,x_n)$, $x'_{(1)} = (x_2,\dots,x_\ell)$ et $x'_{(2)} = (x_{\ell+1},\dots,x_n)$, on obtient

$$\text{(6)} \qquad \text{c.h.}SE(P_{\xi^o}) - \bigcup_{j=o}^{\infty} SE_j(P_{\xi^o}) = \text{c.h.}SE(P_{\xi^o}) - SE(P_{\xi^o})$$

$$= \{x_1 = 0,\ x_2 > (\sum_{j=3}^{\ell} x_j^2)^{1/2},\ x'_{(2)} = 0\} \ .$$

On prend un point x^o quelconque contenu dans l'ensemble (6). Notre but est de démontrer $(x^o,\xi^o) \notin WF_A(E(P))$, c'est-à-dire, qu'il existe un voisinage ouvert U de x^o et un voisinage ouvert conique Γ de ξ^o tels que

$$\text{(7)} \qquad |\widehat{E(P)\ \phi_N}(\xi)| \leqslant C(CN)^N(1 + |\xi|)^{-N} , \qquad \xi \in \Gamma ,$$

où $\{\phi_N\} \in C_o^\infty(U)$ satisfait (3) et $\phi_N(x) \equiv 1$ sur un voisinage ouvert fixé de x^o contenu dans U. Ici on prend $U = \{|x - x^o| < \varepsilon_o\}$ avec $\varepsilon_o > 0$ petit de sorte que $x_2 > (\sum_{j=3}^{\ell} x_j^2)^{1/2}$ pour tout $x \in \bar{U}$. Et puis, on remarque que ε_o devra être plus petit qu'un nombre ε qui sera introduit à (9) dans la suite. Pour obtenir l'estimation (7), on divise la démonstration en trois étapes.

Première étape : Maintenant $P(\zeta)$ s'écrit sous la forme :

$$P(\zeta) = \zeta_1^{m-2}(P_{\xi^o}(\zeta'_{(1)}) - \zeta_1^{-1}R(\zeta)), \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n ,$$

où $\zeta' = (\zeta_2,\dots,\zeta_n)$, $\zeta'_{(1)} = (\zeta_2,\dots,\zeta_\ell)$ et

$$R(\zeta) = R_1(\zeta') + \zeta_1^{-1} R_2(\zeta') + \dots + \zeta_1^{-m+3}R_{m-2}(\zeta').$$

Si $P(\zeta) \neq 0$ et $P_{\xi^o}(\zeta'_{(1)}) \neq 0$, on peut développer $P(\zeta)^{-1}$ en série géométrique finie :

$$\frac{1}{P(\zeta)} = \sum_{j=0}^{N-1} R(\zeta)^j \zeta_1^{2-m-j} P_{\xi^o}(\zeta'_{(1)})^{-j-1} + R(\zeta)^N \zeta_1^{-N} P(\zeta)^{-1} P_{\xi^o}(\zeta'_{(1)})^{-N}$$

$$\equiv A_N(\zeta) + B_N(\zeta) \ .$$

Alors on obtient :

$$F_N(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{R^n - i\gamma\vartheta} A_N(\zeta)\, e^{i<x,\zeta>} d\zeta$$
$$= H(x_1) \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=m+j-2}^{(m-2)(j+1)} x_1^{k-1}\; Q_{j,k}(D_{x'}) \right) E(P_{\xi^o}^{j+1}),$$

où $Q_{j,k}(D_{x'})$ est l'opérateur différentiel d'ordre $(-m+k+2j+2)$ et $H(x_1) = 1$ pour $x_1 > 0$ et $= 0$ pour $x_1 < 0$. Rappelons ici que la condition (**) est satisfaite. Elle est vérifiée si et seulement si tout $R_j(\zeta')$ s'écrit de façon suivante :

$$R_j(\zeta') = \sum_{|\alpha| = 2} r_{j,\alpha}(\zeta')(\zeta'_{(1)})^{\alpha} .$$

Ceci montre que, pour k quelconque,

$$Q_{j,k}(\zeta') = \sum_{|\alpha|=2j} q_{j,k,\alpha}\,(\zeta')(\zeta'_{(1)})^{\alpha} ,$$

d'où, pour tout N ,

$$SF_N = \{x_1 \geqslant 0,\ x_2 = \left(\sum_{j=3}^{\ell} x_j^2\right)^{1/2} ,\ x'_{(2)} = 0\} .$$

Donc on obtient

$$\text{(8)} \qquad E\widehat{(P)\,\phi_N}(\eta) = <B_N(\zeta), \hat{\phi}_N(\eta - \zeta)>_{\zeta} \quad , \qquad \zeta \in R^n - i\gamma\vartheta ,$$

où $<f,g>_{\zeta}$ signifie l'intégrale de f.g par rapport à ζ .

<u>Seconde étape</u> : Pour estimer (8), on change le chemin d'intégration dans $\mathbb{C}^n$ selon l'idée dûe à Atiyah-Bott-Garding ([2] et [3]) et aussi à Andersson [1] . Mais, dans ce cas, on ne peut pas appliquer leur méthode directement. Le but de cette étape est de trouver un bon chemin d'intégration.

Soit $Q(\xi)$ un polynôme homogène hyperbolique par rapport à ϑ . On écrit par $\Gamma(Q,\vartheta)$ un composant de $R^n - \{\xi ; Q(\xi) = 0\}$ contenant ϑ. Il est le cône ouvert connexe.

On construit premièrement un champ de vecteurs de classe C^{∞}

$$\xi'_{(1)} \longrightarrow w(\xi'_{(1)}) \in \Gamma((P_{\xi^o})_{\xi'(1)} , -\vartheta'),\quad \vartheta' = (1,0,\dots,0) \in R^{\ell-1},$$

tel qu'il est homogène de degré 0, et que

(9) $$\langle x'_{(1)}, w\rangle \geqslant \varepsilon > 0 ,$$

$$P_{\xi^o}(\xi'_{(1)} + i(s\, w(\xi'_{(1)}) - (1-s)\gamma \vartheta')) \neq 0$$

pour $x \in \bar{U}$, $s \in [0,1]$ et $\xi'_{(1)} \in S^{\ell-2} = \{\xi'_{(1)} \in R^{\ell-1} ; |\xi'_{(1)}| = 1\}$.

On peut ici supposer que $P_{\xi^o}(w) < 0$ pour $\xi'_{(1)} \in S^{\ell-2}$.

Soient $\Gamma_i = \{\xi \in R^n ;\ \xi_1 > (M+i)|\xi'|\}$ où $\xi' = (\xi_2,\dots,\xi_n)$ et $i = 0,1,2$ et 3 .

Prenons $\Phi_i(\xi) \in C^\infty(\dot{R}^n)$, homogène de degré 0, telles que $S\ \Phi_i \subset \Gamma_{i-1}$ et $\Phi_i(\xi) \equiv 1$ sur Γ_i pour $i = 1,2$ et 3 . Soient $r_1 = 1$ et $r_2 = \max\{3, 2\sup|P_{\xi^o}(w)|^{-1}\} - 1$. Posons

$$\chi(\xi'_{(1)}) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \{|\xi'_{(1)}| \leqslant 1/2\} \\ 0 & \text{dans } \{|\xi'_{(1)}| \geqslant 1\} \end{cases}$$

$$\rho_i(\xi') = \begin{cases} 1 & \text{dans } \{|\xi'| \geqslant r_i + 1\} \\ 0 & \text{dans } \{|\xi'| \geqslant r_i\} \end{cases} \qquad (i = 1 \text{ et } 2)$$

$$\psi_1(\xi) = \chi(\xi'_{(1)})\ \Phi_1(\xi) \quad \text{et}$$

$$\psi_2(\xi) = \chi(\xi'_{(1)})\ \Phi_1(\xi)\ \{\rho_2(1 - \Phi_3) + (1 - \rho_2)\} .$$

Ensuite, on définit des champs de vecteurs $v_i(\xi)$ comme suit :

$$v_o(\xi) = -\gamma\vartheta \ , \quad v_1(\xi) = -\gamma|\xi'_{(1)}|^{\psi_1}\vartheta,$$

$$v_2(\xi) = |\xi'_{(1)}|^{\psi_1}\{\rho_1\ \Phi_2|\xi'|\hat{w}(\xi'_{(1)}) - (1 - \rho_1\ \Phi_2)\gamma\ \} \quad \text{et}$$

$$v_3(\xi) = |\xi'_{(1)}|^{\psi_2}\{\rho_1\Phi_2|\xi'|\hat{w}(\xi'_{(1)}) - (1 - \rho_1\ \Phi_2)\gamma\ \}$$

pour $\xi \in R^n$, où $\hat{w} = (0,w,0) \in R^n$. Si M est suffisamment grand comme il le semble dans la définition de Γ_i, alors on obtient

(10) $$P_{\xi^o}(\xi'_{(1)} + i(sv_j + (1-s)v_{j-1})_{(1)}) \neq 0 \ ,$$

(11) $$P(\xi + i(sv_j + (1-s)v_{j-1})) \neq 0$$

pour tout $\xi'_{(1)} \neq 0$ et j quelconque. Il est évident que $\langle x,v_j\rangle$ est borné inférieurement pour $x \in \bar{U}$. La preuve de (10) et (11) dépend essentiellement de la propriété (**) et l'inégalité suivante : si on écrit

$$\zeta'_{(1)} = \xi'_{(1)} + i(s\,|\xi'|\,w(\xi'_{(1)}) - (1-s)\gamma\vartheta') ,$$

il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|P_{\xi^o}(\zeta'_{(1)})| \geqslant C\,|\zeta'_{(1)}|^2$$

pour $\xi' \in R^{n-1}$, $\xi'_{(1)} \in S^{\ell-2}$ et $s \in [0,1]$.

Nous allons enfin définir des chemins d'intégration. Soit V_j une chaîne donnée par $\zeta = \xi + iv_j(\xi)$ pour $\xi \in R^n$ $(j = 0,1,2$ et $3)$. Quand on remplace V_j par V_{j+1} dans (8), on sait par (10), (11) et le théorème de Stokes que la valeur de (8) reste invariante, c'est-à-dire, que l'on a

$$\widehat{E(P)\phi_N}(\eta) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{V_3 \cap \{|\xi'_{(1)}| \geqslant \varepsilon\}} B_N(\zeta)\,\hat{\phi}_N(\eta-\zeta)d\zeta \tag{12}$$

Voilà la partie principale de la démonstration. Dès maintenant, on suppose que l'intégrale sur V_3 est prise au sens du (12), même si on n'écrit pas la notation de la limite.

<u>Troisième étape</u> : On estime le membre droit de (12). Comme $\langle x,v_3\rangle$ est borné inférieurement, on obtient

$$|\hat{\phi}_N(\eta-\zeta)| \leqslant C(CN)^N(1+|\eta-\zeta|)^{-N}$$

pour $\zeta \in V_3$ et $\eta \in R^n$. Soient Γ un voisinage ouvert conique de ξ^o tel que $\Gamma \setminus \{0\} \subset\subset \Gamma_3$, et V_{Γ_3} la restriction de V_3 sur Γ_3 . Alors on a

$$\widehat{E(P)\phi_N}(\eta) = \int_{V_3} B_N(\zeta)\,\hat{\phi}_N(\eta-\zeta)d\zeta$$

$$= \int_{V_3 - V_{\Gamma_3}} P(\zeta)^{-1}\,\hat{\phi}_N(\eta-\zeta)d\zeta - \int_{V_3 - V_{\Gamma_3}} A_N(\zeta)\hat{\phi}_N(\eta-\zeta)d\zeta$$

$$+ \int_{\Gamma_{V_{\Gamma_3}}} B_N(\zeta)\,\hat{\phi}_N(\eta-\zeta)d\zeta \quad .$$

L'estimation du premier terme est facile, parce qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $|\zeta - \eta| \geq \delta(|\zeta| + |\eta|)$ pour $\zeta \in V_3 - V_{\Gamma_3}$ et $\eta \in \Gamma$. Pour estimer le second terme, on remplace encore le chemin d'intégration par un autre $\tilde{V}_3 - V_{\Gamma_3}$, sans changer le bord $\partial(V_3 - V_{\Gamma_3})$, pour que l'on ait $|\zeta_1| \geq c_1|\zeta|$ et $|P_{\xi^o}(\zeta'_{(1)})| \geq c_2|\zeta'_{(1)}|^2$ sur $\tilde{V}_3 - V_{\Gamma_3}$ avec des constantes $c_i > 0$. C'est possible parce que $x_o \notin SE(P_{\xi^o})$ et que $\varepsilon_o < \varepsilon$. Alors on obtient $|A_N(\zeta)| \leq C^N |\zeta|^{-m}$ sur $\tilde{V}_3 - V_{\Gamma_3}$. Donc on obtient l'estimation du type (7) pour le second terme. Quant au troisième terme, on a sur V_{Γ_3}

$$|B_N(\zeta)| \leq C_N|\zeta'|^N |\zeta_1|^{-N} .$$

Si $|\zeta - \eta| \geq \delta(|\zeta| + |\eta|)$, il n'y a pas de problème. Si $|\zeta - \eta| \leq \delta(|\zeta| + |\eta|)$ il existe alors une constante C telle que $|\eta| \leq C|\zeta_1|$. D'autre part, comme on a $|\zeta - \eta| \geq C'|\zeta'|$ pour $\zeta \in V_{\Gamma_3}$ grand, on peut obtenir l'estimation du type (7) pour le troisième terme, ce qui achève la démonstration du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. G. Andersson : Localization and wave fronts. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972-73, Exposé 25.

[2] M. F. Atiyah, R. Bott and L. Gårding : Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients, I. Acta Math., 124 (1970), p.109-189.

[3] M. F. Atiyah, R. Bott and L. Gårding : II, Acta Math., 131 (1973), p. 145-206.

[4] L. Hörmander : On the singularities of solutions of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), p.329-358.

[5] L. Hörmander : Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), p. 671-703.

[6] M. Tsuji : Propagation of the singularities for hyperbolic equations with constant coefficients, Japanese J. Math. (New Series), 2 (1976), p. 362-410.

[7] M. Tsuji : Singularities of elementary solutions of hyperbolic equations with constant coefficients, à paraître dans "Proceedings on Singularities in the boundary value problems", à Maratea (Italie), 1980.

*
* *
*