L. Boutet de Monvel

Opérateurs à coefficients polynomiaux, espace de Bargmann, et opérateurs de Toeplitz

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 2 bis, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 0 - 1 9 8 1

OPERATEURS A COEFFICIENTS POLYNOMIAUX, ESPACE DE BARGMAN, ET OPERATEURS DE TOEPLITZ

par L. BOUTET DE MONVEL

Exposé n° IIbis

21 Octobre 1980

1. Soit A l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynômes sur $\mathbb{R}^n$. Plus généralement, on peut considérer des opérateurs pseudodifférentiels

$$p(x,D) \sim \Sigma\, p_{m-k}(x,D)$$

où $p_{m-k}(x,\xi)$ est homogène de degré m-k par rapport au couple (x,ξ) : $p_{m-k}(\lambda x,\lambda\xi) = \lambda^{m-k}p_{m-k}(x,\xi)$.

Ces opérateurs forment une algèbre, pour laquelle on dispose d'un calcul symbolique tout à fait analogue à celui des opérateurs pseudo-différentiels : le symbole de $p(x,D)$ est la fonction $p_m(x,\xi)$; le symbole d'un produit est le produit des symboles, le symbole d'un commutateur est le crochet de Poisso

$$\sigma([P,Q]) = \frac{1}{i}\{\sigma(P),\, \sigma(Q)\} = \frac{1}{i}\ \Sigma \frac{\partial\sigma(P)}{\partial\xi_j}\ \frac{\partial\sigma(\theta)}{\partial x_j} - \frac{\partial\sigma(P)}{\partial x_j}\ \frac{\partial\sigma(Q)}{\partial\xi_j}$$

la seule différence est que $[P,Q]$ est de degré deg P + deg Q - 2 et non deg P + deg Q - 1, ce qui correspond au fait que la forme symplectique $\Sigma\, d\xi_j \wedge dx_j$ est homogène de degré 2 par rapport à (x,ξ) (x et ξ sont tous deux de degré 1).

Dans son exposé, D. Robert montre que la théorie spectrale des opérateurs à coefficients polynômes est tout à fait analogue à celle des opérateurs pseudo-différentiels, à condition de diviser les degrés par 2 : par exemple l'oscillateur harmonique $-\Delta + |x|^2$ se comporte comme un opérateur elliptique de degré 1. Le but de cette note est d'expliciter cette analogie.

2. LES TROIS MODELES

a. Opérateurs à coefficients polynômes sur $\mathbb{R}^n$

L'algèbre est l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels à symbole homogène sur $\mathbb{R}^n$, comme ci-dessus. Elle opère que une chaîne d'espaces de Sobolev :

$$B^s = \text{domaine de } (-\Delta + x^2)^s$$

(pour s demi-entier $\geqslant 0$, on a $f \in B^s$ si et seulement si $x^\alpha D^\beta f \in L^2$ pour $|\alpha| + |\beta| \leqslant 2s$).

Etroitement liés à l'oscillateur harmonique, nous avons les opérateurs :

(1) $$z_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i - \frac{\partial}{\partial x_j}) \qquad z_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + \frac{\partial}{\partial x_j})$$

les fonctions de Hermite

(2) $$e_\alpha = (2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} \alpha!)^{-\frac{1}{2}} z^\alpha e^{-\frac{x^2}{2}}$$

qui forment une base orthonormale de $B^o = L^2(\mathbb{R}^n)$.

on a les formules

(3) $$\begin{cases} z_j H_\alpha = (\alpha_j + 1)^{1/2} H_{\alpha+(j)} \\ z_j^* H_\alpha = \alpha_j^{1/2} H_{\alpha-(j)} \end{cases}$$

$$(-\Delta + |x|^2) H_\alpha = (2|\alpha|+n) H_\alpha$$

Nous poserons $A = \Sigma\, z_j z_j^* = \frac{1}{2}(-\Delta + |x|^2 - n)$, de sorte qu'on a $AH_\alpha = |\alpha| H_\alpha$.

b. Espace de Bargman

C'est l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}^n$, de carré sommable contre le poids $e^{-|z|^2}$, muni des opérateurs

z_j = multiplication par z_j (creation)

$z_j^* = \frac{\partial}{\partial z_j}$ (annihilation)

Il y a une base orthonormale "canonique" constituée des monômes :

$$e_\alpha = (\pi^n \alpha!)^{-1/2} z^\alpha$$

Dans cette base, la matrice des opérateurs z_j, z_j^* est la même que plus haut; on a $A = \Sigma\, z_j \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \theta}$. Le modèle est clairement isomorphe au précédent (il n'y a aucune difficulté à définir l'analogue des B^s, mais ceux-ci ne sont pas utilisés habituellement).

c. Opérateurs de Toeplitz

Soit B la boule unité de $\mathbb{C}^n$. On note $\mathcal{O}^s$ l'espace des fonctions sur la sphère $S = \partial B$ qui appartiennent à l'espace de Sobolev $H^s(S)$ et se prolongent en fonctions holomorphes à l'intérieur de B (pour $s < 0$, $\mathcal{O}^s$ désigne l'ensemble des fonctions de $H^s(S)$ annulées par $\bar{\partial}_b$). Dans [1], on a introduit l'algèbre des opérateurs de Toeplitz, qui opère sur la chaîne des $\mathcal{O}^s$. Rappelons qu'ils sont définis comme suit : un opérateur de Toeplitz de degré m est un opérateur $T : \mathcal{O}^s \to \mathcal{O}^{s-m}$ (pour tout s), de la forme

$$f \mapsto P.Q(f) = T_Q(f)$$

où Q est un opérateur pseudo différentiel sur la sphère, et P le projecteur orthogonal sur l'espace de Hardy $\mathcal{O}^o$ (projecteur de Szegö). Ces opérateurs forment une algèbre, qui donne lieu à un calcul symbolique analogue à celui des opérateurs pseudo-différentiels. Dans notre cas, le cône symplectique est le cône $\Sigma \subset T^*S$ formé des multiples positifs de la forme de contact "canonique" de S :

$$\omega = \frac{1}{2i} \Sigma \bar{z}_j dz_j - z_j d\bar{z}_j$$

Le symbole d'un produit est encore le produit des symboles, et le symbole d'un commutateur est $\frac{1}{i} \times$ le crochet de Poisson.

Rappelons encore qu'on peut localiser (ou microlocaliser) les opérateurs de Toeplitz : ceux-ci diminuent le support singulier, donc sont des opérateurs locaux sur les "singularités de fonctions holomorphes" $(\mathcal{O}^s/\mathcal{O}^\infty)$. Lorsqu'on passe au quotient, on obtient un faisceau d'algèbres, localement isomorph au faisceau des opérateurs pseudo-différentiels à n variables réelles. Par suite toutes les constructions microlocales qu'on fait pour les opérateurs pseudo-différentiels peuvent être répétées pour les opérateurs de Toeplitz, et il n'est guère surprenant que les théories spectrales de ces opérateurs soient à peu près identiques (cf. [2]), par exemple : la propagation des singularités, le lien entre le spectre d'un opérateur elliptique et les longueurs des courbes bicaractéristiques fermées, etc...

Ici il y a encore une base orthonormale "canonique" de $\mathcal{O}^o$:

$$e_\alpha = \left(\frac{2\pi^n \alpha!}{(n+|\alpha|-1)!}\right)^{-1/2} z^\alpha \quad .$$

Nous introduisons alors les opérateurs de Toeplitz

$$A = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} = \Sigma z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

de sorte qu'on a $A.e_\alpha = |\alpha| e_\alpha$

$$z_j = (A+n)^{1/2} z_j$$

$$z_j^* = T_{\bar{z}_j} (A+n)^{1/2} = \frac{\partial}{\partial z_j} (A+n)^{-1/2}$$

(z_j désigne l'opérateur de multiplication par z_j, $T_{\bar{z}_j}$ l'opérateur de Toeplitz adjoint; la dernière égalité est un exercice que nous laissons au lecteur).

On constate alors que la table de multiplication est exactement la même que ci-dessus. On a ainsi défini (au moyen de la base des e_α) un isomorphisme des B^s sur les $\mathcal{O}^s$, qui transforme les opérateurs différentiels à coefficients polynômes sur $\mathbb{R}^n$, et plus généralement (par passage à la limite) les opérateurs pseudo-différentiels comme ci-dessus, en les opérateurs de Toeplitz.

Le calcul symbolique est préservé : l'application symplectique $T^*\mathbb{R}^n \to \Sigma$ correspondante est définie par

$$(x,\xi) \quad \mapsto \quad (\frac{x - i\xi}{\| x - i\xi\|}, \lambda\omega) \in \Sigma$$

avec $\omega = \frac{1}{2i}(d' - d'')(z-\bar{z})$ comme ci-dessus, $\lambda = \frac{1}{2}(\| x\|^2 + \|\xi\|^2)$

3. On comprend ainsi les analogies entre la théorie spectrale des opérateurs différentiels à coefficients polynômes et celle des opérateurs pseudo-différentiels, et le rôle que peut jouer l'étude des opérateurs exp itA (A elliptique de degré 1), associés à des transformations canoniques (flot du champ hamiltonien de A). Dans le cas des o.p.d., on a de bonnes représentations intégrales de exp itA; Helffer et Robert montrent qu'il y en a d'analogues dans le cas des opérateurs sur $\mathbb{R}^n$.

Il y a cependant une différence : dans le contexte ci-dessus, l'oscillateur harmonique $-\Delta + x^2$ apparaît comme un opérateur de degré 1, et non 2 et lorsqu'on transporte comme ci-dessus un opérateur différentiel de degré (usuel) m, on obtient un opérateur de Toeplitz de degré $\frac{m}{2}$. L'analogue des o.p.d. "homogènes" en (x,D) sur $\mathbb{R}^n$ est plutôt l'algèbre des o.p.d. p(x,D) ayant un développement asymptotique

$$p(x,\xi) \sim \sum_{j=o}^{\infty} p_{m-j/2}(x,\xi)$$

où $p_{m-j/2}$ est homogène de degré m-j/2 en ξ (les degrés descendent par $\frac{1}{2}$ entiers). Si on veut représenter exp itA comme opérateur intégral de Fourier pour un tel opérateur, il est nécessaire de remplacer la phase usuelle par la somme de deux termes $\varphi_1 + \varphi_{1/2}$ - le premier étant le terme usuel, le deuxième homogène de degré $\frac{1}{2}$. Ceci se retrouve aussi dans le travail de Helffer et Robert.

Observons que l'analogie peut jouer dans les deux sens. Ainsi il est assez aisé d'évaluer le comportement asymptotique des valeurs propres de l'oscillateur quartique $-\Delta + |x|^4$; par transport et transformation canonique, on obtient ainsi des résultats pour des opérateurs pseudo-différentiels qu'il pourrait être plus difficile d'obtenir directement.

4. Terminons par quelques remarques.

Dans le cadre a., le groupe naturel de transformations est le groupe métaplectique.

Dans le cadre c., ce serait plutôt le groupe des transformations conformes de la boule :

$$f \mapsto (c.z + d)^{-n} \quad f\left(\frac{a.z + b}{c.z + d}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(n,1)$$

[le facteur $(c.z+ d)^{-n}$ est là pour que la transformation soit unitaire].

On a donc deux actions "naturelles" de groupes distincts sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

On peut refaire la théorie de façon analogue lorsqu'il y a un groupe fini qui opère. Par exemple, si $P(x,\xi)$ est pair -i.e. commute à l'action du groupe $\mathbb{Z}_2$ ($(x,\xi) \mapsto (-x,-\xi)$), l'opérateur $P(x,D)$ préserve les fonctions paires et les fonctions impaires, et on peut étudier séparément chaque morceau.

Dans le cadre "opérateurs de Toeplitz", cela correspond à un opérateur qui commute à la symétrie $z \longmapsto -z$: on peut passer au quotient, et chaque morceau correspond à un opérateur de Toeplitz sur un fibré holomorphe sur $S/\mathbb{Z}_2$: on est encore complètement ramené au cas d'un opérateur pseudo-différentiel. Ceci se généralise à d'autres actions de groupes -pourvu que le quotient S/G soit encore une variété de contact .

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Boutet de Monvel : Opérateurs de Toeplitz de plusieurs variables complexes. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1978-79, n° 7 .

[2] L. Boutet de Monvel et V. Guillemin : The spectral theory of Toeplitz operators. A paraître. Princeton University Press.

***