Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

L. Tartar

Solutions oscillantes des équations de Carleman

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 12, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A27_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 0 - 1 9 8 1

SOLUTIONS OSCILLANTES DES EQUATIONS DE CARLEMAN

by L. TARTAR

Exposé n° XII

20 Janvier 1981

1. INTRODUCTION

Un des problèmes essentiels concernant les équations aux dérivées partielles non linéaires est de comprendre comment un comportement au niveau macroscopique peut se déduire des équations de comportement au niveau microscopique. Un des buts à atteindre est de comprendre la turbulence hydrodynamique.

D'un point de vue qualitatif il s'agit de savoir comment les "moyennes" de différentes fonctions sont reliées entre elles ; en général il faut rajouter des grandeurs macroscopiques supplémentaires dont l'exemple le plus simple est celui de l'énergie interne d'un gaz (cela illustre le fait que la moyenne du carré d'une fonction est supérieure au carré de la moyenne de cette fonction) ; pour un système d'équations donné (non linéaire évidemment) il n'est pas facile de décrire les bonnes variables supplémentaires à introduire.

A l'approche probabiliste qui parlera de bruits (trop souvent liés à un mouvement brownien) je préfère celle (qui avait peut être été utilisée avan moi) d'essayer de décrire les limites faibles de solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires : si les limites faibles vérifient la même équation il n'est pas besoin de variables supplémentaires, sinon la question se pose de décrire les limites et pour cela de rajouter les variables internes nécessaires.

Pour les problèmes où n'interviennent pas de dérivées l'outil des fonctions généralisées introduites par L.C. Young dans les années 40 suffit. Dans le cas où des dérivées interviennent l'outil actuel est la compacité par compensation que j'ai développé avec F. Murat ; cet outil n'est pas encore assez puissant et une amélioration pourrait venir d'une synthèse de ces idées avec celles des outils microlocaux développés pour les équations aux dérivées partielles linéaires qui, pour le moment, ne sont pas adaptés aux vraies difficultés non linéaires.

Le but de cet exposé est de présenter un phénomène de propagation d'oscillations pour des équations aux dérivées partielles non linéaires qui n'a rien à voir avec la propagation des singularités.

Il est utile de signaler que l'importance pratique du modèle de Carleman considéré ici (au moins en théorie cinétique) est quasiment nulle et qu'il serait important d'étudier les phénomènes analogues sur des modèles plus raisonnables. Une tentative dans cette direction est faite sur le modèle de Broadwell.

2. RAPPELS SUR LES EQUATIONS DE CARLEMAN

Les équations de Carleman décrivent un gaz fictif (il n'y a pas conservation de la quantité de mouvement) où les particules ne peuvent avoir que les vitesses ± 1 (en une seule dimension d'espace) et où 2 particules de même vitesse peuvent "inter agir" et décider d'aller toutes deux dans la direction opposée. Si u et v désignent les densités de particules de vitesse respectives +1 et -1 on obtient le système suivant :

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 - v^2 = 0 \qquad x\in \mathbb{R},\ t\geq 0 \\ &\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} - u^2 + v^2 = 0 \qquad x\in \mathbb{R},\ t\geq 0 \end{aligned}$$

avec les données initiales

$$(2)\qquad \begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \\ v(x,0) &= \psi(x) \quad . \end{aligned}$$

Les équations (1), (2) permettent de définir un semi-groupe (non-linéaire) $S(t)$ dont on connait les propriétés suivantes

R1 : Si $0 \leq \varphi,\psi \leq M_o$ alors la solution $(u,v) = S(t)\,(\varphi,\psi)$ existe sur $t \in [0,+\infty[$ et vérifie $0 \leq u,v \leq M_o$.

R2 : Le semi groupe $S(t)$ est de contraction dans $L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ (il est seulement défini sur les fonctions positives).

R3 : $S(t)$ n'est pas (séquentiellement) continu sur $L^\infty(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R})$ muni de la topologie faible *

R4 : Si $0 \leq \varphi$, ψ avec $\int(\varphi+\psi)\,dx = m$ alors $0 \leq u(x,t)$, $v(x,t) \leq \frac{C(m)}{t}$ pour une certaine fonction $C(m)$.

3. QUESTIONS ET METHODES

La première question, assez naturelle quand on a R1 et R3, est la suivante :

Q1 : Soit $0 \leq \varphi_\varepsilon$, $\psi_\varepsilon \leq M_o$ pour une suite ε (tendant vers 0) alors les solutions $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ vérifient aussi $0 \leq u_\varepsilon, v_\varepsilon \leq M$; si φ_ε et ψ_ε convergent dans L^∞ faible * que peut on dire de $u_\varepsilon, v_\varepsilon$?

La deuxième question est liée à R4 :

Q2 : Soit $0 \leq \varphi,\psi$ avec φ et $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ étudier le comportement à $t = +\infty$ de la solution (u,v).

La troisième question est liée à R3 et concerne l'extension de $S(t)$ à des mesures

Q3 : Si $0 \leq \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ est une suite de $L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ convergeant vaguement vers $(\alpha\delta_o\ ,\ \beta\delta_o)$ que peut on dire des solutions $u_\varepsilon, v_\varepsilon$?

En plus de propriétés élémentaires du système (1),(2) :

(3) Conservation de la masse : $\int_{\mathbb{R}} (u(x,t) + v(x,t))\,dx = \int_{\mathbb{R}} (\varphi(x)+\varphi(x))\,dx$

(4) Invariance de (1) par le changement $(u,v) \to (\lambda u(\lambda x,\lambda t)\ ,\ \lambda v(\lambda x,\lambda t))$

On utilisera le lemme de compacité par compensation suivant :

<u>Lemme</u> : Soit $(w_\varepsilon, z_\varepsilon)$ une suite de $L^\infty(\mathbb{R}^2_+) \times L^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ vérifiant

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \text{ borné dans } L^\infty(\mathbb{R}^2_+) \\ &\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x} \text{ borné dans } L^\infty(\mathbb{R}^2_+) \end{aligned}$$

Alors si w_ε et z_ε convergent dans $L^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ faible * vers w_o et z_o le produit $w_\varepsilon z_\varepsilon$ converge dans $L^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ faible * vers le produit $w_o z_o$.

4. RESULTATS

* Pour répondre à la question 1 on doit remarquer que la connaissance des limites de φ_ε et ψ_ε est insuffisante pour caractériser les limites de u_ε et v_ε ; il faut plus d'information, comme par exemple les limites des puissances φ_ε^m et ψ_ε^m pour tout m (qui, en général ne se déduisent pas les unes des autres). Il est important de remarquer que, pour le modèle considéré, aucune corrélation entre φ_ε et ψ_ε n'intervient.

Théorème 1 : Soit une suite $(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ vérifiant

(6) $$0 \leq \varphi_\varepsilon \ , \ \psi_\varepsilon \leq M_o \quad \text{presque partout}$$

(7) $$\varphi_\varepsilon^m \to \Phi_m \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}) \text{ faible } * \qquad m = 1,2,\ldots$$

$$\psi_\varepsilon^m \to \psi_m \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}) \text{ faible } * \qquad m = 1,2,\ldots$$

alors la suite des solutions $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ vérifie

(8) $$U_\varepsilon^m \to U_m \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}^2_+) \text{ faible } * \qquad m = 1,2,\ldots$$

$$V_\varepsilon^m \to V_m \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}^2_+) \text{ faible } * \qquad m = 1,2,\ldots$$

où la famille $(U_1 \ \ldots, \ V_1, \ldots)$ est la solution unique du système infini

$$\frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{\partial U_m}{\partial x} + m\ U_{m+1} - m\ U_{m-1}\ V_2 = 0 \qquad x \in \mathbb{R} \ , \ t \geq 0$$

(9) $$\frac{\partial V_m}{\partial t} - \frac{\partial V_m}{\partial x} - m\ U_2\ V_{m-1} + m\ V_{m+1} = 0 \qquad x \in \mathbb{R} \ , \ t \geq 0$$

$$0 \leq U_m \ , \ V_m \leq M_o^m$$

vérifiant les conditions aux limites

$$(10) \qquad \begin{aligned} U_m(x,0) &= \Phi_m(x) \\ V_m(x,0) &= \Psi_m(x) \end{aligned}$$

Prenons le cas simple (le cas général n'est pas très différent) où la suite $(\varphi_\varepsilon,\psi_\varepsilon)$ est de la forme (ε tend vers 0)

$$(11) \qquad \begin{aligned} \varphi_\varepsilon(x) &= a(x,\tfrac{x}{\varepsilon}) \\ \psi_\varepsilon(x) &= b(x,\tfrac{x}{\varepsilon}) \end{aligned}$$

où

(12) $0 \le a, b \le M_o$ a et b étant périodiques de période 1 dans la deuxième variable (et régulières)

alors

$$(13) \qquad \begin{aligned} \Phi_m(x) &= \int_o^1 a(x,y)^m \, dy \\ \Psi_m(x) &= \int_o^1 b(x,y)^m \, dy \end{aligned}$$

et la solution du système (9), (10) est très simple :

<u>Corollaire 1</u> : Sous les hypothèses (11), (12) la solution de (9), (10) est donnée par

$$(14) \qquad \begin{aligned} U_m(x,t) &= \int_o^1 A(x,y,t)^m \, dy \\ V_m(x,t) &= \int_o^1 B(x,y,t)^m \, dy \end{aligned}$$

où A, B est la solution unique (qui vérifie $0 \le A, B \le M_o$)

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} + A^2 = \int_o^1 B(x,y,t)^2 \, dy$$

$$(15) \qquad \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial x} + B^2 = \int_o^1 A(x,y,t)^2 \, dy$$

$$A(x,y,0) = a(x,y) \quad , \quad B(x,y,0) = b(x,y) \qquad \blacksquare$$

On voit donc sur (15) que l'effet de la convergence faible se réduit à l'adjonction d'une variable "d'espace" supplémentaire. Si on ne s'intéresse qu'aux limites faibles U_1 et V_1 il suffit, après avoir résolu (15), de supprimer la variable y par une intégration.

Un corollaire important du système (9) est l'inégalité suivante sur les variances :

Corollaire 2 : La variance $\sigma_u(x,t) = U_2(x,t) - U_1^2(x,t)$ vérifie l'inégalité $\frac{\partial}{\partial t}\sigma_u + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_u \le 0$.

De même $\sigma_v = V_2 - V_1^2$ vérifie $\frac{\partial}{\partial t}\sigma_v - \frac{\partial}{\partial x}\sigma_v \le 0$ ■

Une des conséquences importantes est la propagation des oscillations, ou plus précisément la non création d'oscillations.

Corollaire 3 : Si φ_ε converge fortement (dans $L^1(I)$) sur un intervalle I alors U_ε converge fortement sur la bande caractéristique $\{(x,t) : x-t \in I\}$; de même si ψ_ε converge fortement sur I, v_ε converge fortement sur $\{(x,t) : x+t \in I\}$ ■

On voit donc que des oscillations en u ne peuvent pas créer des oscillations en v et réciproquement.

Remarque 1 : On peut, à partir de ces résultats répondre aux questions 2 et 3, R2, R4 ainsi que (3), (4) sont alors utiles. ■

Remarque 2 : Les résultats qui précèdent permettent de trouver la limite faible de toute fonction (continue) de U_ε et v_ε. En effet, puisque d'après le lemme $U_\varepsilon^p v_\varepsilon^q$ converge faiblement vers $U_p V_q$ on connait le résultat pour toute fonction polynôme et donc pour toute fonction continue.

Dans le cas des données (11) on a $F(u_\varepsilon,v_\varepsilon) \rightarrow f$ dans L^∞ faible * où $f(x,t) = \int_0^1\int_0^1 F(A(x,y,t), B(x,z,t))\, dy\, dz$. ■

5. DEMONSTRATIONS

Théorème 1 : D'après R1 et (6) on a $0 \leq u_\varepsilon, v_\varepsilon \leq M_o$.

On peut donc extraire une sous suite telle que, pour $m = 1,2,\ldots)$ u_ε^m converge dans L^∞ faible * vers U_m et v_2^m vers V_m ; le fait que les (U_m,V_m) vérifient (9), (10) qui a une solution unique montrera qu'il n'est pas nécessaire d'extraire une sous suite.

D'après (1) on a

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) U_\varepsilon^m + m\, U_\varepsilon^{m+1} - m\, U_\varepsilon^{m-1} v_\varepsilon^2 = 0 \\ &\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) v_\varepsilon^p - p\, u_\varepsilon^2 v_\varepsilon^{p-1} + p\, v_\varepsilon^{p+1} = 0 \end{aligned}$$

on peut donc appliquer le lemme à $w_\varepsilon = u_\varepsilon^m$, $z_\varepsilon = v_\varepsilon^p$ pour déduire que $u_\varepsilon^m v_\varepsilon^p$ converge dans L^∞ faible * vers $U_m V_p$.

Cela permet alors de passer à la limite dans (20) pour obtenir (9), (10). Pour montrer l'unicité, si $(\overline{U}_m,\overline{V}_m)$ est une autre solution pour les mêmes données initiales on pose

$$(21)\qquad \delta_m(t) = \sup_{\substack{o\leq s\leq t\\ 1\leq p\leq m}} M_o^{m-p} \max\left(\|U_p(.,s)-\overline{U}_p(.,s)\|_{L^\infty}, \|V_p(.,s) - \overline{V}_p(.,s)\|_{L^\infty}\right)$$

Alors $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)(U_m-\overline{U}_m) = f = m(\overline{U}_{m+1}-U_{m+1}) + m\, V_2(\overline{U}_{m-1}-U_{m-1}) + m(V_2-\overline{V}_2)\overline{U}_{m-1}$

et $\|f(.,s)\|_{L^\infty} \leq m\ \delta_{m+1}(s) + m\ M_o^2\ \delta_{m-1}(s) + m\ \delta_2(s)\ M_o^{m-1}$

$\leq 3m\ \delta_{m+1}(s)$

D'où l'estimation $\|U_m(.,t) - \overline{U}_m(.,t)\|_{L^\infty} \leq 3m \int_o^t \delta_{m+1}(s)\ ds$ d'où

$$\delta_m(t) \leq 3m \int_o^t \delta_{m+1}(s)\ ds \tag{22}$$

Mais comme on a $\delta m(t) \leq M_o^m$. (22) donne par récurrence

$$\delta_m(t) \leq 3k \frac{(m+k-i)!}{(m-i)!} \frac{t^k}{k!} M_o^{m+k} \qquad k=0,1,\ldots$$

d'où on déduit $\delta_m(t) = 0$ sur $[0,T]$ pour $T < \frac{1}{3M_o}$ et donc δ_m identiquement nul.

<u>Corollaire 1</u> : Il est facile de voir que (15) a une solution unique vérifiant $0 \leq A,B \leq M_o$. Il suffit de chercher un point fixe de l'application qui à A,B associe $(\overline{A},\overline{B})$ solution du problème découplé

$$\frac{\partial\overline{A}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{A}}{\partial x} + \overline{A}^2 = \int_o^1 B^2\ dy \quad ; \quad A(0) = a$$

$$\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} - \frac{\partial\overline{B}}{\partial x} + \overline{B}^2 = \int_o^1 A^2\ dy \quad ; \quad B(0) = b$$

c'est alors un exercice de vérifier que les U_m définis par (14) vérifient (9) (10).

<u>Corollaire 2</u> :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) U_1 + U_2 - V_2 = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) U_2 + 2\ U_3 - 2\ U_1\ V_2 = 0 \qquad \text{d'après (9)}$$

d'où $$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) (U_2 - U_1^2) + 2(U_3 - U_1 U_2) = 0$$

Mais on a toujours, à cause de $U_\varepsilon \geq 0$, $U_3 \geq U_1 U_2$: en effet en prenant la limite de $U_\varepsilon (U_\varepsilon - U_1)^2$ on obtient $U_3 \geq 2U_1 U_2 - U_1^3 \geq U_1 U_2$. Donc $(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})\ \sigma_u \leq 0$.

Corollaire 3 : Comme σ_u est ≥ 0 et décroissant le long des caractéristiques, s'il est nul initialement sur I cela se propage sur la bande caractéristique. Mais si U_ε converge faiblement vers U_1 et U_ε vers U_1^2 cela implique la convergence forte (dans L^p_{loc} pour tout $p < +\infty$) de U_ε vers U_1 .

6. GENERALISATION ET PROBLEME

Nous allons maintenant considérer un modèle plus réaliste, celui de Broadwell

$$
(23) \qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + uv - w^2 = 0 \qquad && u(x,0) = \varphi(x) \\
&\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} + uv - w^2 = 0 \qquad && v(x,0) = \Psi(x) \\
&\frac{\partial w}{\partial t} - uv + w^2 + 0 \qquad && w(x,0) = \chi(x)
\end{aligned}
$$

Ce modèle est obtenu à partir d'un modèle plan à 4 vitesses, introduit en fait par Maxwell, où les particules ont une vitesse de module 1 parallèle à l'un des axes ; on suppose ensuite que les distributions sont indépendantes de y et que les distributions de particules à vitesse parallèle à y sont égales.

Les propriétés de ce modèle sont très différentes de celle de Carleman. (C'est le cas pour tous les modèles réalistes de théorie cinétique des gaz). On a les propriétés suivantes

R'1 : Si $0 \le \varphi, \psi, \chi \le M_o$ alors la solution $(u,v,w) = S(t)(\varphi,\psi,\chi)$ existe sur $t \in [0,+\infty[$ et vérifie $0 \le u,v,w \le F(t,M_o)$. (La meilleure borne $F(t,M_o)$ n'est pas connue mais de toute façon ce n'est pas M_o). Une borne locale en temps $F(t,M) = M(1-tM)^{-1}$ est claire.

R'3 : $S(t)$ n'est pas (séquentiellement) continu sur $L^\infty(\mathbb{R})^3$ muni de la topologie faible *.

R'4 : Si la norme L^1 des données initiales est petite alors on a $0 \le u,v,w \le k\, M_o$ et le comportement pour t grand est analogue au cas linéaire $u \sim \overline{u}(x-t)$, $v \sim \overline{v}(x+t)$, $w \sim \overline{w}(x)$.

Si on prend une suite de données initiales vérifiant $0 \le \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon, \chi_\varepsilon \le M_o$ on peut extraire une sous suite telle que

$$u_\varepsilon^m\, v_\varepsilon^n\, w_\varepsilon^p \to L_{m,n,p} \quad \text{dans } L^\infty \text{ faible * .}$$

Si on pose $U_m = L_{m,o,o}$; $V_n = L_{o,n,o}$; $W_p = L_{o,o,p}$ on a grâce au lemme $L_{m,n,o} = U_m V_n$; $L_{o,n,p} = V_n W_p$; $L_{m,o,p} = U_m W_p$. Mais en général $L_{m,n,p} \ne U_m V_n W_p$.

Avec les mêmes techniques en écrivant les équations satisfaites par U_ε^m et v_ε^n on obtient

$$(24) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{\partial U_m}{\partial x} + m\, U_m V_1 - m\, U_{m-1} W_2 = 0 \\ &\frac{\partial V_n}{\partial t} - \frac{\partial V_n}{\partial x} + n\, V_n U_1 - n\, V_{n-1} W_2 = 0 \end{aligned}$$

Les données initiales pour U_m et V_n étant données par

$$(25) \qquad \begin{aligned} &U_m(x,o) = \Phi_m(x) \quad \text{où } \Phi_m \text{ est limite de } \varphi_\varepsilon^m \\ &V_n(x,0) = \Psi_n(x) \quad \text{où } \Psi_n \text{ est limite de } \psi_\varepsilon^n \end{aligned}$$

On déduit de (24) les équations sur les variances σ_u et σ_v

(26)
$$\sigma_u = U_2 - U_1^2 \text{ vérifie } \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \sigma_u + \sigma_u V_1 = 0$$
$$\sigma_v = V_2 - V_1^2 \text{ vérifie } \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) \sigma_v + \sigma_v U_1 = 0$$

On voit donc que les oscillations sur u se propagent et ne peuvent pas être créées de même que pour v.

La situation pour w est différente et les oscillations sur u et v peuvent fabriquer des oscillations sur w.

Le système (24) (25) peut être résolu si on connait W_2 puisque, après avoir calculé U_1, V_1, il se découple. On peut arriver plus simplement au résultat (qui donne des expressions compliquées des U_m et V_n) de la manière suivante :

On introduit les fonctions auxilliaires a_ε et $\overline{a}_\varepsilon$ solution de

(27)
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) a_\varepsilon + a_\varepsilon v_\varepsilon = 0$$
$$a_\varepsilon(x,0) = 1$$

(28)
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \overline{a}_\varepsilon + \overline{a}_\varepsilon v_\varepsilon = w_\varepsilon^2$$
$$\overline{a}_\varepsilon(x,0) = 0$$

Pour avoir u_ε donnée par la formule

(29)
$$U_\varepsilon(x,t) = \varphi_\varepsilon(x-t)\, a_\varepsilon(x,t) + \overline{a}_\varepsilon(x,t)$$

On voit ensuite en appliquant les techniques précédentes que

(30)
$$a_\varepsilon \to a \text{ fort}$$
$$\overline{a}_\varepsilon \to \overline{a} \text{ fort}$$

où a et $\bar{a}$ sont solutions de

$$(31)\quad \begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})\, a + a\, V_1 = 0 \\ a(x,0) = 1 \end{cases}$$

$$(32)\quad \begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})\, \bar{a} + \bar{a}\, V_1 = W_2 \\ \bar{a}(x,0) = 0 \end{cases}$$

Alors (29) donne

$$(33)\quad U_\varepsilon(x,t) - \varphi_\varepsilon(x-t)\, a - \bar{a} \to 0 \text{ fort}$$

On fait ensuite de même pour v :

$$(34)\quad \begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x})b + b\, U_1 = 0 \\ b(x,0) = 1 \end{cases}$$

$$(35)\quad \begin{cases} (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x})\bar{b} + \bar{b}\, U_1 = W_2 \\ \bar{b}(x,0) = 0 \end{cases}$$

Et on obtient

$$(36)\quad v_\varepsilon(x,t) - \Psi_\varepsilon(x+t)\, b - \bar{b} \to 0 \text{ fort} .$$

On voit par exemple que (33) implique

$$(37)\quad \begin{aligned} U_1 &= a\, \Phi_1(x-t) + \bar{a} \\ U_2 &= a^2 \Phi_2(x-t) + 2\, a\bar{a}\, \Phi_1(x-t) + \bar{a}^2 \\ U_3 &= a^3 \Phi_3(x-t) + 3a^2\, \bar{a}\, \Phi_2(x-t) + 3a\bar{a}^2\, \Phi_1(x-t) + \bar{a}^3 \quad \text{etc} \ldots \end{aligned}$$

(U_1 et V_1 sont en fait définis par (24) avec m=n=1 puis on calcule $a,\bar{a},b,\bar{b}$ et ensuite on trouve tous les U_m et V_n , tout supposant connu W_2).

On porte (33), (36) dans l'équation donnant w_ε pour obtenir

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} + w_\varepsilon^2 = (a\ \varphi_\varepsilon(x-t) + \bar{a})\ (b\ \psi_\varepsilon(x+t) + \bar{b}) + r_\varepsilon \\ w_\varepsilon(x,0) = \chi_\varepsilon(x) \quad \text{et on a} \quad r_\varepsilon \to 0 \text{ fort} \quad . \end{cases}$$

On voit sur cette équation comment les oscillations de φ_ε et ψ_ε peuvent créer des oscillations sur w_ε même si $\chi_\varepsilon \equiv 0$.
On voit aussi que des corrélations entre les valeurs de $\chi_\varepsilon(x)$ et $\varphi_\varepsilon(x-t)\ \psi_\varepsilon(x+t)$ seront nécessaires pour décrire w_ε .

Le problème est ouvert de savoir si à partir de (33), (36), (38) on peut donner un système d'équations sur les $L_{m,n,p}$ qui les détermine de manière unique.

7. COMMENTAIRES ET BIBLIOGRAPHIE

Le modèle (1) a été introduit par T. Carleman. Malgré son caractère irréaliste il a été souvent considéré, la propriété R1 due à I. Kolodner [5] rendant l'existence globale aisée. La propriété R2 se trouve dans M.G. Crandall [2] (qui attribue l'idée à Liggett) ; elle est d'ailleurs équivalente à la conversation de l'ordre des solutions associée à la conservation de la masse d'après Crandall-Tartar [3]. La propriété R3 est due à Tartar[10] et R4 est due à R. Illner-M. Reed [4]. Le lemme constamment utilisé ici est un cas particulier de la compacité par compensation développée par F. Murat et Tartar. On peut en donner une démonstration directe simple ; pour le cas général voir Tartar [8] [9].

Pour le modèle de Broadwell le résultat R'1 est du à Crandall Tartar (voir Tartar [7]) généralisant un argument de Mimura-Nishida [6] ; les autres résultats se trouvent dans Tartar [10].

Un des problèmes importants est de mettre un coefficient $\frac{1}{\delta}$ devant le terme non linéaire et de faire tendre δ vers O (δ est lié au libre parcours moyen entre deux collisions) ; une solution partielle de ce problème a été obtenue par R. Caflish - G. Papanicolaou [1]. L'étude des oscillations propagées par le système pourraient aider à la solution complète.

Bibliographie

[1] Caflish. R., Papanicolaou G. : the fluid-dynamical limit of a non linear model Botzmann equation. Comm. Pure Appl. Math. Vol. XXXII (1979) p. 589-616.

[2] Crandall. M.G. : Semigroups of nonlinear transformations in Banach spaces, dans Contributions to nonlinear functional analysis Zarantonello ed. Madison 1971. Academic Press p. 157-179.

[3] Crandall M.G. - Tartar L. : Some relations between non expansive and order preserving mappings. Proceedings A.M.S. Vol. 78 n° 3 1980 p. 385-390.

[4] Illner R. - Reed M. : The decay of solutions of the Carleman model à paraître dans Math. Meth in Appl. Sci.

[5] Kolodner I. : On the Carleman's model for the Boltzmann equation and its generalizations. Ann. Math. Pure Appl. 63 (1963) p. 11-32.

[6] Mimura M. - Nishida T. : On the Broadwell's model for a simple discrete velocity gas. Proc. Japan. Acad. 50 (1974) p. 812-817.

[7] Tartar L. : Existence globale pour un système hyperbolique semi-linéaire de la théorie cinétique des gaz. Seminaire Goulaouic-Schwartz. Octobre 1975.

[8] Tartar L. : Homogénéisation et compacité par compensation. Séminaire Goulaouic-Schwartz. Décembre 1978.

[9] Tartar L. : Compensated compactness and applications to partial differential equations dans Nonlinear analysis and mechanics : Heriott Watt symposium, Vol. IV, Knops ed. p. 136-212.

[10] Tartar L. : Some existence theorems for semilinear hyperbolic systems in one space variable. à paraitre Comm. Pure. Appl. Math.