Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Y. Laurent

Deuxième microlocalisation, condition de Lévi pour un système

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 15, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1980-1981

DEUXIEME MICROLACALISATION

CONDITION DE LEVI POUR UN SYSTEME

par Y. LAURENT

Exposé n° XV

17 Février 1981

1. INTRODUCTION.

Dans [6], nous définissions les opérateurs 2-microdifférentiels qui sont aux opérateurs microdifférentiels (= pseudo-différentiels) ce que ceux-ci sont aux opérateurs différentiels.

Nous reprenons ici cette construction en la généralisant à toute sous-variété involutive homogène Λ du fibré cotangent T^*X à une variété analytique complexe X. En outre, le faisceau des opérateurs 2-microdifférentiels, noté $\mathcal{E}^2_\Lambda$, est maintenant défini de manière intrinsèque, i.e. il ne dépend que de Λ et ne dépend plus d'un choix de coordonnées de Λ. Nous définissons également toute une famille $\mathcal{E}^2_\Lambda(r,s)$ de faisceaux analogues à $\mathcal{E}^2_\Lambda$ pour r et s rationnels tels que $1 \leq s \leq r \leq +\infty$.

Les constructions précédentes permettent de définir pour un système d'équations différentielles, la notion de vecteur microcaractéristique de type (r,s). (Si $r = s = 1$, cas où $\mathcal{E}^2_\Lambda(r,s) = \mathcal{E}^2_\Lambda$, ce sont les vecteurs microcaractéristiques de [1] et [5], si $r = \infty$ et $s = 1$ ce sont des vecteurs microcaractéritiques avec condition de Lévi (cf. [8]).)

Pour un opérateur différentiel, nous définissons un polynôme de Newton relatif à une variété involutive Λ et les symboles principaux associés à ce polynôme. Pour un système nous pouvons définir des "pentes critiques" qui, dans le cas d'un opérateur, sont les pentes du polygône de Newton.

Nous résolvons un problème de Cauchy pour les systèmes, ce qui nous donne comme corollaire d'une part la résolution du problème de Cauchy pour les fonctions holomorphes ramifiées et d'autre part un lien entre les pentes critiques d'un système holonôme et les solutions d'un tel système.

2. OPERATEURS MICRODIFFERENTIELS DE CLASSE (r,s).

Soient r et s deux nombres rationnels tels que $1 \leq s \leq r \leq +\infty$, U un ouvert conique de $T^*\mathbb{C}^n$, un opérateur microdifférentiel de classe (r,s) sur U est une série formelle $P = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_j(x,\xi)$ où $P_j(x,\xi)$ est une fonction holomorphe sur U, homogène de degré j en ξ telle que :

$\forall$ K compact de U $\exists$ $C>0$ $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $C_\varepsilon>0$ tel que

(i) $\forall\, j<0 \quad \sup_K |P_j(x,\xi)| \le C^{-j}[(-j)!]^s$

(ii) $(r=s)\quad \forall\, j\ge 0 \quad \sup_K |P_j(x,\xi)| \le C_\varepsilon\, \varepsilon^j \dfrac{1}{(j!)^r}$

(ii') $(s<r)\quad \forall\, j\ge 0 \quad \sup_K |P_j(x,\xi)| \le C^j \dfrac{1}{(j!)^r}$.

Si $r=+\infty$, la condition (ii) est remplacée par $P_j\equiv 0$ si $j\ge j_o$.

Dans un changement de variable les symboles se transforment suivant les formules habituelles (cf. [2]) ce qui permet de définir le faisceau $\mathcal{E}_X(r,s)$ des opérateurs microdifférentiels de classe (r,s) sur une variété analytique complexe X quelconque.

Si $r=s=1$, $\mathcal{E}_X(1,1)$ n'est autre que le faisceau $\mathcal{E}_X^\infty$ des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini de [10] et $\mathcal{E}_X(\infty,1)$ est le faisceau $\mathcal{E}_X$ des opérateurs microdifférentiels d'ordre fini.

3. UN PEU DE GEOMETRIE.

Soit X une variété analytique complexe, T^*X le fibré cotangent à X et Λ une sous-variété involutive (lisse) de T^*X.

$\Lambda\times\Lambda$ est une sous-variété involutive de $T^*(X\times X)$ donc est munie d'un feuilletage canonique. Par ailleurs, l'injection canonique $T^*X \approx T_X^*(X\times X)\to T^*(X\times X)$ définit une injection $\Lambda\to\Lambda\times\Lambda$.

On définit $\tilde{\Lambda}$ comme la réunion des feuilles de $\Lambda\times\Lambda$ qui passent par Λ. C'est une sous-variété lagrangienne lisse de $T^*(X\times X)$ au voisinage de $T_X^*(X\times X)$ et $T_\Lambda^*\tilde{\Lambda}$ est un quotient de $T^*(T^*X)$.

La structure de variété symplectique de T^*X définit un isomorphisme $H : T^*(T^*X)\xrightarrow{\sim} T(T^*X)$ qui induit un isomorphisme $H : T_\Lambda^*\tilde{\Lambda}\to T_\Lambda(T^*X)$.

Dans la première microlocalisation on se plaçait sur T^*X, dans la deuxième on se place sur $T_\Lambda^*\tilde{\Lambda}$.

4. FAISCEAU DES OPERATEURS 2-MICRODIFFERENTIELS. SYMBOLES.

Soient r et s deux nombres rationnels $(1\le s\le r\le+\infty)$, par une méthode cohomologique que nous ne décrirons pas ici (cf. [6], [7]), on peut définir sur $T^{*\sim}_{\Lambda}\Lambda$ un faisceau d'anneaux unitaires, le faisceau des opérateurs 2-microdifférentiels d'ordre infini de classe (r,s), que nous noterons $\mathcal{E}^{2\infty}_{\Lambda}(r,s)$. Ce faisceau est défini de manière canonique et ne dépend que de Λ.

Le faisceau $\mathcal{E}^{2\infty}_{\Lambda}(r,s)$ pour $r = s = 1$ joue un rôle particulier et c'est lui que nous notons $\mathcal{E}^{2\infty}_{\Lambda}$, faisceau des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini.

Si $1 \leq s \leq s' \leq r' \leq r \leq +\infty$, $\mathcal{E}^{2\infty}_{\Lambda}(r,s)$ est un sous-faisceau de $\mathcal{E}^{2\infty}_{\Lambda}(r',s')$.

Si $\pi : T^{*\sim}_{\Lambda}\Lambda \to \Lambda$ est la projection canonique, on a un morphisme injectif de faisceau d'anneaux :

$$\pi^{-1}(\mathcal{E}_X(r,s)_{|\Lambda}) \hookrightarrow \mathcal{E}^{2\infty}_{\Lambda}(r,s) \quad .$$

(De manière analogue si $\pi_o : T^*X \to X$ est la projection canonique on avait un morphisme injectif $\pi_o^{-1}(\mathcal{D}^{\infty}_X) \to \mathcal{E}^{\infty}_X$ où $\mathcal{D}^{\infty}_X$ est le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini à coefficients analytiques.)

Nous n'avons pas donné la définition du faisceau $\mathcal{E}^{2\infty}_{\Lambda}(r,s)$ mais nous pouvons le caractériser de la manière suivante :

Supposons qu'il existe des coordonnées locales (x,y,z) de X dans lesquelles $\Lambda = \{(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) \in T^*X / \xi = 0,\ z = 0\}$. (Si Λ est régulière ou lagrangienne, on peut se ramener à cette situation par une transformation canonique), alors $T^{*\sim}_{\Lambda}\Lambda$ est muni de coordonnées locales $(x,y,\eta,\zeta,x^*,\zeta^*)$ et on a le théorème suivant :

<u>Théorème 4.1</u> : Si U est un ouvert de $T^{*\sim}_{\Lambda}\Lambda$, on a une bijection entre les sections de $\mathcal{E}^{2\infty}_{\Lambda}(r,s)$ sur U et les séries formelles

$$P = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} P_{ij}(x,y,\eta,\zeta,x^*,\zeta^*) \quad ,$$

où P_{ij} est une fonction holomorphe sur U homogène de degré j en (η,ζ,x^*) et de degré j en (η,ζ,x^*) et de degré i en (x^*,ζ^*) avec les majorations suivantes :

$\forall$ K compact de U, $\exists$ $C > 0$, $\forall$ $\varepsilon > 0$, $\exists$ $C_\varepsilon > 0$ tels que (en posant $k = j-i$) :

(i) $\forall\, k < 0$, $\forall\, i < 0$, $\quad \sup_K |P_{i,k+i}| \leq C^{-k-i}((-k)!)^s\,(-i)!$

(ii) $\forall\, k < 0$, $\forall\, i \geq 0$, $\quad \sup_K |P_{i,k+i}| \leq C_\varepsilon^{-k}\,\varepsilon^i((-k)!)^s\,\frac{1}{i!}$

(iii) $(r = s)$, $\forall\, k \geq 0$, $\forall\, i < 0$, $\quad \sup_K |P_{i,k+i}| \leq C_\varepsilon\,\varepsilon^k\,C^{-i}(i)!/(k!)^r$

(iii') $(r>s)$, $\forall\, k\geq 0$, $\forall\, i<0$, $\sup\limits_K |P_{i,k+i}| \leq C^{k-i}(-i)!/(k!)^r$

(iv) $(r=s)$, $\forall\, k\geq 0$, $\forall\, i\geq 0$, $\sup\limits_K |P_{i,k+i}| \leq C_\varepsilon\, \varepsilon^{k+i}\ 1/(k!)^r\ i!$

(iv') $(r>s)$, $\forall\, k\geq 0$, $\forall\, i\geq 0$, $\sup\limits_K |P_{i,k+i}| \leq C_\varepsilon^k\, \varepsilon^i\ 1/(k!)^r\ i!$.

(Si $r=+\infty$, les conditions (iii) et (iv) doivent être remplacées par $\exists\, k_o$, $P_{i,k+i}\equiv 0$ si $k>k_o$).

Proposition 4.2 : Si P et Q sont deux opérateurs de $\mathcal{E}_\Lambda^{2\infty}(r,s)$ de symboles $P=\Sigma\, P_{ij}$ et $Q=\Sigma\, Q_{ij}$, si $R=PQ$ est le produit de P et Q dans l'anneau $\mathcal{E}_\Lambda^{2\infty}(r,s)$ le symbole $R=\Sigma\, R_{ij}$ de R est donné par :

$$R_{\lambda,\mu}(x,y,\eta,\zeta,x^*,\zeta^*) = \sum_{\substack{\lambda=i+k-|\alpha|-|\gamma| \\ \mu=j+\ell-|\alpha|-|\beta|-|\gamma|}} \frac{1}{\alpha!\beta!\gamma!}\, D_{x^*}^\alpha D_\eta^\beta D_\zeta^\gamma P_{ij}\, D_y^\beta D_{\zeta^*}^\gamma Q_{k\ell} \ .$$

L'injection canonique de $\pi^{-1}(\mathcal{E}_X(r,s)_{|\Lambda})$ dans $\mathcal{E}_\Lambda^{2\infty}(r,s)$ se traduit de la manière suivante pour les symboles :

Soit P un opérateur de $\mathcal{E}_X(r,s)_{|\Lambda}$, P a un symbole $P=\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} P_j(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ où P_j est une fonction holomorphe définie au voisinage de Λ, homogène de degré j en (ξ,η,ζ).

P_j se développe de manière unique en série de Taylor sous la forme $P_j(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\ \beta\in\mathbb{N}^q} P_j^{\alpha\beta}(x,y,\eta,\zeta)\, z^\beta\, \xi^\alpha$.

Alors le symbole de l'image de P dans $\mathcal{E}_\Lambda^{2\infty}(r,s)$ est défini par $P=\sum\limits_{i\in\mathbb{N},\, j\in\mathbb{Z}} P_{ij}$ avec $P_{ij}(x,y,\eta,\zeta,x^*,\zeta^*) = \sum\limits_{|\alpha|+|\beta|=i} P_j^{\alpha\beta}(x,y,\eta,\zeta)\, x^{*\alpha}\zeta^{*\beta}$.

5. OPERATEURS D'ORDRE FINI. POLYGONE DE NEWTON D'UN OPERATEUR.

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où

$$\Lambda = \{(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\ /\ \xi=0\ ,\ \ 0=z\} \ .$$

Soit (r,s) un couple de rationnels tels que $1\leq s\leq r\leq +\infty$ et $s<+\infty$.

Définition 5.1 : Soit $(i_o,j_o)\in\mathbb{Z}^2$, $\mathcal{E}_\Lambda^2(r,s)[i_o,j_o]$ est le sous-faisceau $\mathcal{E}_\Lambda^{2\infty}(r,s)$ des opérateurs $P=\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} P_{ij}$ tels que

A) Si $1 \leq s < r \leq +\infty$

$$P_{ij} = 0 \text{ si } \frac{1}{r} i + (j-i) > \frac{1}{r} i_o + (j_o - i_o) \text{ ou } \frac{1}{s} i + (j-i) > \frac{1}{r} i_o + (j_o - i_o) \quad .$$

B) Si $1 \leq s = r < +\infty$

a) $P_{ij} = 0$ si $\frac{1}{s} i + (j-i) > \frac{1}{s} i_o + (j_o - i_o)$

b) $\forall k \in \mathbb{Z} \ \exists \ \lambda(k) \in \mathbb{Z}$ t.q. $P_{ij} \equiv 0$ si $\frac{1}{s} i + j - i = k$ et $i < \lambda(k)$

de plus, pour $k_o = \frac{1}{s} i_o + j_o - i_o$ on a $\lambda(k_o) = i_o$.

$\mathcal{E}^2_\Lambda(r,s) = \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \mathcal{E}^2_\Lambda(r,s)[i,j]$ <u>est le faisceau des opérateurs 2-microdifférentiels de classe</u> (r,s) (d'ordre fini).

Si P est une section de $\mathcal{E}^2_\Lambda(r,s)[i_o,j_o]$ et si P n'est section d'aucun sous-faisceau $\mathcal{E}^2_\Lambda(r,s)[i,j]$ strictement plus petit que $\mathcal{E}^2_\Lambda(r,s)[i_o,j_o]$ (à (r,s) fixé) on pose :

$$\sigma_\Lambda^{(r,s)}(P) = P_{i_o,j_o} \quad .$$

<u>Polygone de Newton</u> :

Si P est un opérateur 2-microdifférentiel de symbole ΣP_{ij}, le polygone de Newton de P, $N_\Lambda(P)$, est l'enveloppe convexe de la réunion des ensembles $\{(i,k) \in \mathbb{Z}^2 / k \leq k_o \ , \ i+k \leq i_o + k_o\}$ pour les couples (i_o,k_o) tels que P_{i_o,i_o+k_o} ne soit pas identiquement nul.

Si P est un opérateur differentiel ou microdifférentiel défini au voisinage de Λ, <u>le polygone de Newton de</u> P <u>le long de</u> Λ est le polygone de Newton de l'image de P dans $\mathcal{E}^{2\infty}_\Lambda$.

<u>Remarque 5.2</u> : Si $X = \mathbb{C}$ et $\Lambda = T^*_{\{0\}}\mathbb{C}$, le polygone de Newton le long de Λ défini ci-dessus pour un opérateur différentiel n'est autre que le polygone de Newton classique d'un opérateur différentiel (Ramis [9]).

<u>Proposition 5.3</u> : Le polygone de Newton est invariant par les transformations canoniques qui conservent Λ, tandis que par ces transformations se comportent comme des fonctions holomorphes sur $\widetilde{T^*_\Lambda\Lambda}$ les éléments du symbole de P pour (i,k) appartenant à la frontière du polygone de Newton de P privée des droites $k =$ constante et $i + k =$ constante.

Considérons maintenant le cas général d'une variété involutive Λ quelconque. On ne peut plus définir le symbole (complet) d'un opérateur 2-microdifférentiel, par contre la proposition 5.3 nous permet de définir dans tous les cas :

→ le polygone de Newton d'un opérateur le long de Λ,

→ les symboles $P_{i,i+k}$ comme des fonctions holomorphes sur $\widetilde{T^*_\Lambda\Lambda}$ pour (i,k) appartenant à la frontière du polygone de Newton de P privée des droites $k = cte$ et $i + k = cte$.

En particulier on peut définir $\sigma_\Lambda^{(r,s)}(P)$ pour tous les rationnels (r,s) tels que $1 \le s \le r \le +\infty$.

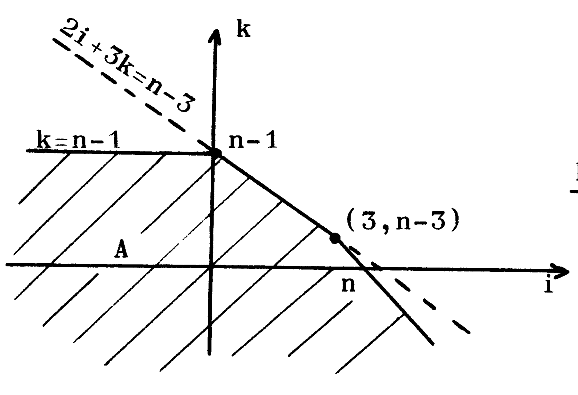
<u>Exemple 5.4</u> : Soit $P = \sum_{j\le n} P_j$ un opérateur différentiel d'ordre n et supposons que le symbole principal P_n de P s'annule exactement à l'ordre 3 sur Λ.

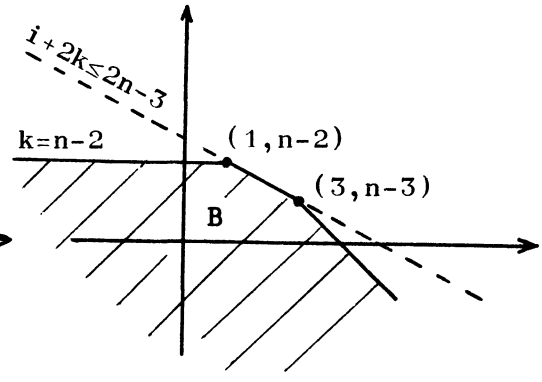
a) Si $\Lambda = \{(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) \in T^*X / \xi = 0,\ z = 0\}$, l'image de P dans $\mathcal{E}^2_\Lambda$ a un symbole $P = \sum P_{ij}$.

Comme P est d'ordre n on a $j \le n$ et d'autre part on a $i \ge 0$ (cf. fin du § 4), enfin P_n s'annule à l'ordre 3 donc $P_{o,n} \equiv P_{1,n} \equiv P_{2,n} \equiv 0$. Le polygone de Newton de P est donc contenu dans
$A = \{(i,k) \in \mathbb{Z}^2 / i+k \le n,\ 2i+3k \le n-3,\ k \le n-1\}$.

Sur le bord de ce polygone on trouve $P_{3,n}$ et $P_{o,n-1}$. Par hypothèse $P_{3,n} \not\equiv 0$. Si $P_{o,n-1} \not\equiv 0$, $N_\Lambda(P)$ est égal à A. Si $P_{o,n-1} \equiv 0$, $N_\Lambda(P)$ est contenu dans $B = \{(i,k) \in \mathbb{Z}^2 / i+k \le n,\ i + 2k \le 2n-3,\ k \le n-2\}$ et lui est égal si $P_{1,n-1} \not\equiv 0$. Dans le cas contraire $N_\Lambda(P)$ est contenu dans $C = \{(i,k) \in \mathbb{Z}^2 / i+k \le n,\ i+3k \le 3n-6,\ k \le n-2\}$ et enfin si $P_{o,n-2} \equiv 0$, $N_\Lambda(P) = \{(i+k) \in \mathbb{Z}^2 / i+k \le n,\ k \le n-3\}$.

Dans ce dernier cas, P_n s'annule à l'ordre 3 exactement sur Λ, P_{n-1} s'annule à l'ordre au moins 2 et P_{n-2} à l'ordre au moins 1, c'est-à-dire que P vérifie <u>la condition de Lévi sur</u> Λ. P vérifie donc la condition de Lévi sur Λ si et seulement si le polygone de Newton de P n'a qu'un sommet, ce qui peut encore se traduire par
$\sigma_\Lambda^{(1,1)}(P) = \sigma_\Lambda^{(\infty,1)}(P)$





b) Dans le cas général d'une variété involutive quelconque on peut toujours définir $P_{o,n-1}$. Si celui-ci est identiquement nul $N_\Lambda(P) \subset B$ et on peut définir $P_{1,n-1}$, puis si celui-ci est nul on peut définir $P_{o,n-2}$ et enfin si $P_{o,n-1} \equiv 0$, $P_{1,n-1} \equiv 0$, $P_{o,n-2} \equiv 0$, $N_\Lambda(P) = \{(i,k) \in \mathbb{Z}^2 / i+k \leq n,\ k \leq n-3\}$ et on dit que P vérifie la condition de Lévi sur Λ.

(Pour calculer $P_{o,n-1}$, $P_{1,n-1}$, etc., on se ramène au cas a) par une transformation canonique).

6. CONDITION DE LEVI.

Si P est un opérateur microdifférentiel, $\sigma_\Lambda^{(1,1)}(P)$, que nous noterons $\sigma_\Lambda(P)$, n'est autre que le symbole qui est noté $\sigma_\Lambda(\sigma(P))$ dans [5] (via l'isomorphisme $H : \overset{*\sim}{T}_\Lambda\Lambda \to T_\Lambda(T^*X)$ du § 3) donc les zéros de $\sigma_\Lambda(P)$ sont les directions microcaractéristiques de P au sens de [1] et [5].

De même les zéros de $\sigma_\Lambda^{(\infty,1)}(P)$ sont les directions "fortement microcaractéristiques" de P au sens de [8].

Le théorème suivant va nous permettre d'étendre ces définitions aux systèmes :

<u>Théorème 6.1</u> : Si U est un ouvert de $\overset{*\sim}{T}_\Lambda\Lambda$, P un opérateur de $\mathcal{E}_\Lambda^2(r,s)$ défini sur U et si $\sigma_\Lambda^{(r,s)}(P)$ ne s'annule pas sur U, P est inversible sur U dans $\mathcal{E}_\Lambda^2(r,s)$.

<u>Définition 6.2</u> : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent défini au voisinage de Λ, la variété microcaractéristique de type (r,s) de $\mathcal{M}$ le long de Λ est le sous-ensemble de $\overset{*\sim}{T}_\Lambda\Lambda$ défini par :

$$Ch_\Lambda^2(r,s)(\mathcal{M}) = \text{support}(\mathcal{E}_\Lambda^2(r,s) \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{E}_X|\Lambda)} \pi^{-1}\mathcal{M})$$

avec $\pi : \overset{*\sim}{T}_\Lambda\Lambda \to \Lambda$.

Si $r = s = 1$, $Ch_\Lambda^2(r,s)(\mathcal{M})$ est la variété microcaractéristique de $\mathcal{M}$ au sens de [5], si $r = \infty$, $s = 1$, $Ch_\Lambda^2(\infty,1)(\mathcal{M})$ est la variété fortement microcaractéristique de $\mathcal{M}$ au sens de [8].

Nous avons vu (exemple 5.4) que pour un opérateur P la condition de Lévi se traduit par $\sigma_\Lambda^{(\infty,1)}(P) = \sigma_\Lambda^{(1,1)}(P)$, pour un système nous dirons (avec [8]) que $\mathcal{M}$ vérifie la condition de Lévi si

$Ch^2_\Lambda(1,1)(\mathcal{M}) = Ch^2_\Lambda(\infty,1)(\mathcal{M})$.

Pour r et s quelconques ($1 \le s \le r \le +\infty$), $Ch^2_\Lambda(r,s)(\mathcal{M})$ caractérise une condition de Lévi partielle, c'est-à-dire en rapport avec des croissances de Gevrey.

Définition 6.3 : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent défini au voisinage de Λ et $x^* \in T^{*\sim}_\Lambda\Lambda$. On définit la suite des pentes critiques de $\mathcal{M}$ le long de Λ au point x^* de la manière suivante :

$s_o = \sup\{s \,/\, x^* \notin Ch^2_\Lambda(s,1)(\mathcal{M})\}$ et par récurrence sur k :

$s_{k+1} = \sup\{s \,/\, x^* \notin Ch^2_\Lambda(s,s_k)(\mathcal{M})\}$.

On définit ainsi une suite croissante finie de rationnels :

$$1 < s_o < s_1 < \dots < s_p < s_{p+1} = +\infty \ .$$

Si $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X / \mathcal{E}_X P$ pour un opérateur P, les pentes critiques de $\mathcal{M}$ sont les valeurs $\frac{-1}{\lambda}$ où λ parcourt la suite des pentes du polygone de Newton de P le long de Λ.

Si $X = \mathbb{C}$, $\Lambda = T^*_{\{0\}}\mathbb{C}$, la suite $s_o,\dots,s_p$ est la suite des "valeurs exceptionnelles de s" de Ramis [9].

Remarquons enfin que si Λ est une variété lagrangienne lisse, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}_X$-module holonôme de variété caractéristique Λ, alors $Ch^2_\Lambda(1,1)(\mathcal{M}) \subset \Lambda$ (Λ identifie à la section nulle de $T^*\Lambda = T^{*\sim}_\Lambda\Lambda$) et $\mathcal{M}$ est à points singuliers réguliers au sens de Kashiwara-Kawai [4] si et seulement si $Ch^2_\Lambda(\infty,1)(\mathcal{M}) \subset \Lambda$.

7. PROBLEME DE CAUCHY DANS LE DOMAINE COMPLEXE.

Définition 7.1 : Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}_X$-modules cohérents, une sous-variété Y de X sera dite non microcaractéristique de type (r,s) pour $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ si :

$$T^*_{(Y\times_X T^*X)}(T^*X) \cap Ch^2_{T^*_X X\times X}(r,s)(\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}) = \{0\} \ .$$

Soient $\rho : (T^*X)\times_X Y \to T^*Y$ et $\overline{\omega} : (T^*X)\times_X Y \to T^*X$ les projections canoniques et $d = \operatorname{codim}_X Y$.

<u>Théorème 7.2</u> : Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}_X$-modules cohérents définis au voisinage de $(T^*X)\times_X Y$ dans T^*X et (r,s) deux rationnels tels que $1 \leq s \leq r \leq +\infty$. Si Y est non microcaractéristique de type (r,s) pour $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ on a des isomorphismes :

$$\overline{\omega}^{-1}\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}(r,s)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{E}_{X\leftarrow Y}) \otimes_{\rho^{-1}\mathcal{E}_Y} (\mathcal{E}_{Y\to X}(r,s)\otimes_{\mathcal{E}_X}\mathcal{N})[d]$$

avec $(r,s) = \mathcal{E}_X(r,s)\otimes_{\mathcal{E}_X}\mathcal{N}$.

Si $x^* \in (T^*X)\times_X Y$ est tel que $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})\cap\rho^{-1}(\rho(x^*))\subset\{x^*\}$ et $\mathrm{Ch}(\mathcal{N})\cap\rho^{-1}(\rho(x^*))\subset\{x^*\}$, l'isomorphisme précédent se réduit à :

$$\forall\ j\geq 0 \qquad \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}(r,s))_{x^*} \simeq \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_Y,\mathcal{N}_Y(r,s))_{\rho(x^*)}$$

où $\mathcal{M}_Y$ et $\mathcal{N}_Y$ désignent les modules traces de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sur Y [10].

Le théorème 7.2 signifie que le problème de Cauchy est bien posé sur Y pour le couple $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}(r,s)$. Il a été démontré dans le cas $r=s=1$ (faisceau $\mathcal{E}^\infty_X$ des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini) par Kashiwara-Schapira [5] ; dans le cas $r=\infty$, $s=1$ (faisceaux $\mathcal{E}_X$ des opérateurs d'ordre fini). T. Monteiro [8] a adapté la démonstration de Kashiwara-Schapira. Notre démonstration est différente, elle repose essentiellement sur la définition 6.2 (qui est reliée aux symboles σ_Λ par le théorème 6.1) et à la platitude de l'anneau $\mathcal{E}^2_\Lambda(r,s)$ sur $\pi^{-1}(\mathcal{E}_{X|\Lambda})$.

Suivant [5], on peut déduire du théorème 7.2 un théorème sur le problème de Cauchy dans les fonctions ramifiées :

Si Z est une hypersurface lisse de X et φ une équation de Z on définit : $\mathcal{O}^1_{[Z|X]} = \mathcal{D}_X\ \mathrm{Log}\ \varphi$.

Si $\lambda\in[1,+\infty]$ est rationnel, on pose $\mathcal{D}_X(\lambda) = \mathcal{E}_X(\lambda,1)_{|T^*_XX}$ et

$\mathcal{O}^1_{Z|X}(\lambda) = \mathcal{D}_X(\lambda)\ \mathrm{Log}\ \varphi$.

$\mathcal{O}^1_{Z|X}(\lambda)$ est le faisceau des fonctions holomorphes ramifiées autour de Z qui s'écrivent $\sum_{j\geq 0} a_j(x)\dfrac{1}{(\varphi(x))^j} + b(x)\ \mathrm{Log}\ \varphi(x)$ avec loca-

localement $|a_j(x)| \leq C^j \dfrac{1}{(j!)^{\lambda-1}}$ pour $\lambda < +\infty$ et $a_j(x)\equiv 0$ si $j\geq j_0$ pour $\lambda = +\infty$.

Si $(Z_i)_{i=1,\ldots,r}$ sont des hypersurfaces de X, on note

$\sum_{i=1}^{r} \mathcal{O}^1_{Z_i|X}(\lambda)$ le conoyau de l'application :

$$\mathcal{O}_X^{r-1} \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{r} \mathcal{O}^1_{Z_i|X}(\lambda)$$

$$(f_1,\ldots,f_{r-1}) \longmapsto (f_1, f_2 - f_1, \ldots, - f_{r-1}) \quad .$$

Théorème 7.3 : Soit Y une sous-variété de X, Z une hypersurface de Y, $(Z_i)_{i=1,\ldots,r}$ des hypersurfaces de X transverses 2 à 2 et transverses à Y telles que $Z_i \cap Y = Z$ pour tout i.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent tel que :

a) $Ch(\mathcal{M}) \cap \rho^{-1}(T^*_Z X) \subset \bigcup_i T^*_{Z_i} X \quad (\rho : (T^*X) \times_X Y \to T^*Y)$

b) Y est non microcaractéristique de type $(\lambda, 1)$ pour $\mathcal{M}$ sur $T^*_{Z_i} X \setminus T^*_X X$ pour $i = 1,\ldots,r$.

Alors pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a des isomorphismes :

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \sum_{i=1}^{r} \mathcal{O}^1_{Z_i|X}(\lambda))|_Z \longrightarrow \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}^1_{Z|Y}(\lambda)) \quad .$$

(Ce théorème a été démontré sous des hypothèses plus restrictives par Hamada-Leray-Wagschall [3].)

Du théorème 7.2 on peut également déduire le théorème suivant qui donne une interprétation analytique des pentes critiques d'un système :

Théorème 7.4 : Soit Λ une sous-variété lagrangienne de T^*X et $\mathcal{N}$ un $\mathcal{E}_X$-module à un générateur, à caractéristiques simples sur Λ. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent et x un point de Λ tel que les pentes critiques de $\mathcal{M}$ le long de Λ en tous les points x^* de $T^*\Lambda \setminus \Lambda$ tels que $\pi(x^*) = x$ soient les mêmes. Soient $1 < s_o < s_1 < \ldots < s_p < s_{p+1} = +\infty$ ces pentes critiques.

Pour tout (r,s), il existe $j \in [0,\ldots,p+1]$ tel que (posant $s_{-1} = 1$) :

$$\forall\, k \geq 0 \qquad \mathcal{E}xt^k_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}(r,s)) = \mathcal{E}xt^k_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}(s_j, s_{j-1})) \quad .$$

Dans le cas où $X = \mathbb{C}$ et $\Lambda = T^*_{\{0\}}\mathbb{C}$ on retrouve un théorème de Ramis [9] qui relie les pentes critiques aux solutions ultradistributions.

***

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. Bony, Extension du théorème de Holmgren. Sém. Goulaouic-Schwartz 1975-76, exposé 17.

[2] L. Boutet de Monvel, Opérateurs pseudo-différentiels analytiques, Univ. Sci. et Méd. Grenoble (75-76).

[3] T. Hamada, J. Leray, C. Wagschal, Problème de Cauchy ramifié, J. Math. Pures et Appl. 55, 297-352 (1976).

[4] M. Kashiwara, T. Kawai, Systems with regular singularities Preprint.

[5] M. Kashiwara, P. Schapira, Problème de Cauchy dans le domaine complexe, Inv. Math. 46, 17-38 (1978).

[6] Y. Laurent, Conférence à Saint-Cast 1979, Publications du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique.

[7] Y. Laurent, Deuxième microlocalisation, Proc. of Les Houches 1979, Lecture Notes in Physics No 126, Springer Verlag ; et thèse en cours de rédaction.

[8] T. Monteiro, Thèse de 3ème cycle à l'Univeristé Paris Nord (1978).

[9] J.P. Ramis, Devissage Gevrey, Astérisque No 59-60 (1978), p. 173-204.

[10] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara, Hyperfunctions and and pseudo-differential equations, Lect. Notes in Math. No 287, p. 265-529, Springer Verlag.