L. Hörmander

Théorie de la diffusion à courte portée pour des opérateurs à caractéristiques simples

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 14, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A15_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 0 - 1 9 8 1

THEORIE DE LA DIFFUSION A COURTE PORTEE POUR DES OPERATEURS A CARACTERISTIQUES SIMPLES

par L. HÖRMANDER

Exposé n° XIV

17 Février 1981

1. INTRODUCTION

Dans un séminaire antérieur G. Ginibre [4] a exposé les méthodes dépendant du temps pour étudier la diffusion pour des perturbations à courte portée de l'opérateur de Laplace. Nous renvoyons à [4] aussi pour des généralités sur la diffusion. Ce séminaire au contraire sera consacré aux méthodes stationnaires qui ont été développées à partir de l'article [5] de Ikebe ; voir en particulier Agmon [1] pour un développement général et précis de ces méthodes. En 1974 Agmon et moi avons réalisé qu'on peut encore améliorer ces techniques en utilisant des espaces que nous avons étudiés en [2]. La théorie de la diffusion à courte portée a été développée dans ces espaces dans des conférences non publiées données à Lund en 1975 et dans le manuscrit d'un livre en préparation. Je vais exposer les résultats ici en soulignant les points techniques qui diffèrent particulièrement des méthodes habituelles.

On commence par un opérateur différentiel $P_0(D)$, $D = -i\partial/\partial x$, à coefficients constants et réels dans $\mathbb{R}^n$. Il définit un opérateur H_0 auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ diagonalisé par la transformation de Fourier F,

$$H_0 = F^{-1} \dot{P}_0 F \ , \ Fu(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)\, dx \ ,$$

où $\dot{P}_0$ est l'opérateur de multiplication par P_0, défini quand le produit est encore dans L^2. Donc les projecteurs spectraux de $\dot{P}_0$ sont les multiplications par les fonctions caractéristiques des ensembles $\{\xi; P_0(\xi) < \lambda\}$; en particulier le spectre est absolument continu (sauf dans le cas trivial où P_0 est constant).

Le but de la théorie de la diffusion est d'étudier comment la mesure spectrale change si H_0 est remplacé par un opérateur H qui est voisin de H_0 à l'infini. La base des méthodes stationnaires est que la résolvante

$$R(z) = (H - z)^{-1} = \int (\lambda - z)^{-1}\, dE_\lambda$$

détermine dE_λ formellement,

$$dE_\lambda = (2\pi i)^{-1}\, (R(\lambda + i0) - R(\lambda - i0)) .$$

Il est donc naturel d'étudier le comportement de $R(\lambda)$ sur l'axe réel. Si $H = H_0$ et λ n'est pas une valeur critique de P_0, c'est-à-dire, $dP_0 \neq 0$ sur $M_\lambda = \{\xi \,; P_0(\xi) = \lambda\}$, alors $(R(\lambda + i0) - R(\lambda - i0))/2\pi i$ est la convolution par $F^{-1}\delta(P_0 - \lambda)$; ici $\delta(P_0 - \lambda) = dS/|P_0'|$ où dS est la mesure de surface euclidienne sur M_λ et $P_0' = (\partial P_0/\partial\xi_1, \ldots, \partial P_0/\partial\xi_n)$.

Pour une mesure $d\mu = v(\xi')\,d\xi'$ sur une surface $\xi_n = f(\xi')$, $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, on a

$$F^{-1}\,d\mu = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x', \xi'\rangle + ix_n f(\xi')} v(\xi')\,d\xi',$$

donc

$$\int |F^{-1}\,d\mu|^2\,dx' = (2\pi)^{-n-1} \int |v(\xi')|^2\,d\xi',$$

ce qui entraîne l'estimation

$$\int_{|x|<R} |F^{-1}\,d\mu|^2\,dx \leqq C R,\ R > 0.$$

L'idée de [2] est de faire jouer un rôle central à de telles fonctions.

2. LES ESPACES B ET B*

Notons B l'espace des $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ avec

$$(2.1)\qquad \|v\|_B = \sum_1^\infty \Big(R_j \int_{X_j} |v|^2\,dx\Big)^{1/2} < \infty,$$

$$(2.2)\qquad R_0 = 0,\ R_j = 2^{j-1} \text{ si } j > 0,\ X_j = \{x;\, R_{j-1} < |x| < R_j\}.$$

B est un espace de Banach, C_0^∞ y est dense, et le dual B^* est l'espace des $u \in L^2_{loc}$ avec

$$(2.3)\qquad \|u\|_{B^*} = \sup_{j>0} \Big(R_j^{-1} \int_{X_j} |u|^2\,dx\Big)^{1/2} < \infty.$$

On voit facilement que

$$\|u\|^2_{B^*} \leqslant \sup_{R>1} \int_{|x|<R} |u|^2\, dx/R \leqslant 4\|u\|^2_{B^*} \; ;$$

donc la transformée de Fourier d'une mesure sur une hypersurface C^1 de densité dans L^2 à support compact, est toujours dans B^*. De plus, si $d\mu = f\, dS$ on a

$$\lim_{R\to\infty} R^{-1} \int_{|x|<R} |F^{-1}\, d\mu|^2\, dx = 2(2\pi)^{-n-1} \int |f|^2\, dS \; .$$

Voici une conséquence immédiate :

Théorème 2.1: Soit M une hypersurface C^1 et K un compact dans M. Alors la restriction

$$\mathcal{S} \ni v \to \hat{v}_{|K} \in L^2_K(dS)$$

se prolonge en une application continue surjective de B sur $L^2_K(dS)$.

Remarquons que $\hat{B} \subset H_{(s)}$ si et seulement si $s < 1/2$ et que $H_{(s)} \subset \hat{B}$ si et seulement si $1/2 < s$. Les fonctions dans B sont des fonctions L^1 de x_1 a valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, et B, qui est d'ailleurs la transformée de Fourier d'un espace de Besov, est un espace d'interpolation entre L^2_{-1} et L^2_1 où L^2_s a la norme

$$\left(\int |u|^2 (1+|x|^2)^s\, dx\right)^{1/2} .$$

Ces faits sont à la base des démonstrations d'inégalités dans la norme de B. En particulier, on peut localiser et changer les variables dans $\hat{B}$.

Pour des raisons techniques il faut généraliser l'espace B de la manière suivante, ce qui est probablement un point nouveau. Soit c_j une suite de nombres positifs telle que

$$c_j/M \leqslant c_{j+1} \leqslant Mc_j,\; j = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

avec M fixe. Alors on définit B_c comme l'espace des $v \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ avec

$$(2.1)' \qquad \|v\|_{B_c} = \sum_1^\infty c_j \left(\int_{X_j} |v|^2\, dx\right)^{1/2} < \infty ,$$

et on a

$$(2.2)' \qquad \|u\|_{B_c^*} = \sup_{j>0} c_j^{-1} \left(\int_{X_j} |u|^2\, dx\right)^{1/2} < \infty .$$

Donc B et B^* correspondent à $c_j = R_j^{1/2}$. Si $2^N > M$ alors B_c est encore un espace d'interpolation entre L^2_N et L^2_{-N} d'une manière uniforme quand M est fixe.

3.. LA RESOLVANTE DE H_0.

Supposons désormais que P_0 dépend vraiment de toutes les variables; ou ce qui est équivalent

$$\tilde{P}_0(\xi) \overset{\text{def}}{=} \Sigma \left|P_0^{(\alpha)}(\xi)\right| \to \infty \text{ si } \xi \to \infty \text{ dans } \mathbb{R}^n .$$

Ici $P_0^{(\alpha)} = \partial^\alpha P_0/\partial\xi^\alpha$. L'ensemble des valeurs critiques

$$Z(P_0) = \{\lambda ; \exists\, \xi \in \mathbb{R}^n , \lambda = P_0(\xi) \text{ et } dP_0(\xi) = 0\}$$

est toujours fini. Si $\lambda \notin Z(P_0)$ alors

$$M_\lambda = \{\xi ; P_0(\xi) = \lambda\}$$

est une hypersurface C^∞. On veut qu'elle se comporte bien aussi à l'infini en ce sens que les limites des polynômes

$$\xi \to P_0(\xi+\eta)/\tilde{P}_0(\eta)$$

quand $\eta \to \infty$ dans $\mathbb{R}^n$ n'ont pas la valeur critique $0 = \lim \lambda/\tilde{P}_0(\eta)$. Ceci est équivalent à la condition suivante :

<u>Définition 3.1</u> : Nous disons que P_0 est simplement caractéristique si

(3.1) $$\tilde{P}_0(\xi) \leqslant C\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant 1} |P_0^{(\alpha)}(\xi)| + 1\Big), \quad \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Tout opérateur hypoelliptique ou de type principal possède cette propriété que l'on suppose toujours par la suite.

Quand $\operatorname{Im} z \neq 0$ la résolvante de H_0

$$R_0(z) = (P_0(D) - zI)^{-1}$$

est donnée par

$$R_0(z)f = F^{-1}((P_0(.) - z)^{-1}\hat{f}), \quad f \in L^2 .$$

Si $\hat{f} \in C_0^\infty$ la limite existe quand z approche un point réel $\lambda \notin Z(P_0)$ en restant dans le demi-plan supérieur $\mathbb{C}^+$ ou inférieur $\mathbb{C}^-$, et définit $R_0(z)f$ pour $z \in \mathbb{C}^\pm \setminus Z(P_0)$ avec deux valeurs en général différentes sur l'axe réel,

(3.2) $$R_0(\lambda + i0)f - R_0(\lambda - i0)f = F^{-1}(2\pi i \delta(P_0 - \lambda)\hat{f}), \hat{f} \in C_0^\infty .$$

Les distributions $t \to (t \pm i0)^{-1}$ étant homogènes de degré -1 comme la mesure de Dirac δ c'est naturel d'attendre que $R_0(\lambda \pm i0)$ soit une application continue de B dans B^*, et c'est en effet vrai :

<u>Théorème 3.2</u> : Si K est un ensemble compact dans $\mathbb{C}^\pm \setminus Z(P_0)$, alors

(3.3) $$\sum_\alpha \| P^{(\alpha)}(D) R_0(z) f \|_{B^*} \leqslant C \|f\|_B , \hat{f} \in C_0^\infty , z \in K.$$

Démonstration : Par localisation et changement de variables on ramène (3.3) à l'inégalité

$$\|F^{-1}(\xi_1 - z)^{-1} f\|_{B^*} \leqslant C \|f\|_{B'}$$

c'est-à-dire

$$|\int g(y_1 - x_1)\, f(x_1,x')\, \overline{f_1(y_1,x')}\, dx_1 dy_1 dx'| \leqslant C \|f\|_B \|f_1\|_{B'}$$

où $\hat{g}(\xi_1) = 1/(\xi_1 - z)$. Comme $|g| \leqslant 1$ et $\|f\|_B$ majore la norme de f comme fonction L^1 de x_1 à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, cette inégalité est évidente.

Pour les détails de la démonstration de ce théorème et des autres dans ce paragraphe, excepté le Théorème 3.6, nous renvoyons à [2].

Avec

$$B^*_{P_0} = \{u;\ P_0^{(\alpha)}(D)u \in B^*,\ \forall\ \alpha\},\ \|u\|_{B^*_{P_0}} = \sum_\alpha \|P^{(\alpha)}(D)u\|_{B^*}$$

on peut donc maintenant prolonger $R_0(z)$ en une application continue $B \to B^*_{P_0}$; si $f \in B$ la fonction $z \to R_0(z)f \in B^*_{P_0}$ est continue dans $\mathbb{C}^{\pm} \setminus Z(P_0)$ pour la topologie faible.

On a aussi un résultat étroitement lié pour l'équation homogène :

Théorème 3.3 : Si $u \in B^*$, $\lambda \in K \subset\subset \mathbb{R} \setminus Z(P_0)$ et $(P_0(D) - \lambda)u = 0$, alors $\hat{u} = v\, dS$ où dS est la mesure de surface sur M_λ et

$$(3.4)\qquad C_K^{-1} \|u\|^2_{B^*} \leqslant \int_{M_\lambda} |v|^2\, dS \leqslant C_K \|u\|^2_{B^*} .$$

Par dualité

$$\int_{M_\lambda} |\hat{f}|^2\, dS \leqslant C_K \|f\|^2_B \quad , f \in B.$$

Pour chaque $f \in B$ nous connaissons deux solutions de l'équation $(P_0(D) - \lambda)u = f$, à savoir $u = R(\lambda \pm i0)f$, qui diffèrent par $F^{-1}(2\pi i \delta(P_0 - \lambda)\hat{f})$.

<u>Définition 3.4</u> : Une fonction $u \in B^*$ est appelée λ sortante (λ entrante) si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus Z(P_0)$, $(P_0(D) - \lambda)u = f \in B$ et $u = R(\lambda + i0)f$ (resp. $u = R(\lambda - i0)f$).

<u>Théorème 3.5</u> : Si $u \in B^*$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus Z(P_0)$ et $(P_0(D) - \lambda)u = f \in B$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\displaystyle\int_{|x|<R} |u|^2 \, dx/R \to 0, \ R \to \infty$,

b) $\displaystyle\int_{|x|<R} |P_0^{(\alpha)}(D)u|^2 \, dx/R \to 0, \ R \to \infty, \ \forall \alpha$,

c) u est entrante <u>et</u> sortante, donc $\hat{f} = 0$ sur M_λ.

Dans ce cas et ce cas seulement on peut démontrer que u est à peu près aussi petit que $|x| f(x)$ à l'infini :

<u>Théorème 3.6</u> : Soit $\lambda \in K \subset\subset \mathbb{R} \setminus Z(P_0)$ et soit c_j une suite avec

$$2^{1/2} \leq c_{j+1}/c_j \leq M$$

avec M fixe. Alors si $f \in B_c$ et $\hat{f} = 0$ sur M_λ, on a

$$\Sigma \, \|P_0^{(\alpha)}(D) R(\lambda \pm i0) f\|_{B^*_{c'}} \leq C \, \|f\|_{B_c} . \tag{3.5}$$

Ici $c'_j = R_j / C_j$.

Démonstration : On ramène la démonstration à celle de l'inégalité

$$|(F^{-1}(\xi_1 \pm i0)^{-1}\hat{f}, f_1)| \leqslant C \, \|f\|_{B_C} \|f_1\|_{B_C},$$

où $\hat{f}(\xi) = 0$ quand $\xi_1 = 0$. Alors

$$F^{-1}(\xi_1 \pm i0)\hat{f} = -i \int_0^\infty f(x_1 + t, x')\, dt = i \int_0^\infty f(x_1 - t, x')\, dt$$

et on utilise la première formule pour $x_1 > 0$ et la seconde pour $x_1 < 0$. Alors les valeurs de f dans X_k n'ont aucune influence dans X_j pour $j > k$, et comme c_k croît au moins aussi vite que dans le Théorème 3.2 la démonstration de ce théorème reste valable avec peu de modifications.

Finalement nous avons besoin du résultat suivant :

Théorème 3.7 : Si $u \in B^*$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus Z(P_0)$ et $(P_0(D) - \lambda)u = f \in B$, alors

$$u = R_0(\lambda \mp i0)f + u_\pm \, , \; \hat{u}_\pm = v_\pm \, dS \, ,$$

$$\int_{M_\lambda} (|v_+|^2 - |v_-|^2) \, |P_0'| \, dS = 2(2\pi)^{n+1} \, \mathrm{Im}(u,f).$$

Nous avons $u \in B^*_{P_0}$ si et seulement si $|P_0'| \, v_\pm \in L^2(M_\lambda, dS)$.

Corollaire 3.8 : Si (u,f) est réel, alors u est λ entrante si et seulement si u est λ sortante.

4. PERTURBATIONS A COURTE PORTEE

Considérons maintenant, d'abord formellement, une perturbation

$$P = P_0(D) + V(x,D)$$

où V est un opérateur différentiel. Comme

$$P - z = P_0(D) - z + V$$

la multiplication par les résolvantes $R(z)$ et $R_0(z)$ de P et de P_0 doit donner

(4.1) $R_0(z) = R(z) + R_0(z)VR(z) = R(z) + R(z)VR_0(z)$ (l'équation résolvante).

Donc on doit avoir

(4.1)' $$R(z) = R_0(z)\ (I + VR_0(z))^{-1} .$$

Pour donner un sens à cela - et à l'opérateur P lui-même - nous faisons l'hypothèse suivante :

<u>Définition 4.1</u> : Un opérateur $V(x,D)$ différentiel à coefficients dans L^2_{loc} sera dit de courte portée si

$$\{V(x,D)u\ ;\ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\ ,\quad \|u\|_{B^*_{P_0}} \leq 1\ \}$$

est précompact dans B.

Cette condition est vérifiée par exemple si $V = V(x)$ est d'ordre 0 et

$$\Sigma\, R_j \sup_{X_j} |V(x)| < \infty \ ,$$

c'est-à-dire si V décroît un peu plus vite que $1/|x|$. En effet

$$\|Vu\|_{B_c} = \Sigma\, c_j \|Vu\|_{L^2(X_j)} \leq \|u\|_{B^*} \Sigma\, R_j^{1/2}\, c_j \sup_{X_j} |V(x)|$$

où la somme converge si $c_j/R_j^{1/2} \to \infty$ suffisamment lentement. Ceci joint à la compacité assez évidente de l'opérateur $V : B^*_{P_0} \to L^2_{loc}$ démontre que V est aussi compact à valeurs dans B.

Nous étendrons V par continuité en un opérateur compact $B^*_{P_0} \to B$, noté aussi V. Alors nous avons

<u>Lemme 4.2</u> : Si $u_\nu \in B^*_{P_0}$ est une suite bornée et $u_\nu \to u$ dans $\mathcal{D}'$, alors $u \in B^*_{P_0}$ et

$$\|Vu_\nu - Vu\|_B \to 0 .$$

Supposons maintenant que V est aussi symétrique

$$(Vf,g) = (f,Vg) \; ; \; f,g \in \mathcal{S} . \tag{4.2}$$

Cette condition s'étend tout de suite à $f, g \in B^*_{P_0}$. Comme la compacité donne facilement

$$\| VR_0(it) \|_{L(B,B)} \to 0 \text{ quand } t \to \pm\infty$$

on conclut par une variante d'un argument bien connu de Kato que l'opérateur symétrique $P = P_0 + V$ avec domaine $\mathcal{S}$ est essentiellement autoadjoint. La fermeture sera appelée H. Par la méthode de Cook on obtient maintenant (voir aussi [4]) :

<u>Théorème 4.3</u> : Les opérateurs d'onde $W_\pm$

$$W_\pm u = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} u, \; u \in L^2(\mathbb{R}^n) ,$$

existent, ils sont isométriques et ils entrelacent H et H_0,

$$e^{isH} W_\pm = W_\pm e^{isH_0} , \; s \in \mathbb{R} .$$

Par conséquent H est la somme directe d'un opérateur unitairement équivalent à H_0 dans $W_\pm L^2$ et d'un opérateur autoadjoint dans l'espace orthogonal. Nous allons montrer que cet espace orthogonal est engendré par les fonctions propres de H; les valeurs propres étant discrètes dans $\mathbb{R} \setminus Z(P_0)$. En particulier, $W_+L^2 = W_-L^2$ et <u>l'opérateur de diffusion</u>

$$S = W_+^* W_- = W_+^{-1} W_-$$

est unitaire.

5. LES VALEURS AUX LIMITES DE R(z) ET LE SPECTRE PONCTUEL.

Du Lemme 4.2 on déduit immédiatement que la fonction

$$\mathbb{C}^{\pm} \setminus Z(P_0) \ni z \rightarrow VR_0(z)f \in B \tag{5.1}$$

est continue pour chaque $f \in B$ et que

$$\{VR_0(z)f \; ; \; \|f\|_B \leqslant 1 \, , \; z \in K\} \, ,$$

est précompact dans B si $K \subset \mathbb{C}^{\pm} \setminus Z(P_0)$ est compact. Pour déduire de (4,1), qui a maintenant un sens si $\operatorname{Im} z \neq 0$, que R(z) a une limite quand $z \rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \setminus Z(P_0)$ il faut savoir si par exemple l'équation

$$f + VR_0(\lambda + i0)f = 0$$

a une solution $f \in B$ non nulle. Si $R_0(\lambda+i0)f = u$ nous avons $u \in B^*_{P_0}$, $(P_0(D) - \lambda)u = f = -Vu$, donc

$$(P_0(D) - \lambda + V)u = 0. \tag{5.2}$$

Par définition même u est sortante mais comme (Vu,u) est réel on peut conclure du Corollaire 3.8 que u est aussi entrante.

<u>Théorème 5.1</u> : Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus Z(P_0)$ et $u \in B^*_{P_0}$ est une solution sortante et entrante de (5.2), alors u est rapidement décroissante

$$\int (1+|x|^2)^N |P_0^{(\alpha)}(D)u|^2 \, dx < \infty \, , \; \forall \, N, \alpha \, . \tag{5.3}$$

L'ensemble Λ des $\lambda \in \mathbb{R} \setminus Z(P_0)$ tels que (5.2) a une solution $\neq 0$ satisfaisante à (5.3) est discret dans $\mathbb{R} \setminus Z(P_0)$ et l'espace de telles solutions de (5.2) est de dimension finie si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus Z(P_0)$.

<u>Démonstration</u> : La suite $c_j = R_j^{1/2} (R_j / (1 + \varepsilon R_j))^{N-1}$ est équivalente à $R_j^{1/2}$

pour chaque $\varepsilon > 0$, et

$$2^{1/2} \leqslant c_{j+1}/c_j \leqslant 2^{N-1/2} .$$

Donc il s'ensuit du théorème 3.6 que

$$U_\varepsilon = \Sigma \, \| P_0^{(\alpha)}(D)u \|_{B^*_{c'}} \leqslant C \, \| (P_0 - \lambda)u \|_{B_c} = C \, \| Vu \|_{B_c} ,$$

où $c'_j = R_j/c_j$. Les hypothèses sur V montrent que

$$C \| Vu \|_{B_c} \leqslant U_\varepsilon/2 + C' \, (\sum_\alpha \int_K |P^{(\alpha)}(D)u|^2 \, dx)^{1/2}$$

où C' et le compact K ne dépendent pas de ε. Nous obtenons alors

$$U_\varepsilon \leqslant 2C' (\sum_\alpha \int_K |P^{(\alpha)}(D)u|^2 dx)^{1/2}.$$

Quand $\varepsilon \to 0$ on obtient (5.3).

J'ai insisté un peu sur les détails de cette démonstration parce que l'utilisation des espaces B_c ici semble nouvelle et améliore un argument de "bootstrap" dans Agmon [1] qui demande une décroissance un peu plus rapide de V. De la théorie de Fredholm standard on obtient maintenant

Théorème 5.2 : La fonction

$$\mathbb{C}^\pm \setminus (Z(P_0) \cup \Lambda) \ni z \to (I + VR_0(z))^{-1} f \in B$$

est continue pour chaque $f \in B$.

Théorème 5.3 : Soient $\lambda \in \mathbb{R} \setminus Z(P_0)$ et $f_1, \ldots, f_r$ une base de solutions dans B de l'équation $(I+VR_0(\lambda+i0))f = 0$. Alors

$$u_j = R_0(\lambda+i0) f_j$$

satisfont a (5.3) et forment une base des solutions dans L^2 de l'équation $(H-\lambda)u = 0$. De plus, l'équation

$$(I + VR_0(\lambda+i0))f = g \in B$$

a une solution $f \in B$ si et seulement si

$$(g, u_j) = 0,\ j = 1,\dots,r .$$

<u>Corollaire 5.4</u> : Le spectre ponctuel de H dans $\mathbb{R} \setminus Z(P_0)$ est discret, égal à Λ, et de multiplicité finie. Les fonctions propres satisfont à (5.3).

---

6. <u>LES TRANSFORMEES DE FOURIER DISTORDUES ET LE SPECTRE CONTINU.</u>

Les propriétés de la résolvante démontrées au paragraphe précédent permettent de déterminer le spectre continu par des méthodes qui remontent à Ikebe [5]. Notons d'abord que si dE_λ est la mesure spectrale de H, alors

$$\int \chi(\lambda)(dE_\lambda f,f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon/\pi \int \|(H-\lambda\mp i\varepsilon)f\|^2 \chi(\lambda)\, d\lambda, f \in L^2, \chi \in C_0(\mathbb{R}) .$$

Si $\chi \in C_0(\mathbb{R}\setminus\Lambda')$, $\Lambda' = \Lambda \cup Z(P_0)$, et si $f \in B$ on peut calculer la limite. Il existe des fonctions mesurables $F_\pm f$ dans $\mathbb{R}^n$ telles que si $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\Lambda'$

$$F_\pm f(\xi) = F(I+VR_0(\lambda\pm i0))^{-1} f(\xi) \tag{6.1}$$

pour presque tout $\xi \in M_\lambda$, par rapport à la mesure de surface, et

$$\int \chi(\lambda)(dE_\lambda f, f) = (2\pi)^{-n} \int \chi(P_0(\xi))\,|F_\pm f(\xi)|^2\, d\xi . \tag{6.2}$$

Posons maintenant

$$E^d = \int_{\Lambda'} dE_\lambda\ ,\quad E^c = \int_{\mathbb{R}\setminus\Lambda'} dE_\lambda .$$

Alors $E^d L^2$ a une base de fonctions propres de H parce que Λ' est dénombrable, tandis que le spectre de la restriction de H à $E^c L^2$ est continu (corollaire 5.4).

Laissant $\chi \to 1$ dans (6.2) nous obtenons

$$\|E^c f\|^2_{L^2} = (2\pi)^{-n} \int |F_\pm f|^2 d\xi \ .$$

<u>Théorème 6.1</u> : Pour chaque $f \in B$ on a

(6.2)' $$\|E^c f\|^2_{L^2} = (2\pi)^{-n} \int | F_\pm f|^2 \, d\xi \ .$$

Les applications $f \to F_\pm f$ se prolongent en des applications $L^2(dx) \to L^2(d\xi/(2\pi)^n)$ qui s'annulent dans $E^d L^2$ et sont isométriques dans $E^c L^2$. Elles entrelacent H et $\dot P_0 = F H_0 F^{-1}$,

$$F_\pm \, e^{itH} = e^{it\dot P_0} F_\pm, \ t \in \mathbb{R} \ .$$

On démontre maintenant que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \dot P_0 \ ; \ L^2(d\xi/(2\pi)^n) & \\
H ; E^c L^2(dx) \arrow[ur, "F_\pm"] & & H_0 ; \ L^2(dx) \arrow[ul, "F"'] \arrow[ll, "W_\pm"]
\end{tikzcd}$$

est commutatif; les opérateurs indiqués à gauche des espaces sont entrelacés par les opérateurs désignés par les flèches. F étant surjectif et $F_\pm$, $W_\pm$ isométriques, on conclut que tous les opérateurs sont surjectifs :

<u>Théorème 6.2</u> : $W_\pm$ et $F_\pm$ définissent des opérateurs unitaires $L^2(dx) \to E^c L^2(dx)$ et $E^c L^2(dx) \to L^2(d\xi/(2\pi)^n)$ respectivement et leur produit est F. Donc l'opérateur de diffusion $S = W_+^{-1} W_-$ est unitaire dans $L^2(dx)$.

Pour étudier S de plus près il est préférable de considérer

$$\hat{S} = F\,S\,F^{-1} = F\,W_+^{-1}\,W_-F^{-1} = F_+F_-^{-1}$$

qui commute avec $\dot{P}_0$. Donc $\hat{S}$ commute avec la multiplication par la fonction caractéristique de $\{\xi;\, a < P_0(\xi) < b\}$ et y induit un opérateur unitaire. Comme $d\xi = dSdt/|P_0'(\xi)|$ si $t = P_0(\xi)$ et dS est la mesure de surface sur M_t , il est naturel d'attendre que $\hat{S}$ induise aussi un opérateur unitaire dans $L^2(M_\lambda,\, dS/|P_0'|)$. On a en effet

Théorème 6.3 : Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}\setminus Z(P_0)$ on pose

$$u = u_\pm - R_0(\lambda \mp i0)\,Vu$$

quand $u \in B^*_{P_0}$ satisfait à l'équation $(P_0 + V - \lambda)u = 0$. Alors

$$\hat{u}_\pm = v_\pm\,\delta(P_0 - \lambda)\ ,\ v_\pm \in L^2(M_\lambda,\, dS).$$

L'application

$$v_- \to v_+$$

est alors une bijection continue Σ_λ dans $L^2(M_\lambda,\, dS)$ qui se prolonge en une bijection continue dans $L^2(M_\lambda,\, dS/|P_0'|^{\kappa})$ pour chaque $\kappa \in [0,2]$ et est unitaire quand $\kappa = 1$. Dans tous ces espaces $I - \Sigma_\lambda$ est compact. Nous avons

$$(F\,S\,F^{-1})f_{|M_\lambda} = \Sigma_\lambda\, f_{|M_\lambda}\ ,\ f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

pour presque tout λ .

Σ_λ est appelé la matrice (!) de diffusion.

7. ABSENCE DE VALEURS PROPRES DANS LE SPECTRE CONTINU.

Pour l'équation de Schrödinger on a des théorèmes d'unicité dus à Kato, Agmon et Simon (voir [6, Th.XIII.58]) qui affirment qu'on n'a pas de valeurs propres dans l'intérieur du spectre continu. Nous donnons ici une légère modification de leur démonstration qui peut être adaptée à une signature quelconque.

Proposition 7.1 : Si $\Delta = \Sigma\, \partial^2/\partial x_j^2$ est le laplacien dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$, alors

(7.1) $$\lambda\tau \int |u|^2\, |x|^\tau\, dx + R(\lambda\tau)^{1/2} \int |u'|^2 |x|^\tau\, dx \leqslant$$

$$\leqslant 3 \int |(\Delta+\lambda)u|^2 |x|^{2+\tau} dx, \quad \tau > R^2\lambda\ ,$$

si $u \in \mathcal{S}$ s'annule pour $|x| < R$.

Démonstration : On peut utiliser la démonstration de Cordes [3] du théorème d'unicité locale. Avec les variables

$$t = \log |x|,\ \xi = x/|x| \in S^{n-1}$$

on a

$$\int |(\Delta + \lambda)u|^2 |x|^{2+\tau}\, dx = \int |L_1 v + L_2 v|^2 dt dS(\xi)$$

où $$v(t,\xi) = e^{at} u(e^t \xi) \quad a = \tau+n-2,$$

$$L_1 = \partial^2/\partial t^2 + (\tau^2-(n-2)^2)/4 + \Delta_S + \lambda e^{2t},\ L_2 = -\tau\partial/\partial t.$$

Ici L_1 est symétrique et L_2 est anti-symétrique, donc

$$\|L_1 v + L_2 v\|^2 = \|L_1 v\|^2 + \|L_2 v\|^2 + ([L_1, L_2]v, v)\ ,$$

$$[L_1, L_2] = 2\lambda\tau e^{2t} > 0.$$

Ceci donne l'évaluation voulue du premier terme dans (7.1) et c'est facile d'en déduire l'autre.

Remarque : La positivité subsiste pour $|x|$ grand si on remplace λ par $\lambda + V$ où $V \to 0$ et $\lim_{r\to\infty} r\,\partial V/\partial r \leqslant 0$, ce qui conduit au théorème complet de Kato, Agmon et Simon.

Par la méthode de Carleman, la Proposition 7.1 nous donne

Théorème 7.2 : Si $(\Delta + \lambda - V)\,u = 0$ avec $\lambda > 0$, et $(1+|x|)^{\tau} D^{\alpha} u \in L^2$ pour $|\alpha| \leqslant 1$, $\forall \tau$,

$$Vu = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} V_{\alpha}(x)\, D^{\alpha}u, \quad |V_{\alpha}(x)| \leqslant C/|x|,$$

alors $u = 0$.

Si V est aussi à courte portée, on peut appliquer ce résultat aux fonctions propres de $H = -\Delta + V$ dans L^2, en vertu du Corollaire 5.2, et on conclut l'absence de valeurs propres dans l'intérieur du spectre continu.

Soient maintenant B et A deux formes quadratiques réelles duales et indéfinies, et considérons l'opérateur

$$B(\partial) = -B(D)$$

dans le cône où $A > 0$. Utilisant des coordonnées polaires par rapport à la surface $A = 1$ nous obtenons par la démonstration de la proposition 7.1

Proposition 7.3 : Si $u \in C_0^{\infty}(\{x;\, A(x) > 0\})$ alors

$$2\lambda\tau \int |u|^2\, A^{\tau/2}\, dx \leqslant \int |(B(\partial) + \lambda)u|^2\, A^{1+\tau/2} dx, \tau > 0 .$$

Remarque : Dans le cas hyperbolique où la signature de A est $(1,n-1)$ on peut aussi estimer les dérivées premières de u.

En plaçant l'origine en un point convenable, on déduit de la proposition 7.3 un théorème d'unicité.

Théorème 7.4 : Si B est indéfinie avec dual A et u est une solution de

$$(B(\partial) + \lambda + V)u = 0$$

où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ et V est multiplication par V_0,

$$|V_0(x)| \leqslant C(|A(x)| + 1 + |x|)^{-1/2}$$

et si $(1+|x|)^{\tau} D^{\alpha} u \in L^2$, $|\alpha| \leqslant 1$, $\forall \tau$, alors $u = 0$ identiquement.

Si V est aussi à courte portée il s'ensuit que l'opérateur $H = B(\partial) + V$ est unitairement équivalent à $H_0 = B(\partial)$ dans l'espace orthogonal aux solutions $u \in L^2$ de l'équation $Hu = 0$.

En terminant je voudrais bien remercier Richard Melrose pour une conversation très utile qui conduisait au théorème précédent, et aussi l'Ecole Polytechnique pour l'invitation qui m'a permis de faire cet exposé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon, Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. IV, 2 (1975) 151-218.

[2] S. Agmon et L. Hörmander, Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics, J. Analyse Math. 30 (1976) 1-38.

[3] H.O. Cordes, Über die eindeutige Bestimmtheit der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen durch Anfangsvorgaben, Nachr Akad. Wiss. Göttingen 11 (1956) 239-258.

[4] J. Ginibre, Théorie de la diffusion pour l'équation de Schrödinger, ce séminaire, exposé n° IV, 18 Novembre 1980.

[5] T. Ikebe, Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operator and their application to scattering theory, Arch. Rat. Mech. Anal. 59 (1960) 1-34.

[6] M. Reed and B. Simon, Methods of mathematical physics IV, Analysis of operators, Academic Press 1978.