Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. Harthong

Les singularités des fonctions spectrales sur une variété riemannienne infiniment aplatie

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 8, p. 1-24

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A9_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 9 - 1 9 8 0

LES SINGULARITES DES FONCTIONS SPECTRALES SUR UNE VARIETE RIEMANNIENNE INFINIMENT APLATIE

par J. HARTHONG

Exposé n° VIII

13 Décembre 1979

AVERTISSEMENT

Ceci est la rédaction d'un exposé au séminaire Goulaouic-Schwartz du 18 Décembre 1979; c'est aussi la version remaniée d'une prépublication. En effet, une remarque qui m'a été faite par Voros après mon exposé m'a permis de découvrir que l'une de mes démonstrations était fausse (l'erreur concernait le passage à la limite sur l'indice de Maslov). J'ai donc annoncé oralement un résultat qui doit être corrigé, ce qui est fait ici.

Je voudrais aussi dire quelques mots sur l'origine de ce travail. Tout a commencé le jour où j'ai assisté à la soutenance d'une thèse de 3ème cycle de J. L. Callot [9]. Celui-ci avait, suivant en cela une suggestion ancienne de Birkhoff, mais en y appliquant l'analyse non-standard, étudié les relations entre les géodésiques fermées sur un domaine plan (problème du billard) et les géodésiques fermées sur une variété sans bord, mais infiniment aplatie de manière à coïncider avec le domaine. Comme j'avais aussi entendu parler des travaux de Chazarain, Colin de Verdière, Guillemin, et d'autres sur les relations entre le spectre du laplacien et les longueurs des géodésiques fermées, j'ai eu l'idée de ce travail. L'analyse non-standard m'a paru s'imposer, au moins pour l'étude des géodésiques, pour des raisons de simplicité et d'élégance.

PREAMBULE

Soit M une variété riemannienne compacte, connexe, sans bord. Sur M, soit Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami opérant sur $C^{\infty}(M)$. Le spectre de Δ est discret ; il consiste en une suite de valeurs propres de multiplicité finie. Autrement dit, il existe une famille $(\alpha_n, \varphi_n) n \in \mathbb{N}$ telle que :

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \Delta \varphi_n = -\alpha_n^2 \varphi_n$

b) la famille $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans $\mathbb{L}^2(M)$.

La série [1] $\sum_{n=o}^{\infty} \cos \alpha_n t$ converge au sens des distributions sur $\mathbb{R}$. Nous désignerons sa somme par C(t) : c'est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$. Il a été démontré par Chazarain en 1974 (voir [1]) que le support singulier de cette distribution est contenu dans l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques de M, et même égal sous certaines conditions. Cela équivaut à dire que, pour que C(t) soit indéfiniment différentiable dans un voisinage de t_o, il faut et il suffit que sur M il n'existe aucune géodésique fermée de longueur t_o

---

(1) Les valeurs propres sont répétées selon leur multiplicité dans la suite α_n ; pour des raisons de commodité, nous les ordonnons par valeurs croissantes.

On peut relier simplement la distribution $C(t)$ à la solution fondamentale de l'équation des ondes de la manière suivante : soit $E(t,x,y)$ la solution, distribution sur $\mathbb{R} \times M \times M$, du problème de Cauchy :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t} - \Delta^{(x)} E = 0$$

$$E(0,x,y) = \delta(x-y)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}(0,x,y) = 0$$

où δ est la distribution de Dirac. On voit très facilement que

$$E(t,x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \alpha_n t \; \varphi_n(x) \; \varphi_n(y)$$

d'où l'on déduit $C(t) = \int_M E(t,x,x)dx$, ce qui est moins élémentaire car il faut légitimer de prendre la trace de $E(t,x,y)$ à $\{x = y\}$ puis d'intégrer la distribution $E(t,x,x)$ le long des x. Dans cette expression, dx est évidemment la mesure-volume sur M.

Nous venons de dire que $C(t)$ s'obtient à partir de $E(t,x,y)$ par restriction puis intégration. Or, on sait très bien depuis Hörmander (voir [2]) suivre les singularités d'une distribution à travers ces opérations. On sait aussi, grâce à Hörmander, déterminer a priori les singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles, en particulier de E, en construisant des paramétrix (voir [3]). L'idée de Chazarain a donc été d'appliquer les méthodes de Hörmander à ce problème .

Tout se complique lorsqu'il y a un bord : on a toujours une solution fondamentale $E^{\Omega}(t,x,y)$ (pour fixer les idées, nous choisirons une fois pour toutes les conditions au bord de Dirichlet), mais les méthodes hörmandériennes ne s'appliquent plus lorsque les singularités atteignent le bord. En la perfectionnant dans [4], R. B. Melrose a pu généraliser l'idée de Chazarain lorsque le bord est strictement convexe (au sens géodésique) : voir [5] et [6]. Les travaux de Melrose ont en tout cas montré que la détermination a priori des singularités de $E^{\Omega}(t,x,y)$ par le moyen de paramétrix devenait d'autant plus complexe que le bord devenait plus riche en inflexions, méplats, etc... A cet égard, l'hypothèse d'un bord strictement convexe correspond précisément à l'absence de méplats ou d'inflexions. Nous pouvons résumer la situation de la manière suivante : les paramétrix hörmandériennes sont construites à l'aide d'opérateurs intégraux " de Fourier", c'est-à-dire dont les phases n'ont que des points critiques non dégénérés (équivalentes à une forme quadratique non dégénérée). La présence d'un bord fait dégénérer ces

phases et nécessite l'utilisation d'opérateurs intégraux "d'Airy" (Melrose) qui sont des opérateurs dont les phases sont plus complexes, mais à condition que ce bord soit dépourvu d'inflexions comme de méplats. La présence d'inflexion ou de méplats obligerait à inventer des opérateurs intégraux encore plus complexes. On peut donc légitimement prévoir que la poursuite du procédé restera limitée à un ordre fini (et en pratique, à un ordre dérisoire). En l'état actuel des recherches on ne peut se passer de l'hypothèse d'un bord strictement convexe (ou strictement concave : cas de variétés hyperboliques).

Pourtant il y a bien longtemps, une suggestion avait été faite par G. D. Birkhoff ([7] , page 169) pour le problème du billard : considérer un domaine borné du plan, de bord régulier, comme une surface compacte (un ballon) de l'espace, mais infiniment aplatie ; le domaine est alors dédoublé, il y a un dessus et un dessous. Cette idée d'avoir un dessus et un dessous se rencontre également, et ce n'est évidemment pas un hasard, à propos du laplacien chez Mac Kean et Singer ([8] , page 53). Dans le présent article, nous vous proposons de montrer que cette idée de Birkhoff est très fertile et peut avantageusement s'appliquer au problème.

Malheureusement, elle ne tient pas toutes ses promesses ; en effet, il ne nous a pas été possible d'étudier l'indice de Maslov sur la surface de Birkhoff, et par conséquent il n'est pas possible non plus de comparer les singularités de la distribution $C(t)$ sur Ω et sur la surface. D'autre part, cette méthode devait devenir intéressante surtout pour des singularités provenant de géodésiques "glissantes" c'est-à-dire de géodésiques séjournant dans le bord pendant un laps de temps (Guillemin et Melrose font allusion à de telles géodésiques dans [6]). Renseignements pris, il semble que ces géodésiques sont assez mal connues ; par exemple, il n'est pas certain qu'elles puissent être non dégénérées, ce qui serait indispensable pour en étudier les perturbations. Si cette dernière question pouvait être résolue, il deviendrait alors possible d'étendre le présent travail à de telles géodésiques. Nous ne pouvons, pour notre part, en dire plus pour le moment.

1. LE "BALLON" DE BIRKHOFF

Soit Ω un domaine borné à bord infiniment dérivable, strictement convexe (i.e. la courbure du bord ne s'annule pas). Pour tout ε assez petit, nous allons construire une surface de classe C^∞ dans l'espace à trois dimensions, symétrique par rapport au plan de Ω, et qui s'aplatit lorsque $\varepsilon \to 0$, jusqu'à épouser la forme du domaine Ω. (Plus tard, nous donnerons à ε une valeur fixe, infiniment petite mais > 0 ; cette dernière idée a déjà été utilisée par J. C. Callot (voir [9]) dont le travail nous sera très utile.) Nous appellerons cette surface le ballon de Birkhoff d'épaisseur ε associé à Ω et le noterons $M(\varepsilon,\Omega)$, $M(\varepsilon)$, ou M.

Voici une construction possible : soit χ une fonction infiniment dérivable sur un ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient l'intervalle $[-1,+1]$, et vérifiant les propriétés suivantes :

- pour $|u| < 1$, $\chi(u) < 1$ et $\chi''(u) > 0$
- pour $u \neq 0$, $\chi(u) > 0$
- $\chi(-u) = \chi(u)$
- $\chi(0) = 0$ et $\chi(1) = 1$.

On peut prendre par exemple $\chi(u) = u^2$.

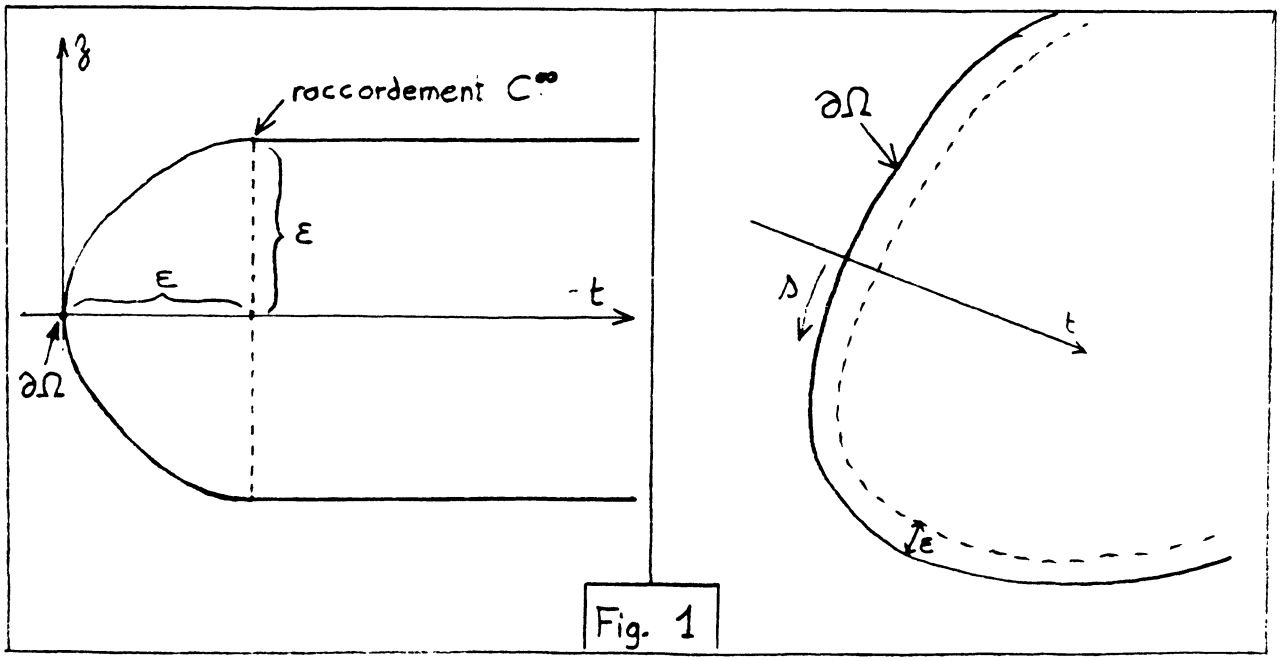

Fig. 1

Considérons d'autre part les coordonnées normales s et t au voisinage du bord $\partial\Omega$: s est l'abscisse curvilinge le long du bord et t la distance au bord (en valeur algébrique : on oriente la normale vers l'intérieur). Enfin, soit z la troisième coordonnée d'espace (orthogonale aux deux autres). Par définition, $M(\varepsilon)$ sera la surface d'équation :

$$\chi(\frac{z}{\varepsilon}) + \exp(1 - \frac{\varepsilon^2}{(t-\varepsilon)^2}) = 1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$$

$z = \pm\varepsilon$ si la distance au bord est $\geqslant \varepsilon$.

On vérifiera sans peine que cette surface est de la classe C^∞ ; elle est plane partout, sauf près du bord $\partial\Omega$; Pour fixer les idées, nous prendrons $\chi(u) = u^2$. Remarquons encore que le choix qui a été fait même avec χ arbitraire n'est pas le plus général possible : on pourrait se passer de la partie plane. Mais elle simplifie tant les calculs qui vont suivre !

2. CONTINUITE SPECTRALE

Dans cette section, nous allons établir une correspondance par continuité entre le spectre du laplacien opérant dans Ω avec certaines conditions au bord, et le spectre du lapacien opérant sur certains sous-espaces de $C^\infty(M)$. On peut dire que pour ε petit, le spectre de Ω avec conditions au bord de Dirichlet est voisin du spectre du laplacien opérant sur l'espace $C^\infty_-(M)$ des fonctions antisymétriques (i.e. impaires par rapport à la coordonnée z). On pourrait dire la même chose en prenant d'une part les conditions au bord de Neumann et d'autre part l'espace $C^\infty_+(M)$ des fonctions symétriques (paires par rapport à z). De façon plus précise on a le :

<u>Théorème 1</u> : Soit Ω un domaine borné dans le plan, à bord C^∞ et strictement convexe, et soit $M(\varepsilon)$ son ballon de Birkhoff. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ les valeurs propres du laplacien sur Ω avec les conditions au bord de Dirichlet, et $\lambda_1^{(\varepsilon)}, \lambda_2^{(\varepsilon)}, \ldots, \lambda_n^{(\varepsilon)}, \ldots$ les valeurs propres du laplacien sur $M(\varepsilon)$ opérant sur les fonctions antisymétriques.

Alors

$$\forall n_o \in \mathbb{N}, \forall\delta > 0 \quad \exists\varepsilon_o > 0 \quad \forall n \leqslant n_o \quad \forall\varepsilon \leqslant \varepsilon_o$$

$$|\lambda_n^{(\varepsilon)} - \lambda_n| < \delta$$

N. B. Dans les suites $\lambda_1, \ldots$ les valeurs propres sont ordonnées et répétées selon leur multiplicité. Bien entendu, on a un théorème analogue pour les conditions au bord de Neumann.

Voici une démonstration possible de ce théorème. Elle utilise des méthodes inventées par Kato (voir [11]). On devrait aussi pouvoir le démontrer par des procédés d'encadrement des valeurs propres du type "minimax".

Faisons une section normale de $M(\varepsilon)$, autrement dit une section par un plan normal au bord $\partial\Omega$. Cela revient à faire $s = C^{te}$ dans les coordonnées normales (s,t,z) ; nous sommes dans la situation représentée par la figure 1 (gauche). Soit τ l'abscisse curviligne sur $M(\varepsilon)$ en partant de $\partial\Omega$ le long de cette section dans le sens des $z > 0$; autrement dit, τ est la distance curviligne sur $M(\varepsilon)$ par rapport à son équateur $\partial\Omega$. Puis, soit a l'abscisse curviligne (la valeur de τ) du point qui se projette en $t = \varepsilon$ (c'est le point où la courbure devient nulle).

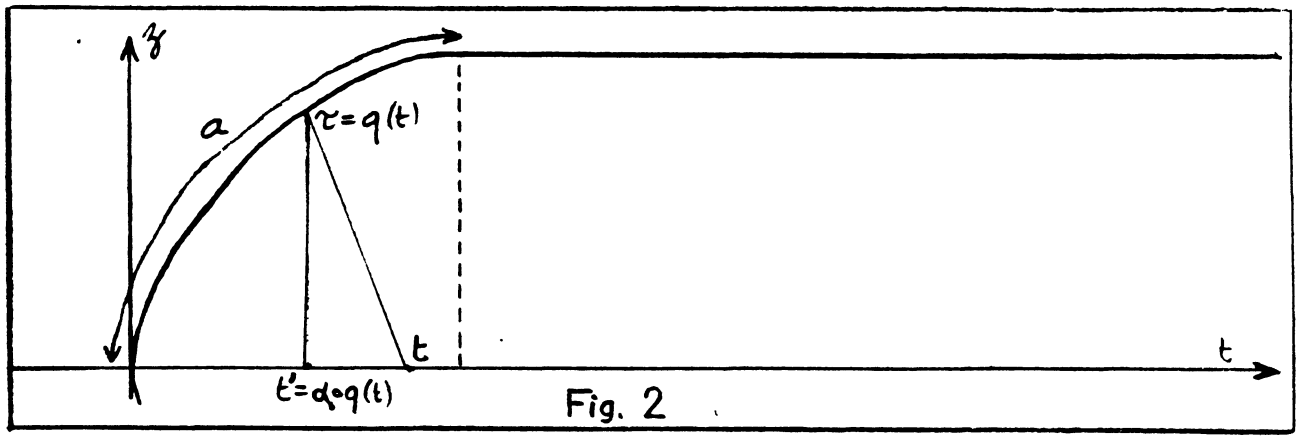

Fig. 2

On a évidemment $a > \varepsilon$. Enfin, donnons-nous une fonction $q \in C^{\infty}([0,\infty[)$ telle que :

$$q(0) = 0 \qquad q(\varepsilon) = a$$

$$1 < q'(t) \leqslant 2 \qquad \text{si } 0 \leqslant t < \varepsilon$$

$$q'(t) = 1 \qquad \text{si } t \geqslant \varepsilon$$

et pour toute $\phi \in \mathbb{L}^2(M(\varepsilon))$, posons

$$\hat{\phi}(s,t) = \phi(s,q(t))$$

où on considère que ϕ est fonction de s et τ considérées comme coordonnées locales sur $M(\varepsilon)$; comme nous le verrons dans la suite, il suffit d'avoir cette relation pour $t \leqslant \varepsilon$, où les coordonnées locales s, τ sont définies (pour ε assez petit).
Dans le reste, on pose $\hat{\phi} = \phi$; on notera bien sûr que ce "reste", c'est la partie plane.

Alors les laplaciens s'écrivent :

$$\Delta^M\phi(s,\tau) = [1 - \frac{\alpha(\tau)}{\rho(s)}]^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} + 3\alpha(\tau)[1 - \frac{\alpha(\tau)}{\rho(s)}]\frac{\rho'(s)}{\rho(s)^2}\frac{\partial\phi}{\partial s}$$

où $\alpha(\tau)$ est la fonction C^∞ telle que le point de M de coordonnées (s,τ) se projette sur Ω en $(s, \alpha(\tau))$, et où $\rho(s)$ désigne le rayon de courbure du bord $\partial\Omega$ en fonction de s.

$$\Delta^\Omega\hat{\phi}(s,t) = [1 - \frac{t}{\rho(s)}]^2 \frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial t^2} + 3t\,[1 - \frac{t}{\rho(s)}]\frac{\rho'(s)}{\rho(s)^2}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial s}$$

d'où la différence :

$$\Delta^\Omega\hat{\phi}(s,t) - \widehat{\Delta^M\phi}(s,t) = (1 - \frac{t}{\rho(s)})^2 - (1 - \frac{\alpha oq(t)}{\rho(s)})^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial s^2} + q'(t)^2 - 1 \frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} +$$

$$+ 3t(1 - \frac{t}{\rho(s)})\frac{\rho'(s)}{\rho(s)^2}q'(t) - 3\alpha oq(t)\,(1 - \frac{\alpha oq(t)}{\rho(s)})\frac{\rho'(s)}{\rho(s)^2}]\frac{\partial\phi}{\partial s} + q''(t)\frac{\partial\phi}{\partial\tau}$$

Cette expression contient les dérivées d'ordre $\leqslant 2$ de ϕ, multipliées par des coefficients dont il est facile de voir qu'ils sont bornés par des constantes qui ne dépendent que du domaine Ω et du choix de la fonction q : ainsi, si ρ_o est le minimum du rayon de courbure le long de $\partial\Omega$, on a $\frac{1}{\rho(s)} \leqslant \frac{1}{\rho_o}$, $\alpha oq(t) \leqslant t \leqslant \varepsilon \leqslant \rho_o$ etc. D'autre part, cette expression doit être remplacée par O en tout point dont la distance au bord est $\geqslant \varepsilon$, c'est-à-dire dans la partie plane. De ces constations résulte l'inégalité :

$$|\widehat{\Delta^M\phi} - \Delta^\Omega\hat{\phi}|^2 \leqslant c^{te}.\ \varepsilon\,|||\phi|||$$

où $|\ \ |$ désigne la norme dans $\mathbb{L}^2(M)$ et $|||\ \ \ |||$ la norme dans $C^2(M)$:

$$|u| = (\int_M |u(x)|^2 dx)^{1/2}$$

$$|||u||| = \sup_{x \in M} (|u(x)|, |\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)|, |\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)|)$$

Nous allons montrer que, pour $\lambda > 0$ n'appartenant pas aux spectres, on a l'inégalité pour les résolvantes :

$$\forall\ u \in \mathbb{L}^2(M) \quad |R^M u - R^\Omega u| \leqslant C^{te} \sqrt{\varepsilon}\ u$$

où $R^M = (\lambda - \Delta^M)^{-1}$ et $R^\Omega = (\lambda - \Delta^\Omega)^{-1}$.

Pour cela écrivons :

$$R^M u - R^\Omega u = (\Delta^\Omega - \Delta^M) R^M R^\Omega u$$

D'après une inégalité bien connue résultant des propriétés des espaces de Sobolev (voir, par exemple, [10], page 6), on a :

$$\| R^\Omega u \|_2 \leqslant C^{te} |u|$$

où $\|\ \ \|_s$ désigne la norme dans l'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$, et aussi :

$$\| R^\Omega R^M u \| 4 \leqslant C^{te} |u|.$$

Or, l'inégalité de Sobolev donne pour tout opérateur différentiel D d'ordre $\leqslant 2$ (avec $v = R^M u$) :

$$|DR^\Omega v(x)| \leqslant C^{te} \| DR^\Omega v \|_2^{1/2} |DR^\Omega v|^{1/2}$$

$$\leqslant C^{te} \| R^\Omega v \|_4^{1/2} \| R^\Omega v \|_2^{1/2}$$

et donc, d'après les inégalités précédentes :

$$|DR^\Omega R^M u(x)| \leqslant C^{te} |u|$$

d'où

$$|R^M u - R^\Omega u| \leqslant C^{te} \sqrt{\varepsilon} |||R^M R^\Omega u||| \leqslant C^{te} \sqrt{\varepsilon} |u|$$

C.Q.F.D

Nous pouvons alors conclure en utilisant un théorème de Kato (que l'on trouvera dans [11], page 213, §5 , compte tenu de page 206, théorème 2.25) : lorsque ε tend vers 0, $\|R^M - R^\Omega\|$ tend vers 0 et par conséquent toute partie finie du spectre passe à la limite.

3. LA DISTRIBUTION $C^M(t) = \sum_{n \in {}^*\mathbb{N}} \cos \alpha_n^{(\varepsilon)} t$

Avec cette section, nous entrons dans le vif du sujet. Les résultats de Chazarain s'appliquent sur le ballon de Birkhoff qui est une variété riemannienne compacte, connexe, et sans bord. Toutefois, comme nous n'opérons pas sur $C^\infty(M)$, mais seulement sur les fonctions antisymétriques, nous n'avons pas affaire avec la distribution $\int E(t,x,x)dx$ qu'étudie Chazarain. Nous allons donc commencer par donner une expression analogue pour $C^M(t)$:

<u>Proposition</u> : Notons $x \mapsto \hat{x}$ l'involution de M dans M qui à $x \in M$ associe son symétrique par rapport au plan de Ω . Alors on a

$$C^M(t) = \sum_{n=o}^{\infty} \cos \alpha_n^{(\varepsilon)} t = \frac{1}{2} \int_M [E(t,x,\hat{x}) - E(t,x,x)]dx$$

<u>Démonstration</u> : $C^\infty(M) = C_+^\infty(M) \oplus C_-^\infty(M)$ où $C_+^\infty(M)$ et $C_-^\infty(M)$ sont respectivement les sous-espaces des fonctions symétriques et antisymétriques ; ces sous-espaces sont orthogonaux pour le produit scalaire induit par $\mathbb{L}^2(M)$. Pour toute $\varphi \in C^\infty(M)$, on désigne ses projections respectivement par φ^+ et φ^- . Il est immédiat que $\varphi^+(y) = \frac{1}{2}[\varphi(y) + \varphi(\hat{y})]$ et que $\varphi^-(y) = \frac{1}{2}[\varphi(y) - \varphi(\hat{y})]$. Donc :

$$E(t,x,y) - E(t,x,\hat{y}) = 2 \sum \cos \alpha_n t \varphi_n(x) \overline{\varphi_n^-}(y)$$

si les φ_n sont normées de sorte que $\int_M |\varphi_n(x)|^2 dx = 1$. Cela donne :

$$E(t,x,x) - E(t,x,\hat{x}) = 2 \sum \cos \alpha_n t \, \varphi_n(x) \, \overline{\varphi_n^-}(x)$$

d'où :

$$\int_M [E(t,x,x) - E(t,x,\hat{x})] \, dx =$$

$$= 2 \sum \cos \alpha_n t [\int_M {}^+_n(x) \, \overline{\varphi_n^-}(x) dx + \int_M |\overline{\varphi_n^-}(x)|^2 \, dx]$$

$$= 2 \sum \cos \alpha_n t \, .$$

En effet, la première intégrale est nulle puisque φ_n^+ et φ_n^- sont orthogonales, et la seconde vaut 1. Remarquons que pour les fonctions propres φ_n, on a soit $\varphi_n = \varphi_n^+$, soit $\varphi_n = \varphi_n^-$ (c'est-à-dire respectivement $\varphi_n^- = 0$ et $\varphi_n^+ = 0$). Autrement dit, les fonctions propres sont soit symétriques, soit antisymétriques. C'est évident du fait que les sous-espaces $C_+^\infty(M)$ et $C_-^\infty(M)$ sont invariants par Δ! La suite des valeurs propres α_n relative au sous-espace $C_-^\infty(M)$ est donc une sous-suite de la suite complète des valeurs propres du laplacien opérant sur $C^\infty(M)$.

Cette différence avec la distribution de Chazarain modifie quelque peu le résultat : nous aurons une singularité pour $C^M(t)$ au point $t = \ell$ non seulement s'il existe une géodésique fermée de longueur ℓ , mais aussi s'il existe une géodésique que nous appellerons "semi-fermée" de longueur ℓ . Voici ce que nous entendons par semi-fermée : c'est une géodésique associée à une bicaractéristique qui, issue d'un point x de M dans la direction ξ aboutit au point $\hat{x}$ dans la même (1) direction ξ. A cette modification près, qui est très simple, les résultats de Chazarain ou de Duistermaat et Guillemin sont tout à fait utilisables sur le ballon de Birkhoff.

4. NOTIONS ELEMENTAIRES DE MATHEMATIQUES NON STANDARD

Bien entendu, nous nous bornerons ici à quelques idées succintes, juste le minimum permettant la lecture de cet article sans interruption. Pour en savoir plus, on pourra consulter :

- " La mathématique non standard, vieille de soixante ans ?" par Georges Reeb (publié à Strasbourg I.R.M.A. et dans la gazette), pour les amateurs d'idées simples et fécondes ;
- le traité de Robinson [O] pour ceux qui demandent en outre une technique élaborée.

A l'origine de la mathématique non standard, il y a le fait suivant : si on considère toutes les propriétés des entiers (c'est-à-dire l'arithmétique), elles ne peuvent pas caractériser l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. De même pour

(1) Lorsque nous disons "la même direction", nous l'entendons évidemment par rapport à l'identification canonique, induite par $x \longmapsto \hat{x}$, entre T_x^*M et $T_{\hat{x}}^*M$.

$\mathbb{R}$. Autrement dit, nous disposons de deux (au moins) modèles pour l'arithmétique ou pour l'analyse : un normal, et un plus gros (en fait beaucoup plus gros). L'idée est alors d'exploiter cette situation. Nous appellerons <u>standard</u> le modèle normal, <u>non standard</u> le gros modèle. Il est évident, par définition, que tout objet relatif au modèle standard, pouvant être défini par un assemblage appartenant à la mathématique formelle, aura un correspondant (défini par le même assemblage) relatif au modèle non standard. Nous appellerons <u>internes</u> de tels objets, et <u>extension</u> la correspondance que nous venons de signaler. Ainsi, tous les objets effectivement construits sont internes : les nombres 0, 1, 2,... $\sqrt{2}$, π etc... sont internes ; les fonctions x^2, $\sqrt{x}$, $\sin x$, $\frac{1}{x}$, e^x, etc... sont internes. Toutefois, du fait que le modèle non standard est plus gros, il contient des objets qui n'existent pas dans le modèle standard, et qui de ce fait, a fortiori, ne peuvent pas être définis par un assemblage de la mathématique formelle (pour les définir on doit ajouter à ce langage un nouveau symbole); ces objets sont appelés <u>externes</u>. Par exemple, du fait que le modèle non standard de $\mathbb{N}$ est plus gros que le modèle standard, il doit contenir des éléments qui ne sont l'extension d'aucun élément du modèle standard ; autrement dit, il contient des nombres entiers qui n'existent pas dans le modèle standard. Un tel nombre est un objet externe, et nous dirons "nombre entier non standard" pour désigner ces nombres. Si ω est un entier non standard, les fonctions suivantes sont externes : x^{ω}, $\sin \omega x$, ω^x, etc...

Il est facile de vérifier qu'un entier non standard est plus grand que tout entier standard. Il est donc infiniment grand. De même, dans le modèle non standard de $\mathbb{R}$, nous aurons des nombres infiniment petits et des nombres infiniment grands : $\varepsilon > 0$ sera infiniment petit si ε est inférieur à tout réel standard > 0.

Les infiniments petits permettent de définir dans le modèle non standard de $\mathbb{R}$ une relation d'équivalence :

$$x \sim y \quad \text{si } x - y \text{ est infiniment petit.}$$

(on dit que x est infiniment proche de y).

Des définitions classiques prennent alors une forme inattendue. A partir d'ici, pour tout objet interne S, nous noterons $^*S$ son extension. Ainsi, la définition de la continuité sous forme classique :

" Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$ "

devient

$$" \; x \sim x_0 \Rightarrow {}^*f(x) \sim {}^*f(x_0) \; "$$

De même, la définition de la dérivabilité devient :

$$" \quad \exists\, a \in \mathbb{R} \qquad \begin{matrix} x \sim x_o \\ x \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{{}^*f(x) - {}^*f(x_o)}{x - x_o} \sim a \quad "$$

Il ressort de ces exemples élémentaires que le caractère universel de l'infiniment petit supprime tout recours à la notion de voisinage. Nous pourrons constater tout à l'heure, lorsque nous étudierons les géodésiques, à quel point ce nouveau langage allège l'exposé.

Considérons maintenant une partie de ${}^*\mathbb{R}^n$, le modèle non standard de $\mathbb{R}^n$ et appelons-la G. Si G n'a pas tous ses points infiniment grands, elle laisse une trace, une "ombre" sur $\mathbb{R}^n$. C'est pourquoi nous appellerons <u>ombre de G</u> l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ (donc standard) qui sont infiniment proches d'un point de G.

Lorsque ε est infiniment petit, le ballon de Birkhoff $M(\varepsilon,\Omega)$ a pour ombre Ω , et la partie de $M(\varepsilon,\Omega)$ où la courbure est infiniment grande a pour ombre le bord de Ω . Autrement dit, ce que nous voyons " à l'œil nu" de M, qui est une variété sans bord, est simplement le domaine Ω. J. L. Callot avait déjà remarqué (voir [9]) que l'ombre d'une géodésique fermée de M était une trajectoire de billard, c'est-à-dire une géodésique (brisée) de Ω , mais ayant un nombre pair de réflexions sur le bord. Réciproquement, le théorème de Callot ([9] , page 28, théorème 3) nous permet d'affirmer que toute géodésique brisée de Ω, ayant un nombre pair de réflexions sur le bord, est l'ombre d'une géodésique fermée de $M(\varepsilon,\Omega)$.

Nous avons vu au paragraphe 3 que dans les singularités de la distribution $C^M(t)$ interviennent non seulement les géodésiques fermées de M, mais aussi les géodésiques semi-fermées ; or l'ombre d'une géodésique semi-fermée est une géodésique brisée de Ω, fermée mais ayant un nombre impair de réflexions. Il n'y a aucune difficulté à étendre le théorème d'existence de Callot aux géodésiques impaires. Ainsi : pour toute géodésique de Ω , ayant un nombre impair de réflexions sur le bord, il existe une géodésique semi-fermée de M dont elle est l'ombre.

Toutefois le résultat de Callot ne nous donne aucun renseignement d'unicité ou de dégénérescence. On s'attend en effet à ce qu'une géodésique fermée de Ω , dégénérée à l'ordre k, donne lieu à k géodésiques fermées dans M (ou semi-fermées). Dans le paragraphe suivant, nous donnons un résultat beaucoup plus précis, indispensable pour l'étude des singularités de $C^M(t)$.

5. ETUDE DES GEODESIQUES FERMEES

Théorème 2 : Soit γ une géodésique fermée de Ω, distincte du bord, de période ℓ. Soit P l'application de Poincaré de cette géodésique, et supposons Ω convexe.

Alors, si $\det(1-P) \neq 0$, il existe, dans tout le halo (1) de γ, et à la symétrie $x \mapsto \hat{x}$ près une et une seule géodésique γ_ε sur M (fermée ou semi-fermée selon que γ est paire ou impaire). En outre, l'application de Poincaré P_ε de γ_ε est infiniment proche de P, ce qui entraîne que $\det(1-P_\varepsilon)$ n'est ni infiniment petit, ni infiniment grand.

Démonstration du théorème : Commençons par introduire l'application de "premier retour" χ au voisinage de γ de la manière suivante : soit $z_o \in T^*\Omega$ un point situé sur la bicaractéristique $\tilde{\gamma}$ associée à γ. On peut écrire $z_o = (x_o, \xi_o)$ où x_o est situé sur γ et ξ_o est la vitesse en x_o (de module 1 : $|\xi_o| = 1$). Soit V un voisinage de z_o dans le sous-espace orthogonal à $\tilde{\gamma}$ de $T^*\Omega$. Si $z \in V$ est suffisamment près de z_o, nous sommes assurés que la bicaractéristique issue de z viendra recouper V, au bout d'un temps voisin de ℓ, en un point que nous appelons $\chi(z)$. Ainsi, $\chi : U \to V$ est définie sur un voisinage U de z_o, inclus dans V, et toute géodésique périodique de Ω passant par U est associée à un point fixe de χ. L'application de Poincaré P est simplement l'application tangente à χ en z_o. Donc, dire que $\det(I - P) \neq 0$ signifie que dans $U \times V$, le graphe de χ coupe transversalement la diagonale en (z_o, z_o). Nous avons une situation analogue, bien sûr, pour des géodésiques de M qui sont périodiques ou semi-périodiques. Il s'agit alors de prouver que si γ_o est une géodésique fermée de Ω et γ_ε une géodésique (non nécessairement fermée) de M ayant les mêmes conditions initiales (2) les applications de premier retour, χ_o et χ_ε respectivement, sont infiniment voisines, ainsi que leurs dérivées par rapport à ces conditions initiales. En effet, si cela est vrai, l'hypothèse $\det(I - P_o) \neq 0$ exprime une condition de transversalité qui entraîne l'unicité du point fixe γ_o dans un voisinage, et la stabilité de cette unicité ; en outre, puisque l'application de Poincaré est la dérivée de l'application de premier retour en son point fixe, il est clair que l'on aura $P_\varepsilon \simeq P_o$ et donc la condition i) du théorème sera vérifiée.

On remarquera qu'avec l'application de premier retour et sa dérivée l'application de Poincaré, nous disposons d'un nouveau moyen de démontrer le théorème de Callot : en effet, Callot utilise l'application T de Birkhoff (cf. [7],

(1) halo : c'est l'ensemble des points, ici de $^*\mathbb{R}^3$, infiniment proches de γ. Remarquons que le halo de γ coupe $M(\varepsilon)$: ainsi, dans $M \cap \{\text{le halo de } \gamma\}$, γ_ε est l'unique géodésique fermée ou semi-fermée.

(2) Rappelons que dans la partie plane de $M(\varepsilon)$ nous pouvons identifier l'espace tangent à celui de Ω.

chap. VI, §7, page 171) qui, il est vrai, est essentiellement la même chose que P_o. Toutefois, en lui construisant son homologue sur le ballon de Birkhoff (voir [9], page 30) Callot se prive de la possibilité d'étendre son procédé à un "billard" non convexe, alors que par contre la véritable application de Poincaré n'a pas besoin de cette contrainte. En fait, Birkhoff s'est imposé cette contrainte de la convexité pour pouvoir contourner la difficulté résultant des discontinuités (brisure des géodésiques, etc.) provoquées par le bord. L'analyse non standard nous donne aujourd'hui des moyens bien plus puissants et plus profonds de venir à bout des difficultés de cette espèce, comme on pourra s'en convaincre dans les lignes qui vont suivre.

Il existe des résultats classiques sur la dérivabilité (et la continuité de la dérivée obtenue) par rapport aux conditions initiales pour les solutions d'une équation différentielle. Dans le cas qui nous concerne on constate que les coefficients de l'équation géodésique, c'est-à-dire les symboles de Christoffel de deuxième espèce, sont des dérivées d'ordre 1 du tenseur métrique. D'après les théorèmes classiques, nous sommes assurés que la dérivée de l'application de premier retour varie continuement avec les dérivées secondes de la métrique. En fait, nous utiliserons une version un peu plus précise que la version usuelle de ces théorèmes. Nous pouvons donc faire subir une déformation (que nous préciserons) à $M(\varepsilon)$ qui ne fera varier la dérivée de l'application de premier retour que d'un infiniment petit. L'idée de notre démonstration est alors la suivante : nous voulons établir que les dérivées de l'application de premier retour, respectivement sur le billard Ω (situation singulière) et sur le ballon de Bikhoff $M(\varepsilon)$ (situation régulière), sont infiniment voisines. D'après les remarques précédentes, il suffit de l'établir pour un autre billard Ω' et son ballon, obtenus en déformant Ω et M sous les conditions indiquées plus haut. Il ne reste plus alors qu'à choisir un tel Ω' et un tel M' pour lesquels la démonstration sera suffisamment simple pour être pratiquée.

Considérons une géodésique fermée γ_o du billard Ω telle que $\det(I - P_o) \neq 0$, où P_o désigne, comme avant, l'application de Poincaré de γ_o. Dans le modèle non-standard, Ω et γ_o possèdent des extensions ${}^*\Omega$ et ${}^*\gamma_o$, que nous noterons toutefois Ω et γ_o selon un usage consacré. En chaque point de réflexion de γ_o, nous allons remplacer le bord de Ω par le cercle osculateur en ce point, et cela sur tout un voisinage macroscopique de ce point. (En dehors de ce voisinage, le raccordement est arbitraire). Nous obtenons ainsi un nouveau domaine Ω' qui, localement, possède un bord circulaire. Plus précisément : le bord de Ω' est un arc de cercle dans le halo (1) de chaque point de réflexion de γ_o. Nous obtenons

---

(1) On rappelle que le halo d'un point est l'ensemble des points infiniment voisins dans le modèle non standard.

en même temps un nouveau ballon M', construit sur la base de Ω' selon le procédé de la section 2; nous gardons pour simplifier la même fonction α $(t = \alpha(\tau)$, $z = 8(\tau)$, $\alpha'(\tau)^2 + \beta'(\tau)^2 = 1)$. La première étape de notre démonstration est alors :

<u>1er étape</u> : nous montrons que les dérivées des applications de premier retour sur M et M' respectivement, sont infiniment voisines. D'abord, une précision sur l'application de premier retour : puisque γ_o n'est pas une courbe sur M, elle n'est pas le point fixe de cette application; mais, étant données des conditions initiales dans un voisinage assez petit de γ_o, le premier retour est néanmoins bien défini sur M. Commençons par décomposer cette application de la manière que voici :

- une première application qui, à la donnée initiale (x,ξ) dans la partie plane de M' (ou de M) associe la donnée (x_1, ξ_1) au moment où la géodésique atteint la zone courbée dans le halo du premier point de réflexion de γ_o (en fait, $\xi_1 = \xi$ puisqu'on n'a pas quitté la partie plane).
- une deuxième application qui, à cette donnée (x_1,ξ_1) associe la donnée (x_1', ξ_1') au moment où la géodésique issue de (x_1,ξ_1) quitte la partie courbée.
- les applications suivantes sont définies de la même façon aux points de réflexion suivants, jusqu'au retour au voisinage du point de départ (x,ξ).

L'application de premier retour χ est ainsi la composée de ces 2n + 1 applications successives. La même décomposition s'obtient sur M' pour l'application χ'. Appelons ϕ_j, χ_j (resp : ϕ_j', χ_j') ces applications successives sur M (resp : M'). Ainsi $\phi_j(x_j', \xi_j') = (x_{j+1}, \xi_{j+1})$ pour $j = 1,2,\ldots,n$, $\phi_o(x,\xi) = (x_1,\xi_1)$, et $\chi_j(x_j,\xi_j) = (x_j', \xi_j')$ $j = 1,2,\ldots,n$ (de même sur M') et on a :

$$\chi = \phi_n \circ \chi_n \circ \phi_{n-1} \circ \cdots \circ \chi_1 \circ \phi_o$$

$$\chi' = \phi_n' \circ \chi_n' \circ \phi_{n-1}' \circ \cdots \circ \chi_1' \circ \phi_o'$$

Pour montrer que χ et χ' sont infiniment voisines, ainsi que leurs dérivées, il suffit évidemment de démontrer que pour chaque $j = 0,\ldots,n$ ϕ_j et ϕ_j' sont infiniment voisines ainsi que leurs dérivées, et que pour chaque $j = 1,2,\ldots,n$, χ_j et χ_j' sont infiniment voisines ainsi que leurs dérivées. Pour les premières, ϕ_j et ϕ_j', c'est immédiat, parce qu'elles ne concernent que les parties planes des ballons respectifs, qui s'identifient à leurs projections sur les billards respectifs, et elles se ramènent à des applications affines qui se dérivent très facilement.

Pour les χ_j et χ'_j, nous allons étudier l'équation différentielle des géodésiques; ramenée à un système du premier ordre, celle-ci s'écrit dans les coordonnées s, τ :

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{u(\sigma)}{1 - m(s(\sigma))\alpha(\tau(\sigma))}$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = v(\sigma)$$

$$\frac{du}{d\sigma} = \frac{m(s(\sigma))\alpha'(\tau(\sigma))}{1 - m(s(\sigma))\alpha(\tau(\sigma))} u(\sigma)v(\sigma)$$

$$\frac{dv}{d\sigma} = \frac{-m(s(\sigma))\alpha'(\tau(\sigma))u(\sigma)^2}{1 - m(s(\sigma))\ \alpha(\tau(\sigma))}$$

où $m(s)$ désigne la courbure de $\partial\Omega$ au point d'abscisse s. (On a introduit les fonctions auxiliaires $u(\sigma) = [1 - m\alpha]s'$, $v = \tau'$). En effet, le tenseur métrique est, dans ces coordonnées normales, représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} [1 - m(s)\ \alpha(\tau)]^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par conséquent les symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\Gamma^1_{11} = - \frac{m'(s)\alpha(\tau)}{1- m(s)\ \alpha(\tau)}$$

$$\Gamma^1_{12} = - \frac{m(s)\alpha'(\tau)}{1- m(s)\alpha(\tau)}$$

$$\Gamma^2_{11} = + [1 - m(s)\alpha(\tau)]\ m(s)\alpha(\tau)$$

d'où le système différentiel ci-dessus. Celui-ci s'écrit sous la forme condensée :

$$X' = F(X)$$

avec $X = (s,\tau,u,v)$ et $F(s,\tau,u,v) =$

$$= \left(\frac{u}{1 - m\alpha}, v, \frac{m\alpha' uv}{1 - m\alpha}, - \frac{m\alpha' u^2}{1 - m\alpha} \right) .$$

Or, nous voulons étudier les dérivées par rapport aux conditions initiales des solutions de ce système. Si nous désignons par U la dérivée de X par rapport aux conditions initiales, U est une matrice carrée d'ordre 4, solution de :

(2) $$U'(\sigma) = F'(X(\sigma))U(\sigma)$$

où $F'(X(\sigma))$ est la dérivée de F au point $X(\sigma)$. Notre problème est donc ramené au suivant :

montrer que les solutions de (2) relatives à M et M' sont infiniment voisines.

Pour cela, écrivons la matrice $F'(X(\sigma))$:

$$\begin{pmatrix} \frac{m'\alpha}{1-m\alpha}u & \frac{m\alpha'}{(1-m\alpha)^2} & \frac{1}{1-m\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{m'\alpha'}{(1-m\alpha)^2}uv & \frac{m\alpha'' + m^2(\alpha'^2 - \alpha\alpha'')}{(1-m\alpha)^2}uv & \frac{m\alpha'}{1-m\alpha}v & \frac{m\alpha'}{1-m\alpha}u \\ -\frac{m'\alpha'}{(1-m\alpha)^2}u^2 & \frac{-m\alpha'' + m^2(\alpha'^2 - \alpha\alpha'')}{(1-m\alpha)^2}u^2 & -\frac{2m\alpha'}{1-m\alpha}u & 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons ainsi constater que la dérivée de m n'apparaît que dans la première colonne, où par contre n'apparaît pas la dérivée seconde de α. Or, lorsque nous remplaçons M par M', m varie d'un infiniment petit, mais pas m' (qui passe de m' à O) ; dans le même temps α reste le même (ce que nous avons décidé par simple commodité) mais α et α' sont bornées (α reste infiniment petit et $|\alpha'|$ reste inférieur à 1 lorsque τ parcourt le domaine qui nous intéresse). Pour prouver que les solutions de (2) varient infiniment peu lorsque l'on passe de M à M', il suffit de vérifier que les coefficients de la matrice $\int_0^\sigma F'(X(\sigma'))d\sigma'$ varient infiniment peu ; en effet $X(\sigma)$ (1) étant fixée sur M et M' (2) est un système linéaire en U de condition initiale $U(0) = I$, donc sa solution est

$$U(\sigma) = \exp\left[\int_0^\sigma F'(X(\sigma'))d\sigma'\right] .$$

Compte tenu des remarques précédentes, nous allons alors appliquer le théorème de la moyenne de deux façons différentes :

- pour les élements de matrice $F'(X(\sigma))$ de la 1ère colonne, de la forme $m'(s(\sigma))f(\sigma)$, nous avons :

$$\left|\int_0^\sigma m'(s(\sigma'))f(\sigma')d\sigma'\right| \leqslant \sigma.\mathrm{Sup}|m'|.\mathrm{Sup}|f|$$

---

(1) $X(\sigma)$ représente la géodésique le long de laquelle on cherche la dérivée par rapport aux conditions initiales. Il faut alors fixer sur M et M' des géodésiques homologues infiniment voisines, ce qui est immédiat.

et de la même façon, si nous étudions la différence des $F'(X(\sigma))$ relatifs à M et M' (sur M', m est constante donc $m' = 0$), nous voyons que cette différence est majorée par

$$2\sigma \,.\, \mathrm{Sup}\,|m'|.\ \mathrm{Sup}|f|.$$

Or, σ est infiniment petit : c'est la longueur de l'arc de géodésique qui traverse la zone courbée, celui-ci n'étant pas rasant. (C'est ici que joue l'hypothèse que Ω est convexe. Dans le cas contraire il faudra tenir compte de cette difficulté). D'autre part, $\mathrm{Sup}|m'|$ est fini d'après nos hypothèses, et $\mathrm{Sup}|f|$ également puisque $\mathrm{Sup}\,|\alpha|$, $\mathrm{Sup}\,|\alpha'|$, et $\mathrm{Sup}\,\left|\frac{1}{1-m\alpha}\right|$ sont finis

- pour les éléments de matrice qui ne contiennent pas m', nous avons

$$\left|\int_0^\sigma F'_{ij}(X(\sigma')) - F'_{ij}(X_1(\sigma'))d\sigma'\right| =$$

$$= \left|\int_0^\sigma [m(s(\sigma')) - m_1(s(\sigma'))]\, g(\sigma')d\sigma'\right| \leqslant \mathrm{Sup}|m - m_1|.\ \int_0^\sigma |\, g(\sigma')|\ d\sigma'$$

(où X,m désignent les objets relatifs à M et X_1, m_1 les objets correspondants relatifs à M' : $m_1 = C^{te}$, $m \simeq m_1$, etc.). Cette fois, c'est $\mathrm{Sup}|m - m_1|$ qui est infiniment petit, et $\int_0^\sigma |g(\sigma')|\ d\sigma'$ est fini parce que $\int_0^\sigma |\alpha''(\tau(\sigma))|\ d\sigma'$ est fini. Tout ceci prouve ce que nous voulions et la première étape de notre démonstration est ainsi achevée.

<u>2ème étape</u> : Dans la 1ère étape, nous avons prouvé qu'on peut remplacer localement M par un ballon localement construit sur un cercle ; ici nous allons rapidement vérifier qu'on peut faire de même pour la base Ω . Repérons la donnée initiale x par son abscisse r sur un axe transversal à γ_0 et ξ par l'angle qu'elle fait avec une direction fixe. Les conditions initiales (r,θ) se transforment après réflexion en (r_1,θ_1) et il est dans ce cas facile de calculer explicitement la dérivée :

$$\frac{\partial r_1}{\partial \theta} = \left[\frac{2mt\,.\sin\theta}{\cos\alpha} - \sin 2\alpha\cos(\theta + 2\alpha)\right]\frac{1}{\sin^2(\theta + 2\alpha)}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \theta} = 1 + \frac{2mt}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial r} = \frac{2m\sin\theta}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial r} = 1 - \frac{2\sin\alpha\ \cos(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+2\alpha)} + \frac{2mt\sin^2\theta}{\cos\alpha\ \sin(\theta+2\alpha)}$$

où t est la coordonnée normale comme auparavant, α l'angle d'incidence (entre la géodésique et la normale au point de réflexion) et m la courbure de $\partial\Omega$. Au vu de ces formules, il est immédiat que ces dérivées varient infiniment peu lorsque m varie infiniment peu, d'où la conclusion.

<u>3ème étape</u> : les deux premières étapes ont consisté à prouver que, aussi bien sur M que sur Ω , la partie standard de la dérivée de l'application de premier retour ne changeait pas si dans le halo de chaque point de réflexion de γ_o on remplaçait le bord $\partial\Omega$ par le cercle osculateur. Nous allons maintenant prouver, et c'est la clé de ce problème de perturbation singulière, que cette partie standard est la même sur M et sur Ω en prouvant que c'est la même sur M'et sur Ω' .

Nous utiliserons toujours la même décomposition de χ qu'à la 1ère étape, et la décomposition analogue de $\chi^{(o)}$ sur Ω'. Là aussi, puisque la partie plane de M' s'identifie à sa projection sur Ω', il est immédiat que les ϕ_j sont infiniment voisines des $\phi_j^{(o)}$ ainsi que leurs dérivées. Il suffit donc de démontrer que pour chaque J = 1,2,...,n, les χ_j et $\chi_j^{(o)}$ ont leurs dérivées infiniment voisines.

A cette fin, nous exploiterons les deux propriétés suivantes du ballon M' (qui n'existent pas sur M) :

a) la symétrie par rapport à la normale à $\partial\Omega$ au point de réflexion.

b) l'invariance par toute rotation d'angle infiniment petit autour du centre de courbure (=centre du cercle osculateur)

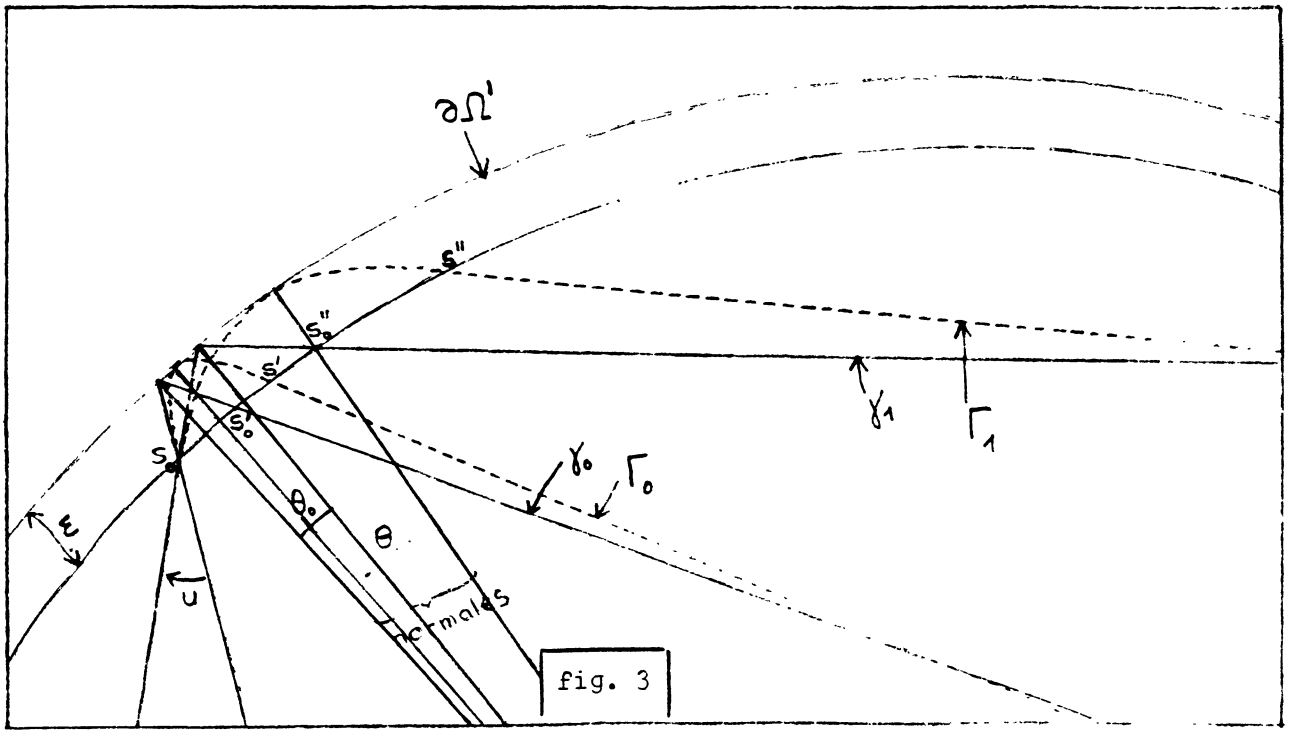

fig. 3

Etudions alors l'une quelconque des applications χ_j. L'invariance par rotation nous permet de supposer que seule la variable ξ varie et nous mesurons sa variation par un angle u (voir figure 3). Considérons deux géodésiques γ_o et γ_1 de Ω' et deux géodésiques Γ_o et Γ_1 de M', qui avant réflexion se comptent toutes en un point de coordonnées $s = s_o$, $t = \varepsilon$ (nous reprenons toujours le même système de coordonnées , cf. §2). Nous désignons par s'_o , s''_o , s' , s'' les valeurs de la coordonnées s aux points où respectivement γ_o, γ_1, Γ_o et Γ_1 recoupent la courbe $t = \varepsilon$ (qui est un arc de cercle). D'après la propriété a) ci-dessus, chaque géodésique est symétrique par rapport à la normale au bord $\partial\Omega'$ issue du point où celui-ci est coupé par la géodésique ; ces normales sont donc les axes de symétrie de Γ_1 et Γ_o, d'une part, de γ_o et γ_1 d'autre part. Soient alors θ l'angle formé par les axes de symétrie de γ_o et γ_1, θ_o celui formé par les axes de symétrie de γ_o et γ_1. La symétrie et l'invariance par rotation nous permettent d'écrire :

$$R_{2\theta}(s',\omega) = (s'', \omega - 2\theta)$$

$$R_{2\theta_o}(s'_o,\omega_o) = (s''_o, \omega_o - 2\theta_o)$$

où $R_{2\theta}$ désigne la rotation d'angle 2θ autour du centre de courbure de $\partial\Omega'$, ω désigne la direction (repérée par un angle) de Γ_1 au point s', et ω_o celle de γ_1 au point s'_o . A partir de là, il est immédiat que, pour un écart angulaire initial u entre les deux géodésiques Γ_1 et Γ_o d'une part, γ_1 et γ_o d'autre part, les écarts angulaires finaux seront :

$$u + 2\theta \quad \text{entre} \quad \Gamma_1 \text{ et } \Gamma_2$$

$$u + 2\theta_o \quad \text{entre} \quad \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 .$$

Par conséquent, dans les coordonnées (s,ω) que nous avons choisies, l'application χ_j vérifie la relation ;

$$\chi_j(s_o,\alpha + u) - \chi_j(s_o,\alpha) = (s'' - s', u + 2\theta)$$

et de même pour $\chi_j^{(o)}$:

$$X_j^{(o)}(s_o,\alpha + u) - \chi_j^{(o)}(s_o,\alpha) = (s''_o - s'_o , u + 2\theta_o) .$$

Or la surface M' est, dans le halo des points de réflecion de γ_o, une surface de révolution : nous pouvons donc appliquer le théorème de Clairaut, qui montre immédiatement que les quantités $s'' - s''_o$, $s' - s'_o$, $\theta - \theta_o$ sont de l'ordre de εu (c'est-à-dire, de façon plus précise, que $\frac{s'' - s''_o}{\varepsilon u}$ $\frac{s' - s'_o}{\varepsilon u}$ $\frac{\theta - \theta_o}{\varepsilon u}$ sont finis). On en déduit qu'il existe une constante standard C telle que :

$$\left|\frac{\chi_j(s_o,\alpha+u)-\chi_j(s_o,\alpha)}{u}-\frac{\chi_j^{(o)}(s_o,\alpha+u)-\chi_j^{(o)}(s_o,\alpha)}{u}\right|\leqslant C\varepsilon$$

Cela implique que les dérivées par rapport à la direction sont infiniment voisines puisque ε est infiniment petit. Quant aux dérivées par rapport à s , elles ne posent pas de problème en vertu de l'invariance par rotation signalée plus haut.

Nous avons ainsi prouvé que les applications χ_j et $\chi_j^{(o)}$ et partant χ et $\chi^{(o)}$ ont leurs dérivées infiniment voisines dans tout le halo (transverse) de γ_o . On en déduit la continuité, lorsqu'on passe continuement de la situation régulière M à la situation singulière Ω , du point fixe et de l'application de Poincaré . C.Q.F.D.

6. CONCLUSION (provisoire)

Les résultats des sections 2 et 3 montrent que les distributions $C^M(t) = \sum_{n\in{}^*\mathbb{N}} \cos\alpha_n^{(\varepsilon)}t$ et $C^\Omega(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \cos\alpha_n^{(o)}t$ sont infiniment proches (pour la topologie des distributions, bien entendu). Notons que la deuxième appartient au modèle standard[1]. Mais le simple fait que C^M et C^Ω soient infiniment proches ne permet pas de comparer leurs singularités. Toutefois, nous pouvons énoncer un théorème concernant les singularités de $C^M(t)$ (en langage courant) :

Théorème 3 : Soit γ_o une géodésique de Ω , fermée, non dégénérée (c'est-à-dire $\det(1-P_{\gamma_o})\neq 0$), de période ℓ_o, et telle que dans un voisinage de ℓ_o il n'y ait aucune autre période de géodésique. Alors, pour ε assez petit, il existe un voisinage de ℓ_o à l'intérieur duquel $C^M(t)$ possède une et une seule singularité ℓ_ε , dont la partie principale est

$$e^{i\frac{\pi}{2}\sigma(\varepsilon,\gamma_o)}\, a(\varepsilon,\gamma_o)\,\delta(t-\ell_\varepsilon)$$

avec $\lim_{\varepsilon\to o} a(\varepsilon,\gamma_o) = \frac{\ell_o}{N}(\det(1-P_{\gamma_o})^{-1/2}$ et $\lim_{\varepsilon\ o}\ell_\varepsilon = \ell_o$, mais où nous ne pouvons rien dire du facteur $e^{i\frac{\pi}{2}\sigma}$. ($\frac{\ell_o}{N}$ est la période primitive de γ_o).

(1) Nous aurions pu nous contenter du langage courant et dire que $\lim_{\varepsilon\to o} C^{M(\varepsilon)} = C^\Omega$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Ce théorème résulte du théorème de Guillemin et Duistermaat [12] et de la section précédente (théorème 2 , traduit en langage courant).

Remarquons en passant que ce théorème 3 est énoncé ici pour le ballon de Birkhoff, c'est-à-dire pour la surface construite à la section 1. Il va de soi, au vu de la démonstration que nous avons donnée du théorème 2, qu'il reste valable pour des surfaces plus générales : par exemple, pour des surfaces dont la courbure est en chaque point, ainsi que ses dérivées, infiniment voisine de celles de $M(\varepsilon)$. Une différence doit cependant être notée : sur une surface vérifiant ces conditions, mais non symétrique par rapport au plan de Ω, nous n'avons plus l'involution $x \longmapsto \hat{x}$, et par conséquent les deux géodésiques que γ_o induit sur M ne seront plus identiques ; en les notant γ_1 et γ_2, la partie principale de la singularité de $C^M(t)$ dans le voisinage de ℓ_o sera

$$\frac{1}{2}\left[e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_1}\frac{\ell_1}{N}\det(1-P_1)^{-1/2}\,\delta(t-\ell_1) + e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_2}\frac{\ell_2}{N}(\det(1-P_2)^{-1/2}\,\delta(t-\ell_2)\right]$$

Mais la conclusion la plus intéressante est peut être celle-ci : si nous comparons l'expression ci-dessus avec celle de Guillemin et Melrose (voir [6]) pour la singularité de $C^{\Omega}(t)$ en $t = \ell_o$, nous devons observer qu'elles sont différentes (pour ε infiniment petit, elles ne sont pas infiniment voisines) et on peut constater que cette différence ne peut provenir uniquement des indices σ_1 , σ_2 . Le présent travail a montré qu'elle ne provient pas du comportement des géodésiques qui, lui, est parfaitement régulier. Donc, elle doit provenir des termes non principaux du développement de la singularité.

BIBLIOGRAPHIE (par ordre de citation)

[0] A. Robinson : Non Standard Analysis, North Holland 1965; 2d Ed. 1974).

[1] J. Chazarain : Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes (Inventiones Math. 24 (1974) pp. 65-82).

[2] L. Hörmander : Fourier Integral Operators I, Acta Mathematica 1971.

[3] L. Hörmander, J.J. Duistermaat : Fourier Integral Operators II (Acta Math. 1971).

[4] R. Melrose : Local Fourier-Airy-Integral Operators (Duke Math. Journal 42 (1975) pp. 583-604).

[5] K. Anderson, R. Melrose : The Propagation of Singularities Along Glidings Rays (Inventiones Math. 41 (1977) pp.197-232).

[6] V. Guillemin, R. Melrose : The Poisson Summation Formula for Manifolds With Boundary (M.I.T. Preprint 1978).

[7] G. D. Birkhoff : Dynamical Systems (A.M.S. Colloquium Publications 1927)

[8] H.P. Mac Kean, I.M. Singer : Curvature and the Eigenvalues of the Laplacian (Journal of Differential Geometry 1 (1967) pp.43-69).

[9] J. L. Callot : Thèse de 3ème cycle, IRMA 1978.

[10] D. Viaud : Exposé n° XII au séminaire de théorie spectrale de Strasbourg 1974 (Publication IRMA, Strasbourg).

[11] T. Kato : Perturbation Theory for Linear Operators (Springer Verlag 1966).

[12] J. J. Duistermaat, V. Guillemin : Spectrum of Elliptic Operators (Inventiones Math. 1975).

[13] J. Chazarain : Séminaire Bourbaki 27e année (74-75), exposé n° 460, février 1975).

***