Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

S. Alinhac

Non-unicité pour des opérateurs à caractéristiques simples

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 4, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1979-1980

NON-UNICITE POUR DES OPERATEURS A CARACTERISTIQUES SIMPLES

par S. ALINHAC

Exposé n° IV

13 Novembre 1979

INTRODUCTION

Dans la première partie, on énonce un théorème de non-unicité pour des opérateurs à caractéristiques complexes simples, et on discute son lien avec les théorèmes de forte unicité connus.

Dans la deuxième partie, on présente une vue d'ensemble du problème de la forte unicité, selon la géométrie de l'opérateur P considéré.

Enfin, on esquisse la preuve du théorème.

§1. UN THEOREME DE NON UNICITE

Théorème : Soit M une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$ de codimension 2, $O \in M$, et $P(x,D_x)$ un opérateur différentiel d'ordre $m \geq 2$, à coefficients C^∞ (complexes). Supposons que le symbole principal $p_m(x,\xi)$ de P, restreint au plan conormal à M en O, n'est pas identiquement nul, et contient un facteur d'ordre 2 elliptique, non réel et à caractéristiques simples.

Alors il existe un voisinage V de O, des fonctions $a \in C^\infty(V)$, $u \in C^\infty(V)$, plates sur $M \cap V$, telles que $Pu + au = 0$ dans V, et Supp u contient un voisinage de O.

Nous dirons qu'un opérateur P a la propriété de forte unicité en M (de codimension quelconque) si

$$u \in C^\infty, \ Pu = 0 \text{ et } u \text{ plate en } M \Rightarrow u \equiv 0 \text{ près de } M.$$

Rappelons qu'un résultat classique d'Aronszajn et Cordes [4] , [8] montre que c'est le cas si P est elliptique d'ordre 2 à coefficients réels, et $M = \{O\}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Le corollaire 2 de Alinhac et Baouendi [3] étend ce résultat au cas où $P_m(O,D_x)$ seulement est à coefficients réels (voir aussi [2] pour le cas de coefficients peu réguliers).

Exemple 1 : Pour $n = 2$, $M = \{O\}$, $m = 2$, P elliptique à caractéristiques simples, le théorème montre que $P + a$ a la propriété de forte unicité en O pour toute perturbation $a \in C^\infty$, plate en O, si et seulement si $P_m(O,D_x)$ est réel (i.e. est le laplacien Δ dans des coordonnées convenables).

Exemple 2 : Toujours dans le plan, choisissons $P = \Delta(\partial_x^2 + d\partial_y^2)$, d constante > 0. Chaque facteur du produit a la forte unicité en O (et est hypoelliptique analytique), cependant, sauf si $d = 1$, il existe une perturbation plate a de P pour laquelle $P + a$ n'a pas la forte unicité en O. Cela montre que le théorème 3 de [3] est optimal.

Remarques : i) Dans le théorème, on ne fait pas l'hypothèse que P est elliptique, pas même transversalement à M.

ii) Si $N \ni 0$ est une variété de codimension > 2, on peut chercher $M \supset N$ pour laquelle le théorème s'applique.

Si par exemple P (elliptique d'ordre 2 à caractéristiques simples) est tel que $P_m(0,D_x)$ est non réel ($x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$), alors pour presque toutes les variétés M de codimension 2 passant par O, il existe une perturbation a telle que $P + a$ n'a pas la forte unicité en M (mais bien sûr aucun hyperplan M n'a cette propriété le théorème de Calderón [7]).

§2. UNE VUE D'ENSEMBLE

Considérons la question de la forte unicité en M (de codimension 2, contenant O) pour un opérateur général P de symbole principal p_m.

A. Cas p_m réel

1) Si P est elliptique, et $m = 2$, $P + a$ possède en fait déjà la forte unicité en O (pour toute perturbation a plate en O) ; si $m > 2$, et sauf cas exceptionnels, il existe une perturbation $P + a$ de P qui n'a pas la forte unicité en M (voir les exemples 1, 2 et le théorème, partie I).

2) Supposons qu'il existe une caractéristique réelle simple $(0,N)$ pour laquelle la courbe caractéristique est transverse à M. Il peut se présenter alors deux cas géométriques assez différents :

a) Supposons que la normale ν à M et à la caractéristique issue de $(0,N)$ soit non caractéristique (ce qui implique en particulier que N n'est pas normal à M) : alors il existe une surface $S \supset M$ et une perturbation a plate sur S pour laquelle $P + a$ n'a pas l'unicité de Cauchy sur S.

En effet, choisissons une phase réelle φ telle que $p_m(x,\nabla\varphi) = 0$, $\nabla\varphi(0) = N$; S sera la surface tissée de M par les courbes caractéristiques issues de $(x,\nabla\varphi(x))$ $(x \in M)$; elle est non caractéristique par hypothèse, et on voit facilement que le théorème 2 de [1] s'applique.

<u>Exemple</u> : Dans $\mathbb{R}^3$, $P = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2$, $M = \{x = y = 0\}$, $N = (0,1,1)$, $\varphi = y + t$, $S = \{x = 0\}$.

b) Supposons N normal à M : on a la même conclusion qu'en a).

En effet, grâce à l'hypothèse de transversalité, on peut prolonger $(0,N)$ en une famille $(x,N(x))$ $(x \in M)$ de caractéristiques normales à M; la surface S tissée de M par les caractéristiques issues de $(x,N(x))$ $(x \in M)$ sera alors partout simplement caractéristique, et on peut appliquer le résultat classique de Mizohata [11].

<u>Exemple</u> : Dans $\mathbb{R}^3$, $P = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2$, $M = \{y = t = 0\}$, $N = (0,1,1)$, $S = \{y+t = 0\}$.

Remarquons que si P est à coefficients analytiques, et M est analytique, la perturbation de P est nécessaire dans l'exemple a) (à cause du théorème de Holmgren), mais pas dans l'exemple b).

Les cas non compris en 2) conduisent à l'étude du problème de Cauchy à partir d'une surface S caractéristique en certains points, mais pas partout ; on ne sait presque rien de ce problème, sinon que les termes d'ordre inférieur de P y jouent un rôle.

B. <u>Cas p_m complexe</u>

1) S'il existe une famille $(x,N(x))$ d'éléments du conormal de M sur lesquels un crochet d'ordre impair de $\mathrm{Re}\, p_m$ et $\mathrm{Im}\, p_m$ est non nul (les caractéristiques de $\mathrm{Re}\, p_m$ correspondantes étant transverses à M), alors P+a n'a pas la forte unicité sur M pour une certaine perturbation plate a (a = 0 dans le cas analytique). Cela résulte du théorème I de [1] (voir [6] dans le cas analytique).

<u>Exemple</u> : Dans $\mathbb{R}^2$, $M = \{0\}$. L'opérateur P est $P = \partial_t + it\partial_x$, $N = (1,0)$. Si on considère $P + b$ au lieu de P, où b est C^∞ plate telle que $(P + b)u = 0$ n'a que $u = 0$ comme solution (voir [9]), on peut trouver une perturbation $P + b + a$ qui n'a pas la forte unicité en 0 ($a = -b$).

Si P est elliptique transversalement à M, P a la forte unicité dans le cas analytique [5] ; dans le cas C^∞, on ne sait pas répondre, sauf dans les cas relevant de A 1) et 2)a), ou relevant du théorème de la partie I.

2) Si P est elliptique, le théorème montre qu'en général $P + a$ n'a pas la forte

unicité pour certaines perturbations a.

Néanmoins, si p_m restreint au conormal de M, n'a que des racines complexes multiples ou conjuguées, on ne sait conclure.

§3. ESQUISSE DE LA PREUVE DU THEOREME

1) Montrons-en le principe sur un exemple.
Soit, dans $\mathbb{R}^2$, $M = \{o\}$, $P = (\partial_y - i\lambda_+\partial_x)(\partial_y - i\lambda_-\partial_x)$, $\lambda_\pm$ constantes réelles non nulles, $\lambda_+^2 \neq \lambda_-^2$.

Posons $\varphi_\pm = x + i\lambda_\pm y$, $u_+ = e^{-\frac{1}{(\alpha\varphi_+)^\nu}}$, $u_- = e^{-\frac{1}{(\varphi_-)^\nu}}$, où α (proche de 1) et $\nu > 0$ sont à choisir ; notons $s(\theta) = \left|\frac{\alpha\varphi_+}{\varphi_-}\right|$ (ici (ρ, θ) sont les coordonnées polaires dans le plan). A cause de l'hypothèse $\lambda_+^2 \neq \lambda_-^2$, s n'est pas constante sur le cercle unité, et possède deux maxima θ_- et $\theta_- + \pi$, et deux minima θ_+ et $\theta_+ + \pi$.

On choisit α en sorte que $s(\theta_-) > 1 > s(\theta_+)$.

Soient maintenant $\chi_\pm$ des fonctions C^∞ sur le cercle, nulles dans un petit voisinage $V_\pm$ de $\theta_\pm$, égales à 1 hors d'un voisinage un peu plus grand $\tilde{V}_\pm$.

Sur le support de $\chi_\pm$, les valeurs de $\varphi_\pm$ évitent un rayon dans le plan complexe, en sorte qu'on peut choisir une détermination de Arg $\varphi_\pm$ et donner un sens à χ_+u_+ et χ_-u_-.

Prenons $u = \chi_+u_+ + \chi_-u_-$; on a

$$Pu = [P,\chi_+]\, u_+ + [P, \chi_-]\, u_- .$$

Sur le support de

$$[P,\chi_\pm],\ [P,\chi_\mp] \equiv 0 ,$$

et

$$Z = \frac{1}{\varphi_-^\nu} - \frac{1}{(\alpha\varphi_+)^\nu} = \frac{1}{(\alpha\rho)^\nu}\left[f(\theta)\right]$$

avec

$$f(\theta) = \left(\frac{\varphi_+}{\rho}\right)^{-\nu}\left[\left(\frac{\alpha\varphi_+}{\varphi_-}\right)^{\nu} - 1\right] .$$

On calcule facilement que $\mathrm{Re}\, f(\theta) = \nu(\log s + O(\nu))$. On choisit $\tilde{V}_\pm$ en sorte que sur $\tilde{V}_\pm$, $\pm s < \pm 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, et alors $\pm\mathrm{Re}\, f < 0$ sur supp $[P,\chi_\pm]$, pourvu que $\nu > 0$ soit choisi assez petit. Cela implique que sur $\tilde{V}_\pm$, $u_\pm / u_\mp$ est une fonction C^∞ plate ; on en déduit facilement que $a = \frac{Pu}{u}$ est une fonction C^∞ plate en O.

2) Dans le cadre général du théorème, la démonstration repose sur le même principe, aux modifications près suivantes :

i) les phases $\varphi_\pm$ (relatives aux racines du facteur dont on suppose l'existence) seront seulement approchées (sauf dans le cas analytique).

ii) les fonctions u_+ et u_- devront être remplacées par des sommes asymptotiques

$$v_\pm \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_\pm^j E_j(\varphi_\pm) , \quad E_0(z) = e^{-\frac{1}{z^\nu}},$$

$E_j(z) = \int_0^z E_{j-1}(s)\,ds$, les $a_\pm^j$ étant solutions (approchées) des équations de transport habituelles.

On aura $Pv_\pm = r_\pm v_\pm$, où $r_\pm$ sont C^∞ plates sur M. Bien entendu, $v_\pm$ n'ont de sens que sur supp $\chi_\pm$

iii) on prendra $u = \chi_+ u_+ + \chi_- u_-$, où $u_\pm = v_\pm(1 + w_\pm)$.

En effet, si on note E l'ensemble $\{|v_+| = |v_-|\}$, on voit facilement que E se compose de quatre "demi-plans", contenant M et coupant un plan normal à M suivant quatre "rayons" sur lesquels $\chi_+ = \chi_- = 1$. La fonction $v = \chi_+ v_+ + \chi_- v_-$ est donc susceptible de s'annuler sur E (et s'annule effectivement en certains points de E), créant une singularité de $a = \frac{Pv}{v}$. Les fonctions $w_\pm$ seront choisies C^∞ plates sur M et telles que $Pu_\pm = R_\pm u_\pm$, où $R_\pm$ sont C^∞ plates sur M et sur E. Un tel ajustement, qui utilise le théorème de Whitney, apparaît également dans [10] , [1] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Alinhac et M. S. Baouendi : Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1978-79, exposé n° XXII et article à paraître.

[2] S. Alinhac et M. S. Baouendi : Unicité forte pour des opérateurs elliptiques : inégalités et contre exemples. Journées "Equations aux Dérivées Partielles", Saint Cast, 1979, et article à paraître.

[3] S. Alinhac et M. S. Baouendi : Uniqueness for the characteristic Cauchy problem and strong unique continuation for higher order partial differential inequalities, à paraître dans Amer. J. of Maths.

[4] N. Aronszajn : A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, J. Math. Pures Appl. (9) 36 (1957) 235-249.

[5] M. S. Baouendi et E. C. Zachmanoglou : Unique continuation of solutions of partial differential equations and inequalities from manifolds of any dimension, Duke Math. Journal 45 (1978), 1-13.

[6] M. S. Baouendi, F. Treves et E. C. Zachmanoglou : Flat solutions and singular solutions of homogeneous linear partial differential equations with analytic coefficients, à paraître à Duke Math. Journal (1979).

[7] A. P. Calderón : Existence and uniqueness theorems for systems of partial differential equations, Proc. Symp. Fluid Dynamics and Appl. Math. (Univ. of Maryland, 1961), Gordon and Breach, New York (1962), 147-195.

[8] H. Cordes : Über die Bestimmtheit der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen durch Anfangsvorgaben, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II a (1956), 230-258.

[9] L. Hörmander : Linear partial differential operators, Springer Verlag, 1963.

[10] L. Hörmander : Non-uniqueness for the Cauchy problem. Lecture Notes in Math. Springer Verlag n° 459, Fourier integral operators and PDE'S (1975), 36-72

[11] S. Mizohata : Solutions nulles et solutions non-analytiques, J. Math. Kyoto Univ. 1-2 (1962), 271-302.

* * *