Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Iooss

Bifurcations élémentaires et transition

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 21, p. 1-24

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A22_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 9 - 1 9 8 0

BIFURCATIONS ELEMENTAIRES ET TRANSITION

par G. IOOSS

Exposé n° XXI

22 Avril 1980

I. INTRODUCTION. RESULTATS EXPERIMENTAUX

Les expériences récentes sur la convection dans des enceintes parallelipipèdiques de faible allongement, notamment par Gollub-Benson [5], [6] et Libchaber-Maurer [15] [16] ont conduit à considérer 4 routes principales pour la transition vers la "turbulence". Ce type de transition progressive se retrouve dans de nombreux cas [2] et ne doit pas être confondu au passage brutal vers la turbulence qu'on observe par exemple en convection dans des enceintes de grand allongement ou lors de l'écoulement dans un tube.

Un trait commun aux 4 routes en question est que si le nombre de Rayleigh augmente (proportionnel à la différence de température entre la plaque inférieure et la plaque supérieure), le fluide (eau, hélium liquide,...) primitivement au repos se met en mouvement stationnaire (ce que l'on voit à un endroit donné est indépendant de t). On a ainsi le passage d'une solution stationnaire des équations -le repos- à une autre solution représentant une convection stationnaire. Cette bifurcation correspond à une rupture de symétrie spatiale de l'état de repos. Si le nombre de Rayleigh est encore augmenté, à cette convection stationnaire succède une convection périodique dans le temps (auto-oscillante). Ceci correspond à ce qu'on appelle une bifurcation de Hopf et correspond à une rupture de symétrie temporelle de la solution que l'on observe, c'est à dire de l'attracteur du système.

Si l'on continue à augmenter le nombre de Rayleigh, alors selon les valeurs des autres paramètres du problème, on peut observer les "routes" suivantes.

Route n° 1 : un dédoublement de période de la solution périodique, suivi d'autres dédoublements, pour arriver enfin à un état chaotique. Les dédoublements de période sont compris en théorie, alors que leur succession n'est vraiment comprise que pour les applications de l'intervalle (dimension 1).

Routes n° 2, 3 et 4 : la solution périodique de fréquence ω_1 laisse place à une solution "quasi-périodique" de fréquences fondamentales ω_1 et ω_2. Ces fréquences sont observables sur le spectre Fourier d'une observable du problème, par exemple la température en un point. On identifie ensuite 3 routes distinctes :

Route n° 2 : Lorsqu'on fait croître encore le nombre de Rayleigh, il y a accrochages des fréquences ω_1 et ω_2 pour certains rapports rationnels ω_1/ω_2, et un dernier accrochage laisse place au chaos.

Route n° 3 : La solution quasi-périodique est à peine observée qu'elle laisse place à une autre solution "quasi-périodique" mais avec 3 fréquences fondamentales ω_1, ω_2, ω_3. Malgré la difficulté d'identification de ces trois fréquences, il semble qu'il n'y ait pas de doute pour ces observations ([6] et communication personnelle de Libchaber). Ensuite on arrive très vite au chaos (ou turbulence) qui se traduit par un spectre Fourier continu.

Route n° 4 : La solution quasi-périodique a en fait une toute "petite" fréquence secondaire ω_2 par rapport à la fréquence ω_1 primitive. On n'a alors pas le temps de voir des accrochages éventuels et l'on observe un phénomène d'intermittance. Ceci consiste en une succession apériodique dans le temps de comportements périodiques (un grand nombre de "périodes") et de comportements chaotiques.

Nous allons, dans ce qui suit, donner une idée des phénomènes mathématiques sous-jacents à presque tous ces types d'observations, à savoir : les bifurcations stationnaires avec rupture de symétrie, les bifurcations de Hopf ou apparitions de cycles auto-excités, le phénomène de dédoublement de la période d'un cycle, la bifurcation vers un tore invariant de dimension 2 (bifurcation de Hopf pour les difféomorphismes). Sur ce tore la solution a l'apparence de la quasi-périodicité en un sens que l'on peut préciser. On peut aussi interpréter les accrochages de fréquences. La bifurcation vers un tore invariant de dimension 3 sur lequel la solution apparaît quasi-périodique avec 3 fréquences fondamentales peut s'expliquer par une interaction entre deux bifurcations proches, il en est de même pour l'apparition d'une "petite" fréquence secondaire. Enfin le phénomène d'"intermittance" a reçu récemment une ébauche d'explication que nous donnons ci-dessous.

Dans la suite, pour simplifier l'exposé, nous considérons une équation différentielle dans $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mu, \mathbf{X}) \tag{1}$$

où $\mathbf{F}$ est de classe C^k, k assez grand, et où μ est un paramètre réel (ou vectoriel quand ce sera précisé). Les exemples concrets cités plus haut vérifient en général un système d'équations aux dérivées partielles d'évolution (du type Navier-Stokes). En fait c'est uniquement le caractère "système dynamique" de ces équations qui nous intéresse et l'on peut se référer à [9] pour les résultats nécessaires qui permettent de raisonner comme en dimension finie (régularité de la solution par rapport au paramètre, aux conditions initiales, au temps, dans un espace approprié). Les résultats mathématiques qui suivent ont tous des démonstrations, mises en références, mais ces explications peuvent être considérées la plupart du temps comme des

conjectures physiques, au sens suivant : il est nécessaire, pour vérifier que la réalité obéit à ces types de modèles, d'effectuer des calculs numériques qui semblent encore hors de portée.

II. BIFURCATIONS STATIONNAIRES. RUPTURE DE SYMETRIE.

Considérons l'équation différentielle (1) où l'on suppose que

(2) $$\mathbf{F}(\mu,0) = 0, \quad \text{et} \quad \mathbf{F} \text{ définie au voisinage de } 0 \text{ dans } \mathbb{R}^{n+1}.$$

On suppose de plus l'existence d'un opérateur linéaire $\mathbf{S}$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que

(3) $$\mathbf{SF}(\mu,\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mu,\mathbf{SX}), \quad \mathbf{S}^2 = \mathbf{I} \quad , \quad \mathbf{S} \neq \mathbf{I}.$$

Ce type de situation est très courant en physique, où l'on connaît explicitement une solution stationnaire d'un problème qui comporte certaine symétrie, la solution connue possédant elle-même cette symétrie.

Pour que la solution 0 perde son unicité lorsque μ passe par 0, il est nécessaire que $D_x\mathbf{F}(0,0)$ ne soit pas inversible. L'hypothèse que l'on fait est alors

(4) 0 est valeur propre simple de $D_x\mathbf{F}(0,0)$, $\boldsymbol{\zeta}_0$ le vecteur propre associé vérifie

$$\mathbf{S}\boldsymbol{\zeta}_0 = -\boldsymbol{\zeta}_0 .$$

En fait, $\boldsymbol{\zeta}_0$ doit être vecteur propre de $\mathbf{S}$ avec une valeur propre ± 1. Le cas + 1 n'entrainant pas de rupture de la symétrie S, ne nous intéresse pas ici.

On a besoin enfin de l'hypothèse de transversalité suivante : soit la valeur propre $\xi(\mu)$ de $D_x\mathbf{F}(\mu,0)$ qui passe par 0 quand $\mu = 0$, alors

(5) $$\xi'(0) \neq 0 \qquad (> 0 \text{ dans la suite}).$$

Si l'on suppose que pour $\mu < 0$ toutes les valeurs propres de $D_x\mathbf{F}(\mu,0)$ sont de parties réelles négatives, l'hypothèse (5) correspond à la perte de stabilité de la solution 0 quand μ devient positif.

On peut montrer l'existence d'une solution non triviale $(\mathbf{X}(\varepsilon), \mu(\varepsilon))$ de classe C^{k-1}, bifurquant à partir de (0,0) en posant $\mathbf{X} = \varepsilon\boldsymbol{\zeta}_o + \mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}$ étant dans un sous-espace supplémentaire de $\boldsymbol{\zeta}_o$, et en résolvant $\mathbf{F}(\mu,\mathbf{X}) = 0$ par rapport à $(\mu,\mathbf{Y})$ après avoir éliminé la solution triviale. On note ici que si $(\mathbf{X},\mu)$ est solution alors $(\mathbf{S}\,\mathbf{X},\mu)$ est aussi solution. Comme $\mathbf{Y}$ est $O(\varepsilon^2)$, on a ainsi 2 solutions distinctes qui s'échangent en appliquant $\mathbf{S}$ et le paramétrage choisi est tel que $\mu(\varepsilon) = \mu(-\varepsilon)$, $\mathbf{S}\mathbf{X}(\varepsilon) = \mathbf{X}(-\varepsilon)$.

Pour des raisons qui apparaissent dans la suite, on va traiter ce problème en le ramenant à une <u>forme normale</u>. L'idée est de procéder à des changements de variables successifs afin de simplifier (1) et d'y faire apparaître naturellement les aspects qualitatifs importants.

Posons $\mathbf{X} = x\,\boldsymbol{\zeta}(\mu) + \mathbf{Y}$ où

$$(6)\qquad \begin{aligned} D_x\mathbf{F}(\mu,0)\,\boldsymbol{\zeta}(\mu) &= \xi(\mu)\,\boldsymbol{\zeta}(\mu)\ , \quad (\mathbf{Y}, \boldsymbol{\zeta}^*(\mu)) = 0,\\ [D_x\mathbf{F}(\mu,0)]^*\boldsymbol{\zeta}^*(\mu) &= \xi(\mu)\,\boldsymbol{\zeta}^*(\mu)\ , \quad (\boldsymbol{\zeta}(\mu)\,\boldsymbol{\zeta}^*(\mu)) = 1. \end{aligned}$$

Le système (1) prend la forme :

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \xi(\mu)x + b(\mu,x,\mathbf{Y})\\ \frac{d\mathbf{Y}}{dt} &= \mathbf{L}(\mu)\mathbf{Y} + \mathbf{B}(\mu,x,\mathbf{Y}), \end{aligned}$$

où $\quad b(\mu,-x,\mathbf{S}\mathbf{Y}) = -b(\mu,x,\mathbf{Y})$

$\quad \mathbf{B}(\mu,-x,\mathbf{S}\mathbf{Y}) = \mathbf{S}\mathbf{B}(\mu,x,\mathbf{Y})$,

où $\mathbf{L}(\mu)$ restreint au sous-espace $\boldsymbol{\zeta}^*(\mu)^\perp$ a un spectre entièrement du côté des réels négatifs, et où

$$(8)\qquad |b| + \|\mathbf{B}\| = O[(|x| + \|\mathbf{Y}\|)^2]\ .$$

Effectuons le changement de variables préservant la symétrie

$$(9)\qquad \mathbf{Y}' = \mathbf{Y} + \sum_{p=2}^{N} \boldsymbol{\Gamma}_p\, x^p \quad , \ \mathbf{S}\boldsymbol{\Gamma}_p = (-1)^p\,\boldsymbol{\Gamma}_p$$

où les coefficients $\in \boldsymbol{\zeta}^*(\mu)^\perp$ dépendent régulièrement de μ. On montre facilement qu'un choix judicieux♦ des $\boldsymbol{\Gamma}_p$ permet de mettre (7) sous la forme (en supprimant les " ' ") :

♦ L'équation $\mathbf{Y}' = 0$ n'est autre qu'une approximation de l'équation de la variété instable de 0 qui est localement attractante.

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \xi(\mu)x + \sum_{p=1}^{2p+1\leqslant N} a_p(\mu)x^{2p+1} + r(\mu,x,\mathbf{Y}) \\ \frac{d\mathbf{Y}}{dt} &= \mathbf{L}(\mu)\mathbf{Y} + \mathbf{R}(\mu,x,\mathbf{Y}) \end{aligned}$$

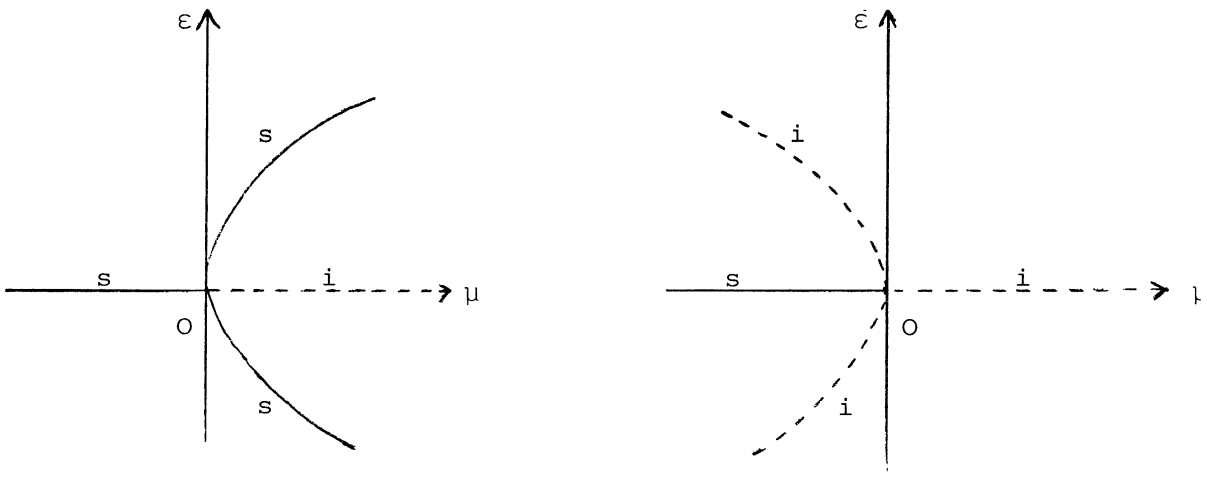
où

$$(11)\qquad |r| + \|\mathbf{R}\| = O(|x|^{N+1} + |x|\|\mathbf{Y}\| + \|\mathbf{Y}\|^2).$$

Il est alors évident sous cette forme que pour t assez grand $\|\mathbf{Y}\| = O(|x|^{N+1})$ et ceci justifie formellement que l'on se restreigne à l'étude de l'équation tronquée :

$$(11\text{bis})\qquad \frac{dx}{dt} = \xi(\mu)x + \sum_{2p+1=3}^{N} a_p\, x^{2p+1} .$$

Cette équation donne qualitativement les résultats cités plus haut ($x^2 \sim -\xi/a_1$) et permet en outre de comprendre le phénomène d'échange de stabilité entre la solution O et les nouvelles solutions stationnaires (Fig 1) perdant la symétrie .



Bifurcation supercritique

Bifurcation subcritique

Figure 1. s = stable ou attractif, i = instable ou répulsif.

III. BIFURCATION DE HOPF POUR LES CHAMPS DE VECTEURS

Reprenons l'équation différentielle (1) où l'on suppose que

(12) $\quad \mathbf{F}(\mu,0) = 0$, $\mathbf{F}$ définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$

comme au § II, mais où l'on considère le cas de la perte de stabilité de la solution 0 comme conséquence de la traversée de l'axe des imaginaires par une paire de valeurs propres conjuguées. Il n'y a ici pas de problème de persistance de la solution 0 a priori, c'est pourquoi l'existence de la solution triviale pour toute une plage de valeurs de μ n'est qu'une conséquence du théorème des fonctions implicites dès qu'une solution stationnaire a été donnée en $\mu = 0$. On fait ici les hypothèses suivantes :

H.1 L'opérateur $D_x\mathbf{F}(0,0)$ a deux valeurs propres simples $\pm i\omega_0$ sur l'axe des imaginaires, les autres valeurs propres étant de parties réelles négatives.

H.2 Soit $\sigma(\mu)$ la valeur propre de $D_x\mathbf{F}(\mu,0)$ qui passe par $i\omega_0$ quand μ passe par 0, alors $\frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \sigma(\mu)\Big|_{\mu=0} > 0$ (hypothèse de transversalité).

Notons ζ_0 (resp. $\zeta(\mu)$) le vecteur propre associé à la valeur propre $i\,\omega_0$ (resp $\sigma(\mu)$), alors on peut montrer l'existence d'un cycle $[\mathbf{X}(\varepsilon,s),\mu(\varepsilon),\ s = \omega(\varepsilon)t \in T^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}]$ où $\mu(\varepsilon) = \mu(-\varepsilon)$, de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ bifurquant à partir de 0. On procède de façon analogue au cas du § II mais en ayant au préalable changé l'échelle des temps de façon à ce que la période du cycle soit 2π , la fréquence $\omega(\varepsilon)$ devient une inconnue qui s'introduit dans l'équation. L'invariance du cycle par les translations dans le temps permet d'avoir le nombre d'équations qu'il faut pour résoudre par le théorème des fonctions implicites où X est cherché dans $\mathcal{C}^1(T^1;\mathbb{R}^n)$ [8] .

Comme au § II., cherchons une forme normale où se dégagent les aspects qualitatifs de cette situation. Posons

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} &\mathbf{X} = z\,\zeta(\mu) + \bar{z}\,\bar{\zeta}(\mu) + \mathbf{Y}\ , \quad z \in \mathbb{C} \\ &(\mathbf{Y},\ \zeta^*(\mu)) = (\mathbf{Y},\ \bar{\zeta}^*(\mu)) = 0 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} &D_x\mathbf{F}(\mu,0)\zeta(\mu) = \sigma(\mu)\ \zeta(\mu) \\ &[D_x\mathbf{F}(\mu,0)]^*\zeta^*(\mu) = \bar{\sigma}(\mu)\ \zeta^*(\mu),\ (\zeta(\mu),\ \zeta^*(\mu)) = 1\ . \end{aligned}$$

Le système (1) prend alors la forme

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \sigma(\mu)z + b(\mu,z,\bar{z},\mathbf{Y}) \\[2ex] \dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{L}(\mu)\mathbf{Y} + B(\mu,z,\bar{z},\mathbf{Y}), \end{cases}$$

où $\mathbf{L}(\mu)$ restreint au sous-espace $\{\zeta^*(\mu),\ \bar{\zeta}^*(\mu)\}^{\perp}$ a un spectre entièrement du côté des réels négatifs, et où

$$|b| + \|\mathbf{B}\| = O(|z| + \|\mathbf{Y}\|)^2.$$

Effectuons le changement de variables :

$$(15)\qquad \begin{aligned} z' &= z + \sum_{p+q=2}^{N} \gamma_{pq}\, z^p \bar{z}^q \\ \mathbf{Y}' &= \mathbf{Y} + \sum_{p+q=2}^{N} \mathbf{\Gamma}_{pq}\, z^p \bar{z}^q \end{aligned}$$

où $\mathbf{\Gamma}_{pq} \in \{\zeta^*, \bar{\zeta}^*\}$. Un choix judicieux♦ des coefficients γ_{pq} et $\mathbf{\Gamma}_{pq}$ permet de mettre (14) sous la forme (supprimant les "'")

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \sigma(\mu)z + \displaystyle\sum_{2p+1=3}^{N} a_p(\mu)z|z|^{2p} + C(\mu,z,\bar{z},\mathbf{Y}) \\[2ex] \dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{L}(\mu)Y + \mathbf{C}(\mu,z,\bar{z},\mathbf{Y}) \end{cases}$$

où

$$|C| + \|\mathbf{C}\| = O(|z|^{N+1} + |z|\|\mathbf{Y}\| + \|\mathbf{Y}\|^2).$$

Sous cette forme, il est facile de voir que pour t assez grand $\|\mathbf{Y}\| = O(|z|^{N+1})$ et ceci justifie formellement l'étude de l'équation tronquée dans $\mathbb{C}$:

$$(17)\qquad \frac{dz}{dt} = \sigma(\mu)z + \sum_{2p+1=3}^{N} \alpha_p z|z|^{2p}$$

♦ L'équation Y' = O n'est autre, ici encore qu'une approcimation de la variété instable de l'origine, sur laquelle se trouve l'orbite périodique.

Notons $\sigma(\mu) = \xi(\mu) + i\eta(\mu)$, et considérons (17) sous forme polaire :
$z = r\, e^{i\theta}$

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \xi(\mu) r + \displaystyle\sum_{2p+1=3}^{N} \alpha_p r^{2p+1} \\[2ex] \dfrac{d\theta}{dt} = \eta(\mu) + \displaystyle\sum_{2p=2}^{N} \beta_p r^{2p} \end{cases}$$

où $\alpha_p + i\beta_p = a_p$ sont des coefficients réguliers en μ et $\eta(0) = \omega_o$, $\xi'(0) > 0$.
Il est clair que la discussion est identique à celle faite pour (11). Le résultat est résumé à la figure 2 ($r^2 \sim - \xi/\alpha_1$ pour le cycle si $\alpha_1(0) \neq 0$) .

Bifurcation supercritique : $\mu(\varepsilon) > 0$,
le cycle bifurqué est attractif.

Bifurcation subcritique : $\mu(\varepsilon) < 0$,
le cycle bifurqué est répulsif.

Figure 2 .

Le changement de variables (15) a simplement permis d'"arrondir" le cycle de façon à ce que le système (18) fournisse le rayon $r(\mu)$ en annulant dr/dt, et la fréquence en reportant $r(\mu)$ dans le second membre de $d\theta/dt$. Notons enfin qu'il existe une démonstration complète utilisant la forme normale (16) [19].

IV. PERSISTANCE D'UN CYCLE INVARIANT ET INTERMITTANCE

Considérons maintenant un cycle solution de (1). Pour étudier la stabilité d'une telle solution périodique, on considère un hyperplan H transverse au cycle en un certain point $\mathbf{X}_o$ et on considère l'application de premier retour des trajectoires issues des points d'un voisinage dans H de X_o. C'est l'application de Poincaré que l'on notera (voir figure 3) :

$$\mathbf{X} \longmapsto \Phi(\mu,\mathbf{X}) \quad \text{dans } H. \tag{19}$$

On connaît a priori un point fixe $\mathbf{X}_o(\mu)$ de $\Phi(\mu,.)$ qui correspond à l'orbite périodique :

$$\Phi(\mu,\mathbf{X}_o(\mu)) = \mathbf{X}_o(\mu) \ . \tag{20}$$

La construction de cette application pour des problèmes du type Navier-Stokes se trouve explicitée dans [9].

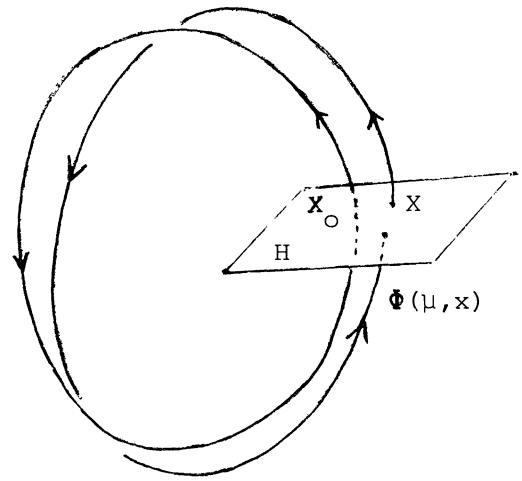


Figure 3.

IV.1 Persistance et stabilité des cycles

Supposons que pour $\mu = \mu_o$, on ait une orbite périodique solution de (1). Cela entraîne l'existence d'un point fixe $\mathbf{X}_o$ de (19) pour $\mu = \mu_o$. Si 1 n'est pas valeur propre de $D_x\Phi\ (\mu_o, \mathbf{X}_o)$ on en déduit, par le théorème des fonctions implicites, l'existence d'une famille de points fixes $\mathbf{X}_o(\mu)$ pour μ dans un intervalle contenant μ_o. Ceci entraîne la persistance de l'orbite périodique pour ces valeurs de μ. Tant qu'aucune valeur propre de $D_x\Phi\ [\mu, \mathbf{X}_o(\mu)]$ n'atteint pas 1, la solution périodique persiste.

La stabilité d'un cycle est déterminée par la position du spectre de l'opérateur linéaire $D_x\Phi\ [\mu, \mathbf{X}_o(\mu)]$ par rapport au cercle unité de $\mathbb{C}$. Si toutes les valeurs propres sont de modules < 1, alors le point fixe de $\Phi(\mu,.)$ est attractif, ce qui entraîne la stabilité de l'orbite périodique pour (1). Si une valeur propre est de module > 1, alors le point fixe est répulsif et le cycle solution de (1) est instable.

Dans la suite nous étudions ce qui advient lorsque une valeur propre réelle ou deux valeurs propres conjuguées s'échappent du disque unité, causant soit la disparition du cycle, soit la perte de sa stabilité s'il continue à exister.

IV.2 Disparition d'un cycle

Supposons que pour $\mu = 0$, 1 soit valeur propre simple de $D_x\ \Phi(0,0)$, les autres valeurs propres étant de module < 1, où on a supposé $\Phi(0,0) = 0$ pour simplifier les notations. On n'a pas ici $\Phi(\mu,0) = 0$ pour $\mu \neq 0$.

Posons

$$D_x\ \Phi(0,0) = \mathbf{A}_1\ ,\ \mathbf{A}_1\ \zeta_o = \zeta_o\ ,\ \mathbf{A}_1^*\ \zeta_o^* = \zeta_o^*;\ (\zeta_o, \zeta_o^*) = 1, \tag{21}$$

et décomposons comme d'habitude :

$$\mathbf{X} = x\ \zeta_o + \mathbf{Y} \tag{22}$$

alors l'application $\Phi(\mu,.)$ prend la forme

$$(x, \mathbf{Y}) \longmapsto (x_1, Y_1)\ , \qquad \mathbf{Y} \text{ et } \mathbf{Y}_1 \in \zeta_o^{*\perp}. \tag{23}$$

Ici encore, on peut simplifier le développement de Taylor de $\Phi(\mu,X)$ en opérant un changement de variables adéquat ♦ de la forme

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{Y} + \Gamma_1\mu + \sum_{p+q\geqslant 2}^{N} \Gamma_{pq}\ \mu^p x^q\ ,\ \Gamma_1,\ \Gamma_{pq} \in \zeta_o^{*\perp}. \tag{24}$$

On aboutit finalement (en supprimant les " ′ ") à :

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \alpha_1\mu + \sum_{p+q\geqslant 2}^{N} \alpha_{pq}\ \mu^p x^q + r(\mu,x,\mathbf{Y}) \\ \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{A}_1\mathbf{Y} + \mathbf{R}(\mu,x,\mathbf{Y}), \end{aligned} \tag{25}$$

où $|r| + \|\mathbf{R}\| = O[(|\mu|+|x|)^{N+1} + (|\mu|+|x|)\|\mathbf{Y}\| + \|\mathbf{Y}\|^2]$. Notons que $\mathbf{A}_1$ restreint à $\zeta_o^{*\perp}$ est contractant ce qui justifie l'étude de la forme tronquée en dimension 1 de l'application :

$$x_1 = x + \alpha_1\mu + \alpha_{2o}\ \mu^2 + \alpha_{11}\ \mu x + \alpha_{o2}x^2\ . \tag{26}$$

On vérifie facilement que si par exemple $\alpha_1\ \alpha_{o2} > 0$ (cas de la figure 4) alors il existe deux points fixes pour $\mu < 0$, l'un attractif, l'autre répulsif. D'autre part il n'y a plus de point fixe au voisinage de 0 pour $\mu > 0$.

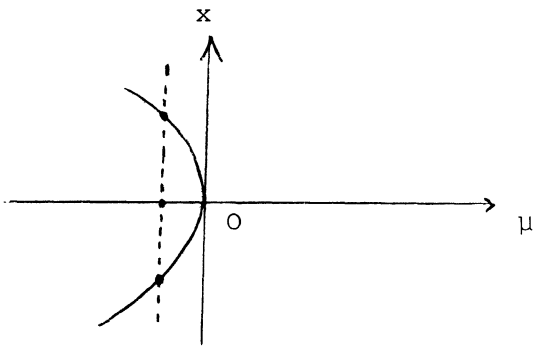


Figure 4. Cas $\alpha_1\ \alpha_{o2} > 0$.

♦ Y' = 0 représente une approximation de la variété centrale de dim 1, qui passe par 0.

Cela correspond, pour l'équation (1) à la présence effective de 2 cycles pour $\mu < 0$, dont l'un n'est pas observable car instable, qui viennent se confondre pour $\mu = 0$ avant de disparaître.

Pour $\mu > 0$ petit, la situation est représentée sur la figure 5 : si on part d'une valeur de x voisine de 0, un très grand nombre d'itérés successifs vont rester au voisinage de 0, puis, l'étude locale ne donne pas d'autre renseignement. C'est là que se place l'interprétation due à Y. Pomeau et P. Manneville [18] du phénomène d'intermittance. Le grand nombre d'itérés de l'application qui diffèrent peu du point fixe qui vient de disparaître quand μ est devenu > 0, correspond à un comportment apparemment périodique de la solution de (1) (voir figure 5). Mais ceci n'a lieu que pour une durée finie de t. Ensuite, le système fait une excursion loin de 0 et si la trajectoire revient, par un processus que l'on peut décrire par une étude locale, au voisinage de 0, alors le comportement apparemment périodique se reproduit. C'est bien une caractéristique du phénomène d'intermittance (il semble néanmoins que l'intermittance observée soit de nature plus complexe et corresponde plutôt à la disparition d'un tore invariant).

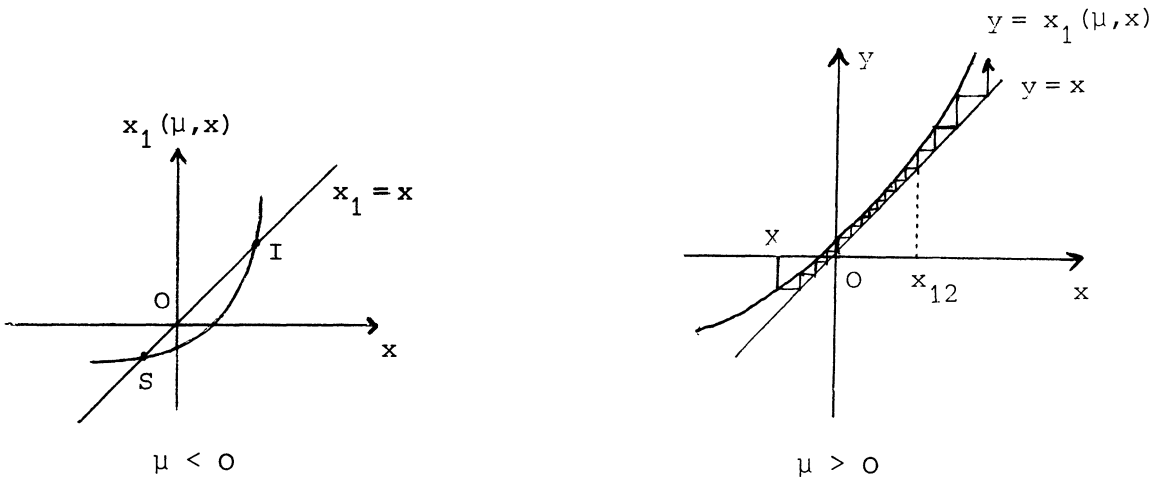


Figure 5 . Disparition d'orbite et intermittance

V. DEDOUBLEMENT D'ORBITE

Supposons que l'équation différentielle (1) ait une orbite périodique pour $\mu = 0$, et considérons l'application de Poincaré $\Phi(\mu,.)$ pour μ voisin de 0. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de $D_x \Phi(0,\mathbf{X}_0)$ de façon à ce que le cycle persiste et on translate l'origine pour avoir

$$\Phi(\mu,0) = 0. \tag{27}$$

Dans ce paragraphe on suppose que pour $\mu = 0$, -1 est valeur propre simple de $D_x \Phi(0,0)$, ce qui est la seule façon générique pour une valeur propre réelle d'échapper du disque unité (on a étudié au § IV le cas +1). On suppose aussi que les autres valeurs propres sont de module < 1. Procédant alors comme en (22), (23) en notant $\zeta(\mu)$ le vecteur propre relatif à la valeur propre $-(1 + \xi(\mu))$ qui passe par -1 pour $\mu = 0$, on peut effectuer un changement de variables de la forme

$$\begin{cases} x' = x + \sum_{p=1}^{N} \gamma_p(\mu) x^p \quad , \text{ avec } \quad \gamma_{2p+1} = 0 \quad , \\ \mathbf{Y}' = \mathbf{Y} + \sum_{p=1}^{N} \mathbf{\Gamma}_p(\mu) x^p \quad , \end{cases} \tag{28}$$

et l'on aboutit à une application de la forme :

$$(x,\mathbf{Y}) \longmapsto (x_1,\mathbf{Y}_1) \qquad \text{avec}$$

$$\begin{cases} x_1 = -[1 + \xi(\mu)]x + \sum_{2p+1=3}^{N} \alpha_p(\mu) x^{2p+1} + r(\mu,x,\mathbf{Y}) \\ \mathbf{Y}_1 = \mathbf{A}_1(\mu)\mathbf{Y} + \mathbf{R}(\mu,x,\mathbf{Y}) \end{cases} \tag{29}$$

où $r + \|\mathbf{R}\| = O(|x|^{N+1} + |x|\|\mathbf{Y}\| + \|\mathbf{Y}\|^2)$, et où $\mathbf{A}_1$ est contractant dans le sous-espace des Y. On fait alors l'hypothèse de transversalité

$$\xi'(0) > 0, \tag{30}$$

qui exprime la perte de stabilité du cycle de base quand μ devient > 0. L'étude de la forme tronquée de l'application, en dimension 1 :

$$x_1 = -(1+\xi)x + \sum^{N} \alpha_p x^{2p+1} \tag{31}$$

fournit aisément l'existence de 2 points périodiques d'ordre 2 qui s'échangent par l'application $\Phi(\mu,.)$, la bifurcation n'ayant lieu que pour $\mu > 0$ ou pour $\mu < 0$. (voir figure 1 avec $x \equiv \varepsilon$). On a $x^2 \sim \xi(\mu)/\alpha_1(0)$ si $\alpha_1(0) \neq 0$.

Ces deux points fixes d'ordre 2 correspondent à l'existence d'une trajectoire de (1) qui fait 2 tours avant de se refermer (voir figure 6). Sa période sera voisine du double de celle du cycle de base qui a perdu sa stabilité.

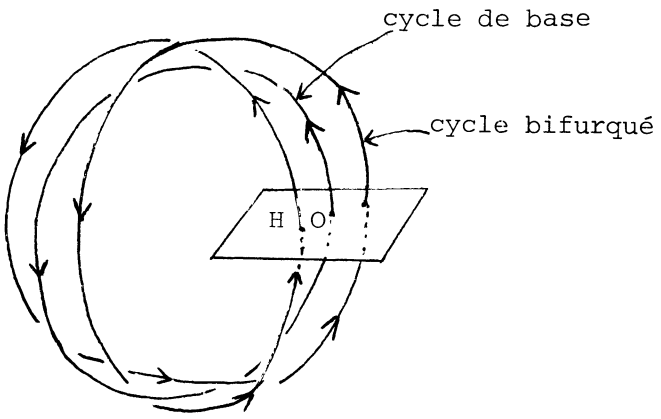


Figure 6 : dédoublement d'orbite.

VI. BIFURCATION DE HOPF POUR L'APPLICATION DE POINCARE

Supposons que l'équation différentielle (1) ait une orbite périodique pour $\mu = 0$ et considérons l'application de Poincaré $\Phi(\mu,.)$ pour μ voisin de 0. Comme au § V on suppose que 1 n'est pas valeur propre de $D_x \Phi(0,0)$ et on pose

$$\Phi(\mu,0) = 0 . \tag{32}$$

Dans ce § on suppose que pour $\mu = 0$, λ_0 et $\bar{\lambda}_0$ vérifiant $|\lambda_0| = 1$ sont valeurs propres simples de $D_x \Phi(0,0)$, le reste du spectre étant de module < 1.

Posons

$$\begin{aligned} D_x \Phi(\mu,0) \; \zeta(\mu) &= \lambda(\mu) \; \zeta(\mu) \\ [D_x \Phi(\mu,0)]^* \zeta^*(\mu) &= \bar{\lambda}(\mu) \; \zeta^*(\mu) \;, \quad (\zeta(\mu), \zeta^*(\mu)) = 1 \;, \end{aligned} \tag{33}$$

où $\lambda(\mu)$ est la valeur propre qui passe par λ_o pour $\mu = 0$, et décomposons $\mathbf{X}$ comme d'habitude :

$$\mathbf{X} = z\,\boldsymbol{\zeta}(\mu) + \bar{z}\,\bar{\boldsymbol{\zeta}}(\mu) + \mathbf{Y}. \tag{34}$$

Pour mettre l'application $(z,\mathbf{Y}) \longmapsto (z_1,\mathbf{Y}_1)$ sous une forme normale on utilise un changement de variables de la forme

$$\begin{aligned} z' &= z + \sum_{p+q\geqslant 2}^{N} \gamma_{pq}(\mu) z^p \bar{z}^q \\ \mathbf{Y}' &= \mathbf{Y} + \sum_{p+q\geqslant 2}^{N} \boldsymbol{\Gamma}_{pq}(\mu) z^p \bar{z}^q , \end{aligned} \tag{35}$$

et on doit distinguer différents cas selon que λ_o est ou non racine de 1.

Si $\lambda_o^n \neq 1\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*$, alors un choix judicieux des γ_{pq}, $\boldsymbol{\Gamma}_{pq}$ permet de mettre l'application $\boldsymbol{\Phi}(\mu,.)$ sous la forme :

$$z_1 = \lambda(\mu) z + \sum_{p=1}^{2p+1\leqslant N} a_p(\mu) z^{p+1} \bar{z}^p + C(\mu,z,\bar{z},\mathbf{Y}) \tag{36}$$

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{A}_1(\mu)\mathbf{Y} + \mathbf{C}(\mu,z,\bar{z},\mathbf{Y}), \tag{37}$$

où

$$|c| + \|\mathbf{C}\| = o\,(|z|^{N+1} + |z|\|\mathbf{Y}\| + \|\mathbf{Y}\|^2),$$

et où $\mathbf{A}_1$ est contractant dans le sous-espace des $\mathbf{Y}$.

Si $\lambda_o^n = 1$, $n \geqslant 3$, il faut remplacer (36) par :

$$z_1 = \lambda(\mu) z + b(\mu)\bar{z}^{n-1} + \sum_{p=1}^{2p+1\leqslant n} a_p(\mu) z^{p+1} z^p + c(\mu,z,\bar{z},Y) \tag{38}$$

où

$$|c| = o\,(|z|^{n+1} + |z|\|\mathbf{Y}\| + \|\mathbf{Y}\|^2).$$

L'étude de (36) tronquée (sans c) donne immédiatement le rayon d'un cercle invariant par $\boldsymbol{\Phi}(\mu,.)$; $r(\mu)$ vérifie :

(39) $$1 = |\lambda(\mu)|[1 + \mathrm{Re}(\frac{a_1}{\lambda})r^2 + O(r^4)]$$

et sur ce cercle l'application de Poincaré revient à la rotation

(40) $$\theta \longmapsto \theta + \arg \lambda(\mu) + \mathrm{Im}(\frac{a_1}{\lambda})r^2(\mu) + O(\mu^2).$$

Ce résultat formel peut être justifié à condition de faire les hypothèses suivantes :

<u>Hypothèses de transversalité</u> :

(41) $$\frac{d}{d\mu}|\lambda(\mu)| \Big|_{\mu=0} > 0, \quad \mathrm{Re}(\bar{\lambda}_o a_1(0)) \neq 0 ,$$

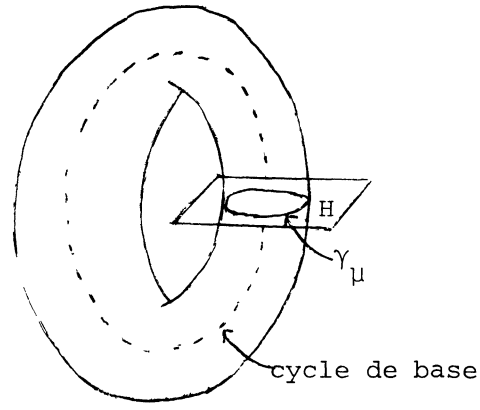
<u>Non résonnance forte</u> :

(42) $$\lambda_o^n \neq 1 \qquad \text{pour } n = 1,2,3,4 .$$

<u>Remarque</u> : Les cas $\lambda_o = 1$ ou -1 ($n = 1$ ou 2) ont été vus précédemment. Les cas $\lambda_o^3 = 1$ ou $\lambda_o^4 = 1$ sont non génériques et donnent une bifurcation vers un nouveau cycle de période voisine respectivement de 3 fois ou 4 fois la période du cycle de base [10] . Dans le cas $\lambda_o^4 = 1$, il se peut qu'il n'y ait pas une telle bifurcation "subharmonique", mais alors on peut montrer [22] que l'on obtient un tore invariant comme pour le cas de l'hypothèse (42).

Si l'on fait les hypothèses (41), (42), alors l'application de Poincaré $\Phi(\mu,.)$ a une courbe fermée simple γ_μ invariante qui bifurque à partir de 0, soit pour $\mu > 0$, soit pour $\mu < 0$. γ_μ est attractive pour $\mu > 0$, répulsive dans l'autre cas.

Ce cercle invariant pour $\Phi(\mu,.)$ correspond à l'existence d'un tore de dimension 2 invariant par l'équation (1) (en tout point du tore, le champ de vecteurs (1) est tangent). Ce théorème énoncé par Yu. I. Neimark [17], fut démontré d'abord par R. J. Sacker [20] puis, indépendamment par D. Ruelle et F. Takens [19] (voir figure 7).



<u>Figure 7</u>

En fait, ce qui nous intéresse est le comportement des trajectoires de (1) sur ce tore invariant. Pour le décrire on dispose de résultats asymptotiques au voisinage de la bifurcation [11] . Revenons à l'équation (1), et notons

$$\hat{\mathbf{x}}(\tau,\mu) \quad , \quad \tau = \hat{\omega}(\mu)t \tag{43}$$

le cycle solution de base, où $\hat{\mathbf{x}}$ est 2π périodique en τ. Alors, si on considère le cas $\lambda_o^n \neq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, les trajectoires de (1) qui sont sur le tore invariant ont la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}\,[\tau,\mu(\varepsilon)] + \displaystyle\sum_{p+q\geqslant 1}^{N} \varepsilon^{p+q} e^{i(p-q)\theta}\, \mathbf{x}_{pq}[\tau,\mu\ (\varepsilon)] + O(\varepsilon^{N+1}) \\ \mu(\varepsilon) = \displaystyle\sum_{2p\leqslant N} \mu_{2p}\, \varepsilon^{2p} + O(\varepsilon^{N+1}) \end{cases} \tag{44}$$

$$\theta(\tau) = \Omega(\varepsilon^2)\tau + \theta_o + \chi(\tau,\varepsilon) \quad , \quad \left|\frac{\partial\chi}{\partial\tau}\right| = O(\varepsilon^N), \tag{45}$$

où les X_{pq} sont 2π -périodiques en τ et où Ω est un polynôme de ε^2. La forme asymptotique (44) met en évidence le tore paramétré par (θ,τ), son amplitude étant de l'ordre de ε . Cette description des solutions permet d'expliciter l'application de Poincaré restreinte au cercle invariant γ_μ : f_ε : $\theta(O) \longmapsto \theta(2\pi)$.
On a alors :

$$f_\varepsilon(\theta_o) = \theta_o + 2\pi\,\Omega(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^N)$$

qui n'est autre que (40) écrit différemment.

Le difféomorphisme du cercle f_ε a un nombre de rotation ρ_ε défini par

$$\rho_\varepsilon = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi}\,\frac{f_\varepsilon^k - Id}{k}$$

où la limite est uniforme, et ne dépend pas de l'argument (Poincaré). Nous avons ici l'estimation :

$$\rho_\varepsilon = \Omega(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^N) \ . \tag{46}$$

D'autre part, si pour $\varepsilon_o \neq O$, ρ_{ε_o} est rationnel (=p/q) on sait qu'il existe 2 trajectoires périodiques sur le tore, faisant q tours avant de se refermer, l'une étant attractive, l'autre répulsive, et cela reste vrai en général pour ε voisin de ε_o.

La forme (46) de ρ_ε montre que l'intervalle éventuel où ρ_ε est constant est d'ordre $O(\varepsilon^N)$ $\forall N$, donc décroît plus vite que toute puissance de ε quand $\varepsilon \to 0$ (voir figure 8).

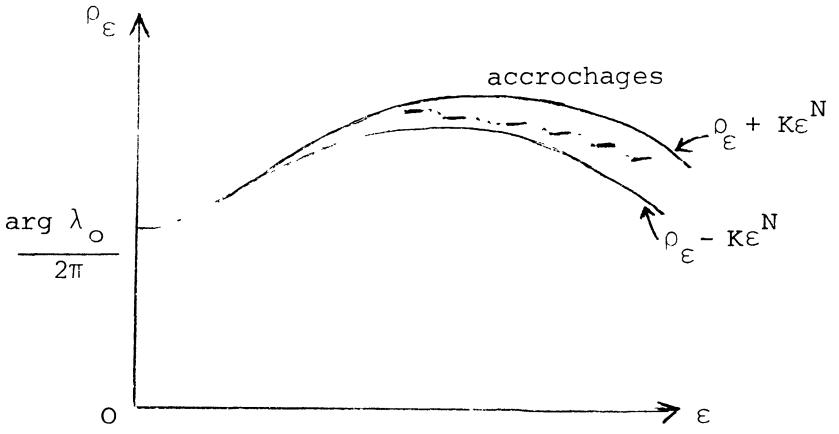


Figure 8 : nombre de rotation ρ_ε, accrochages de fréquences.

Enfin, on montre grâce à la forme de la loi du mouvement sur les trajectoires $\tau = \tau(t)$ que l'on peut écrire les solutions de (1) sur le tore :

$$\mathbf{X}(t) \simeq \mathfrak{X}(\omega(\varepsilon)t,\ \rho_\varepsilon\omega(\varepsilon)t) \tag{47}$$

en un sens asymptotique, où $\mathfrak{X}$ est 2π -périodique par rapport à chacun de ses arguments.

Les résultats (46), (47) sont encore vrais si $\lambda_o^n = 1$, $n \geqslant 5$ [11] mais plus délicats à démontrer car il peut arriver un cas, non générique, de "raisonnance faible" où la solution tend vers une solution périodique subharmonique, le nombre de rotation ρ_ε restant constant, égal à un nombre rationnel à partir de $\varepsilon = 0$. Ces raisonnances faibles ne peuvent arriver que si un nombre fini de conditions algébriques sont réalisées par le système [1], [11].

Le résultat (47) permet d'interpréter les observations expérimentales selon lesquelles la solution est "quasi-périodique" avec 2 fréquences fondamentales. Le rapport des fréquences est par définition ρ_ε, et peut rester constant pour les valeurs rationnelles. Il y a alors "accrochage de fréquences". Seuls sont visibles expérimentalement les accrochages tels que $\rho_\varepsilon = p/q$ avec p et q assez petits, ceci à cause du dispositif adopté, par observation du spectre Fourier sur un intervalle fini de fréquences. D'autre part, près de la bifurcation on ne peut pas voir d'accrochage à une cause de la petitesse des paliers (figure 8) (Libchaber et al. arrivent néanmoins à voir jursqu'à 5 paliers dans certaines expériences).

VII. INTERACTIONS ENTRE BIFURCATIONS PRESQUE SIMULTANEES

On peut se poser le problème de l'existence de systèmes "simples" (1) engendrant toutes les bifurcations décrites plus haut. En fait, ceci est possible en considérant des cas où deux bifurcations décrites plus haut se superposent.

VII.1 Le cas le plus simple est celui où une bifurcation du type "fourche" (§ II) et une bifurcation du type Hopf (§ III) ont lieu presque simultanément (figure 9). On considère l'équation (1), avec les hypothèses (2), (3) et

H'.1 : $D_x\mathbf{F}(0,0)$ a 3 valeurs propres simples $\pm i\omega_0$ et 0 sur l'axe des imaginaires, les autres valeurs propres étant de parties réelles négatives. De plus, le vecteur propre ξ_0 associé à la valeur propre 0 vérifie $\mathbf{S}\,\xi_0 = -\xi_0$.

Figure 9. Spectre de $D_x\mathbf{F}(\mu,0)$

Pour décrire complètement la situation, il est nécessaire maintenant d'avoir 2 paramètres $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$. On note les valeurs propres voisines de $i\omega_0$ et 0, respectivement $\sigma(\mu) = \alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ et $\gamma(\mu)$, ainsi la condition de transversalité s'exprime

H'.2 : $$\left|\frac{\partial(\gamma,\alpha)}{\partial(\mu_1,\mu_2)}\right| \neq 0 \text{ en } \mu = 0 .$$

Ici encore, on peut se ramener à l'étude d'une forme normale réduite en dimension 3 [14] :

(48) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \gamma x + a_{30}x^3 + a_{12}x\,r^2 \\ \dfrac{dr}{dt} = \alpha r + b_{21}x^2 r + b_{03}r^3 \end{cases}$$

(49) $$\frac{d\theta}{dt} = \beta + b_{20}x^2 + b_{02}r^2 ,$$

où $x\,\xi(\mu) + re^{i\theta}\zeta(\mu) + re^{-i\theta}\bar{\zeta}(\mu)$ représente la partie principale (après changement de

variable) des solutions de (1) pour t assez grand et où par exemple on peut poser

$$\gamma = \mu_1 \quad , \quad \alpha = \mu_1 - \mu_2 \ . \tag{50}$$

Une solution stationnaire de (48) où $r \neq 0$ correspond alors à une solution périodique de (1), à cause de $\theta(t)$. On obtient grâce à l'étude de (48) une idée formelle des bifurcations primaires et secondaires éventuelles de solutions stationnaires ou périodiques. En fait, un fait intéressant qui peut se produire se voit sur (48) : il s'agit d'une éventuelle bifurcation de Hopf en (x,r) à partir d'une solution stationnaire où x et r sont $\neq 0$. Comme cette solution est voisine de 0, l'opérateur linéaire (dimension 2) qui détermine sa stabilité a des valeurs propres très petites. Ce fait engendre (pour le système en (x,r)) une bifurcation de Hopf avec une fréquence ω voisine de 0 à la bifurcation. Cela donne une éventuelle bifurcation tertiraire où cette deuxième fréquence naturelle vient s'ajouter à la première qui est voisine de β (ordre 1). C'est une solution sur un tore invariant de dimension 2 mais de nature un peu spéciale. Les ordres de grandeur sont compliqués et les démonstrations sont dans [14].

Ce type d'interaction permet d'expliquer la présence dans certaines expériences de solutions bifurquant à partir d'une solution périodique vers une solution à 2 fréquences dont l'une, très petite, croît quand on s'éloigne de la bifurcation. L'étude systématique des types de bifurcations qu'on rencontre dans ce cas est faite dans [14], deux exemples sont donnés à la figure 10.

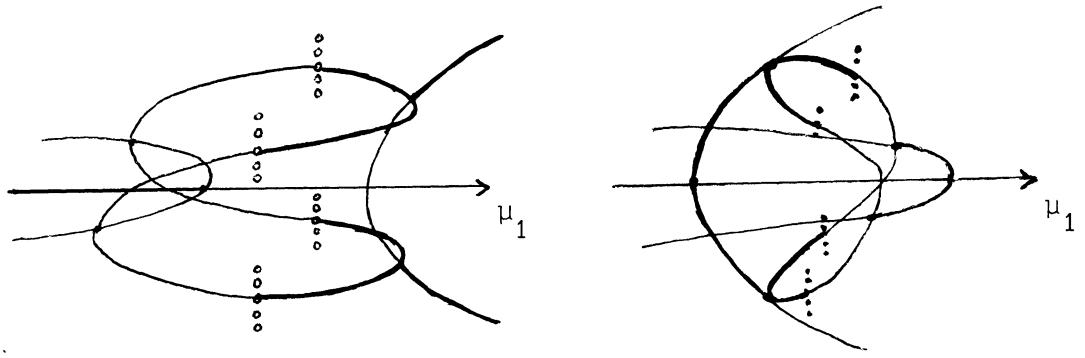


Figure 10. 2 cas typiques de bifurcations successives. L'axe des x est vertical, l'axe des r est orthogonal à la feuille. Les courbes indiquées en gras correspondent à des solutions stables. Les solutions tertiaires peuvent être stables ou non selon le problème.

VII.2 Autres interactions

On peut aussi considérer l'interaction de deux bifurcation de Hopf (figure 11)

Figure 11 . Spectre de $D_x F(\mu,0)$

Dans le cas où $\omega_1/\omega_o \notin \mathbb{Q}$, on se ramène à l'étude du système (48) où x et r sont les modules de 2 variables complexes dont les arguments vérifient des équations de la forme (49). Cela donne déjà 2 fréquences naturelles (voisines de ω_o et ω_1) pour toute solution stationnaire de (48) avec x et $r \neq 0$.

Les bifurcations primaires (soit x, soit r = 0) sont ici du type Hopf (§ III), les bifurcations secondaires du type de celle du § VI et donnent donc des tores invariants de dimension 2, les bifurcations tertiaires donnent alors des tores invariants de dimension 3 !, avec une "petite fréquence tertiaire" naturelle. Dans les cas résonnants, où $\omega_1/\omega_o = m/n$, les phénomènes peuvent être beaucoup plus compliqués, déjà au niveau des bifurcations primaires vers des cycles [12].

Signalons enfin que l'interaction entre 2 bifurcations de Hopf du type du § VI (figure 12) a été considérée

Figure 12. Spectre de $D_x \Phi(\mu,0)$.

par Jost et Zehnder [13] sous une optique différente où la succession des bifurcations n'apparaît pas, non plus que l'éventualité d'une bifurcation tertiaire. On peut encore ici se ramener à l'étude d'une application simple dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, d'un type généralisant (36), et dont le traitement est analogue à celui de (48).

Les bifurcations primaires correspondent à des tores de dimension 2, invariants par (1) comme au §.VI, les bifurcations secondaires à des tores de dimension 3 (avec 3 "fréquences" de même ordre de grandeur), ce qui semble être physiquement observé dans [6] et par Libchaber et al.) Enfin les bifurcations tertiaires éventuelles donneraient des tores de dimension 4, invariants par (1), avec une petite 4ième fréquence naturelle.

Il est bien connu que les trajectoires de (1) sur de tels tores peuvent avoir une structure très compliquée, et donner lieu à des attracteurs étranges [19], ce qui nous rapproche de la compréhension d'un certain type de "turbulence".

Remarque : Pour les bifurcations vers des tores invariants de dimension $\geqslant 3$, il faut noter que les choses ne sont pas aussi "nettes" que dans les autres cas. On ne sait pas, a priori, ce qui se passe dans une petite région au voisinage du point de bifurcation, comme vu dans [3] [4]. Ici, les hypothèses de quasi-simultanéité de passage des valeurs propres, force l'existence de tels tores invariants même si le voisinage immédiat de la bifurcation reste mystérieux.

Notons enfin qu'en dehors de ces simultanéités toujours possibles dès qu'un système physique dépend de plusieurs paramètres, certaines symétries spatiales des problèmes physiques non prises en considération ici, peuvent entraîner des successions compliquées de bifurcations (par exemple pour le problème de Taylor de l'écoulement entre 2 cylindres coaxiaux en rotations [21][7]).

REFERENCES

[1] V. I. Arnold : Loss of stability of self-oscollations close to resonance and versal deformations of equivariant vector fields. Funk. Anal. Ego. Priloz. 11, 2, 1-10 (1977).

[2] P. Bergé et Y. Pomeau : La turbulence. La Recherche 110, 422-432 (1980).

[3] A. Chenciner et G. Iooss : Bifurcations de tores invariants. Arch. Rat. Mech. Anal. 69, 2, 109-198 (1979).

[4] A. Chenciner et G. Iooss : Persistance et bifurcation de tores invariants. Arch. Rat. Mech. Anal. 71, 4, 301-306 (1979).

[5] J. P. Gollub and S. V. Benson : Phase locking in the oscillations leading to turbulence. Pattern formation, H. Haken ed. Springer 1979.

[6] J. P. Gollub and S. V. Benson : Time dependent instabilities and the transition to turbulent convection. A paraître dans J. Fluid Mech.

[7] M. Gorman, L. Reith, H. L. Swinney : Transition to turbulence in the flow between concentric rotating cylinder . Proc. New York Acad. Sciences, Dec. 79 (à paraître).

[8] G. Iooss : Bifurcation et stabilité, Pub. Math. d'Orsay n° 31, 1974.

[9] G. Iooss : Sur la deuxième bifurcation d'une solution stationnaire de systèmes du type Navier-Stokes. Arch. Rat. Mech. Anal. 64,4, 339-369 (1977).

[10] G. Iooss and D. D. Joseph : Bifurcation and stability of nT-periodic solutions branching from T-periodic solutions at points of resonance. Arch. Rat. Mech. Anal. 66, 2, 135-172 (1977).

[11] G. Iooss and D. D. Joseph : The behavior of solutions lying on an invariant 2-torus arising from the bifurcation of a periodic solution. Bifurcation theory, Bielefeld, Oct. 79, Pitman research notes (à paraître).

[12] G. Iooss and W. F. Langford : On the interactions of two Hopf bifurcations (en préparation).

[13] R. Jost and E. Zehnder : A generalization of the Hopf bifurcation theorem. Helvetica Physica Acta, 45, 258-276 (1972).

[14] W. F. Langford and G. Iooss : Interactions of Hopf and pitchfork bifurcations. Workshop on bifurcation problems. Mittelmann Ed. Birkhäuser-Lecture Notes 1980 (à paraître)..

[15] A. Libchaber et J. Maurer : Une expérience de Rayleigh-Bénard de géométrie réduite; multiplication, accrochage et démultiplication de fréquences. J. de Physique, C 3, suppl. n°4, 41, 51-56 (1980).

[16] J. Maurer and A. Libchaber : Rayleigh-Bénard experiment in liquid hélium; frequency locking and the onset of turbulence. J. de Physique Lettres, 40, L 419-423 (1979).

[17] Yu I. Neimark : On some cases of periodic motions depending on parameters. Dokl. Akad. Nauk. SSR, 129, 736-739 (1959).

[18] Y. Pomeau et P. Manneville : Intermittency and the Lorenz model. Physics letters, 75A, 1-2 (1979).

[19] D. Ruelle and F. Takens : On the nature of turbulence. Comm. Math. Phys. 20, 167-192 (1971).

[20] R. J. Sacker : On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations. New York Univ. IMM-NYU, 333 (1964).

[21] D. G. Schaeffer : Qualitative analysis of a model for boundary effects in the Taylor problem. Preprint.

[22] Y. H. Wan : Bifurcation into invariant tori at points of resonance. Arch. Rat. Mech. Anal. 68, 343-357 (1978).

*
* *
*