Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

S. Alinhac
N. Lerner

Unicité forte à partir d'une variété de dimension quelconque pour des inégalités différentielles elliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 20, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A21_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 9 - 1 9 8 0

UNICITE FORTE A PARTIR D'UNE VARIETE DE DIMENSION QUELCONQUE POUR DES INEGALITES DIFFERENTIELLES ELLIPTIQUES

par

S. ALINHAC

et

N. LERNER

Exposé n° XX   22 Avril 1980

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous présentons tout d'abord un théorème d'unicité pour des solutions d'équations aux dérivées partielles à coefficients C^∞ (ou d'inégalités différentielles), solutions astreintes à s'annuler à l'ordre infini sur une sous-variété V de dimension quelconque. Ce théorème étend les résultats obtenus par Alinhac et Baouendi [2] dans le cas où V est un point, et ses hypothèses relient la partie imaginaire de l'opérateur P considéré à la géométrie de V ; la démonstration de ces résultats d'unicité consiste essentiellement à établir des inégalités du type Carleman.

C'est, avec le travail de Baouendi et Zachmanoglou [5] dans le cas analytique, le seul résultat, à la connaissance des auteurs, entre la forte unicité d'un point et l'unicité de Cauchy (cf. Caldéron [6]).

Nous montrons également par la construction de contre-exemples, à rapprocher des travaux de Pliš et Hörmander (cf. Hörmander [8]), que les hypothèses "P elliptique" et "P réel sur le fibré conormal de V" (qui est nécessaire d'après Alinhac [1]) ne suffisent pas à assurer l'unicité de la solution.

Le premier paragraphe est consacré à l'exposé des résultats, le second à la preuve des inégalités de Carleman et le troisième à la construction de contre-exemples. On pourra lire des démonstrations plus détaillées dans un article à paraître.

§ 1 : LES RESULTATS PRINCIPAUX

Soit dans $\mathbb{R}^n_x$, au voisinage de l'origine, une sous-variété V de classe C^∞ ($0 \in V$), de dimension k. Notons d(x) la distance de x à V, définie pour x voisin de 0.

Nous dirons qu'un opérateur $K(x,D_x)$, du second ordre, à coefficients C^∞ réels, est tangent à V s'il s'écrit

$$K(x,D_x) = \sum_{i,j} K_{ij}(x)\, Z_i Z_j \qquad ,$$

aux termes d'ordre inférieur ou égal à 1 près, les Z_i étant des champs réels C^∞ tangents à V.

Théorème 1 : Soit $P(x,D_x)$ un opérateur différentiel du second ordre à coefficients (complexes) de classe C^∞ défini dans un voisinage de l'origine. Nous supposons que

(i) $\mathbb{R}e\,P$ est elliptique.

(ii) $\mathrm{Im}\,P$ est tangente à V.

Si u de classe C^∞ est plate sur V et telle qu'il existe $C(u) \geqslant 0$ et un voisinage de l'origine dans lequel on ait

$$|Pu(x)| \leqslant \frac{C(u)}{|\log d(x)|} \left\{ \frac{|\nabla u|(x)}{d(x)} + \frac{|u|(x)}{(d(x))^2} \right\} ,$$

alors $u \equiv 0$ dans un voisinage de l'origine.

Rappelons qu'on dit que P a la propriété de forte unicité à partir d'une sous-variété V si la seule solution u, de classe C^∞, plate sur V de $Pu = 0$ est triviale.

Un résultat classique d'Aronszajn et Cordes [3] , [7] est qu'un opérateur P du second ordre, elliptique à coefficients réels, possède cette propriété pour $V = \{0\}$ dans $\mathbb{R}^n$. Le corollaire 2 de Alinhac et Baouendi [2] étend ce résultat au cas où $P_m(0,D_x)$ seulement est à coefficients réels; le théorème 1 en constitue une généralisation et l'hypothèse (ii) est suggérée par la condition nécessaire établie par Alinhac [1] .

On peut considérer le théorème 1 comme un théorème d'unicité pour le problème de Cauchy caractéristique relatif à un opérateur de la forme $L(t,r,\theta,r\,D_t, r\,D_r, D_\theta)$ et à la surface initiale $\{r=0\}$: il suffit pour cela d'introduire des coordonnées cylindriques (t,r,θ) ($r = 0$ définissant V , $\theta \in S^{n-k-1}$ et t étant des coordonnées locales sur V), et de prendre $L = r^2 P$. L'étude d'un tel problème de Cauchy sur un modèle fournit le théorème 2. Remarquons également que, compte tenu du résultat classique de Caldéron [6] sur l'unicité de Cauchy, le cadre de la codimension 2 fournit les "premiers" contre-exemples pour des opérateurs à caractéristiques simples (cf. Alinhac [1]).

Théorème 2 : Soit l'opérateur $L = (r\partial_r)^2 + \partial_\theta + \lambda r^2 \partial_t^2 + ir\lambda_3 \partial_t \partial_\theta$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, λ_3 réel, $k=1$, $\theta \in S^1$.

(1) Il existe $m(\lambda_2,\lambda_3) \geqslant 0$, fonction homogène de degré 1 de λ_2 et λ_3^2 , $(m=0 \Leftrightarrow \lambda_2\lambda_3 = 0)$, telle que, pour $\lambda_1 < m(\lambda_2,\lambda_3)$, il existe une fonction $u(t,r,\theta)$, de classe C^∞ , plate sur $\{r=0\}$, et une fonction continue a satisfaisant

$$\text{Pour tout } N,\quad |a(t,r,\theta)| \leqslant \frac{C_N}{|\log r|^N} \quad , \quad Lu + au = 0 \quad .$$

(2) Il existe $m'(\lambda_2,\lambda_3) \geqslant 0$, fonction homogène de degré 1 de λ_2 et λ_3^2 , $(m'=0 \Leftrightarrow \lambda_2\lambda_3 = 0)$, telle que pour $m'(\lambda_2,\lambda_3) < \lambda_1$, si $u \in C^\infty$, plate sur $\{r=0\}$, satisfait l'inégalité

$$|Lu(t,r,\theta)| \leqslant \frac{C(u)}{|\log r|} \{|ru_r| + |\partial_\theta u| + |ru_t| + |u|\} \quad ,$$

alors $u \equiv 0$ pour r assez petit.

On peut remarquer que l'opérateur

$$P = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \lambda_1\partial_t^2 + i\lambda_2\partial_t^2 \quad , \quad \lambda_1 < 0 \, , \, \lambda_2 \neq 0 \quad ,$$

bien qu'elliptique et réel sur le fibré conormal de V (mais $\mathbb{R}\mathrm{e}\, P$ non elliptique) n'a pas la propriété d'unicité demandée.
De plus, pour l'opérateur

$$L = r^2\Delta_{x,y} + \lambda_1 r^2 \partial_t^2 + i\lambda_2 r^2 \partial_t^2 + i\lambda_3 r\partial_t\partial_\theta \, , \, \lambda_2\lambda_3 \neq 0 \quad ,$$

il existe $\lambda_1 > 0$ (assez petit) pour lequel cette propriété est également violée.

§ 2 INDICATIONS SUR LA PREUVE DES INEGALITES DE CARLEMAN

Afin de démontrer simultanément le théorème 1 et le théorème 2 (2) on prouve une inégalité du type Carleman pour un opérateur où les variables (t,r,θ) $(t \in \mathbb{R}^k, r > 0 \, , \, \theta \in S^{\ell-1})$ de la forme

$$(3.1) \qquad L = (r^2\partial_r^2) + (\ell-1)(r\partial r) - \Delta_\theta + Q(t,rD_t) + rS \quad ,$$

où Δ_θ est le laplacien positif sur $S^{\ell-1}$, dont la racine positive sera notée Λ ; Q est un opérateur différentiel homogène d'ordre 2 et S un opérateur différentiel d'ordre 2 en $r D_t$, $r D_r$, D_θ . En outre la partie réelle du symbole principal de Q vérifie $-q_1(t,\tau) > c|\tau|^2$.

On effectue un changement de variables singulier (dit "éclatement") en posant (cf. [2]).

$$r = (1-|t|^2)R \ , \ t = T \quad .$$

On a
$$r\partial_r = R\partial_R \ , \quad r\partial_{t_j} = R(1-|T|^2)\partial_{T_j} + 2R^2 T_j \partial_R$$

ce dernier champ étant noté Y_j. Du fait que dans Y_j le second terme est de la forme $2RT_j(R\partial_R)$, on obtient, en conservant les mêmes lettres, que L s'écrit

$$L = r^2\partial_r^2 + (\ell-1)r\partial_r - \Delta_\theta + Q(t, r(1-|t|^2)D_t) + r\tilde{S} \quad ,$$

où $\tilde{S}$ est un opérateur du second ordre en $(1-|t|^2)rD_t$, rD_r, D_θ .

On obtient après éclatement une fonction u de classe C^∞ plate sur $r=0$ et $|t|=1$ que l'on peut prolonger par 0 sur $|t|\geqslant 1$ et satisfaisant une inégalité différentielle analogue, $r|\partial_t u|$ étant remplacé par $r(1-|t|^2)|\partial_t u|$.

On pose, avec γ grand paramètre ,

$$u = e^{\gamma\psi} v \text{ , où } \psi = \log r + M \log(\log r^{-1}) \text{ , } 0 < r \leqslant R < 1 \quad ,$$

M constante > 0. On pose également $\mu = r\psi' = 1 + \dfrac{M}{\log r}$ (μ est proche de 1) .

Soit $L_\gamma = e^{-\gamma\psi} L e^{\gamma\psi}$; on a

$$\begin{aligned} L_\gamma = {} & r^2\partial_r^2 + (2\gamma\mu + \ell-1)r\partial_r + (\gamma\mu)^2 - \Delta_\theta + r^2(1-|t|^2)^2 Q(t,D_t) \\ & + \gamma r\mu' + (\ell-2)\gamma\mu \\ & + r\,\tilde{\tilde{S}}(t,r,\theta, r(1-|t|^2)D_t, rD_r - i\gamma\mu, D_\theta) \quad , \end{aligned}$$

les cinq premiers termes constituant la "partie principale".

On pose $\quad L_\gamma = J + K \quad$ avec

$$J = r^2\partial_r^2 + \alpha r\partial_r + (\gamma\mu)^2 - \Delta_\theta + r^2(1-|t|^2)^2 Q_1(t,D_t)$$

$$+ \gamma r\mu' + (\ell-2)\gamma\mu + r S_{1,\gamma} \quad ,$$

$$K = (2\gamma\mu + \ell-1-\alpha) r\partial_r + i r^2(1-|t|^2)^2 Q_2(t,D_t)$$

$$+ r S_{2,\gamma} \quad .$$

En notant (v,w) le produit scalaire $\int_D v\bar{w}\, dr\, dt\, d\theta$,

$D = (0,R) \times \mathbb{R}^k_t \times S^{\ell-1}_\theta$, et $\|\ \|$ la norme L^2 correspondante on obtient (pour $0 < \varepsilon < 2$)

$$\| r^{-\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1+\varepsilon}{2}} L_\gamma v \|^2 = \| r^{-\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1+\varepsilon}{2}} J v \|^2$$

$$+ \| r^{-\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1+\varepsilon}{2}} K v \|^2 + 2\, \mathrm{Re}\, (r^{-1} \mu^{-1-\varepsilon} J v , K v) \ .$$

Du premier et du troisième terme du membre de droite, il vient, après un long calcul, pour $\varepsilon_1 > 0$ arbitraire, $\gamma > \gamma_0(\varepsilon_1)$ et $R \leqslant R_0(\varepsilon_1), s > 0$, l'inégalité fondamentale.

$$(1+\varepsilon_1) \|r^{-\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1+\varepsilon}{2}} L_\gamma v\|^2 \geqslant$$

$$\frac{1}{\gamma} \| r^{\frac{3}{2}} (1-|t|^2) \nabla_t v_r \|^2 \frac{\nu}{\eta} + \frac{1}{\gamma} \| r^{\frac{1}{2}} (1-|t|^2) \nabla_t \Lambda v \|^2 \frac{\nu}{\eta}$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \sum_j \| r^{\frac{3}{2}} (1-|t|^2)^2 \nabla_t \partial_{t_j} v \|^2 \frac{C\nu}{\eta}$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \| r^{\frac{s}{2}+\frac{3}{2}} \partial_r^2 v \|^2 (\frac{1-\nu}{2}) + \frac{1}{\gamma} \| r^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \Delta_\theta v \|^2 (\frac{1-\nu}{2}) + \frac{1}{\gamma} \| r^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}} \Lambda v_r \|^2 (1-\nu)$$

$$+ \gamma \| r^{\frac{1}{2}} (1-|t|^2) \nabla_t v \|^2 (4C - \frac{\nu}{\eta}) + \gamma \| r^{\frac{1}{2}} \partial_r v \|^2\, 4(\alpha-1) \quad +$$

$$+ \gamma \, \| r^{-\frac{1}{2}} |\log r|^{-1} \Lambda v \|^2 \, \frac{\varepsilon M}{2}$$

$$+ \gamma^3 \, \| r^{-\frac{1}{2}} |\log r|^{-1} v \|^2 \, (2-\varepsilon) M$$

$$+ \, (\alpha-3) \, 2 \, \mathrm{Re} \, (\partial_r v \, , \, r^2 \mu^{-1-\varepsilon} \, , \, (1-|t|^2)^2 \, Q_2 v) \quad .$$

On peut alors prouver le théorème 1 : il suffit, par un changement de variables, de mettre l'opérateur P sous la forme (3.1) et de choisir $\alpha = 3$.

Pour le théorème 2 (2) il faut examiner les modifications introduites par le terme supplémentaire $i \lambda_3 r \partial_r \partial_\theta$; on obtient une inégalité analogue dont le dernier terme est remplacé par

$$2 \mathrm{Re} \, (\partial_r v \, , (\alpha-3) \lambda_2 \, r^2 \mu^{-1-\varepsilon} \, i (1-t^2)^2 \, \partial_t^2 \, v) + 2 \mathrm{Re} (\partial_r v , (\alpha-2) \lambda_3 \, i r \mu^{-1-\varepsilon} (1-t^2) \partial_{t\theta}^2) \quad .$$

Si λ_1 est assez grand > 0 on peut trouver une valeur de $2 < \alpha < 3$ pour laquelle on obtient une inégalité utilisable.

§ 3 INDICATIONS SUR LA PREUVE DU THEOREME 2 (1)

Soit $L = (r \partial_r)^2 + \partial_\theta^2 + (\lambda_1 + i \lambda_2) r^2 \partial_t^2 + i \lambda_3 r \partial_t \partial_\theta$.

On utilise la méthode de l'optique géométrique :

si $\quad v(r,\theta,t) = e^{-\nu} \left(\frac{r}{m}\right)^\gamma e^{i\ell\theta + i\tau t} \; e^{\gamma\varphi(s)} \, \psi_\gamma(s) \quad ,$

avec $\nu, m, \gamma, \tau, \delta$ des paramètres réels > 0 , $s = \log \frac{r}{\delta}$ et γ un grand paramètre, $\tau\delta = \alpha\gamma$, ℓ entier $\ell = C\gamma$, $\alpha \neq 0$ et $C > 0$.

On obtient l'équation de phase suivante $(\lambda = \lambda_1 + i \lambda_2)$

$$\varphi'^2 + 2\varphi' + A = \alpha^2 \lambda (e^{2s} - 1) + i \lambda_3 \alpha C (e^s - 1)$$

avec $A = 1 - C^2 - \alpha^2 \lambda - i \lambda_3 \alpha C$.

Les équations de transport viennent de la résolution approchée de l'équation différentielle suivante :

$$\gamma \varphi'' \psi_\gamma + 2\gamma \psi'_\gamma (\varphi' + 1) + \varphi''_\gamma = 0$$

$$\psi_\gamma \sim \sum_{j \geqslant 0} a_j \gamma^{-j} \quad .$$

On peut résoudre successivement dans un voisinage fixe de 0 les équations de transport portant sur les a_j (car $\varphi'(0) + 1 \neq 0$).

On choisit $\psi_\gamma(0) = 1$. On peut dégager des conditions suffisantes sur $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ afin que

$$\mathbb{R}\mathrm{e}\, (\varphi'(0) + 1) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{R}\mathrm{e}\, \varphi''(0) < 0.$$

On considère alors, pour $b_k = e^{-\mu k}$, k entier, la fonction u_k "centrée" en b_k donnée par :

$$u_k = e^{-\nu_k} \left(\frac{r}{m_k}\right)^{\gamma_k} e^{ik\theta + i\tau_k t} \, e^{\gamma_k \varphi(s_k)} \, \tilde{\psi}_k(s_k) \quad ,$$

$$\text{où} \quad s_k = \log \frac{r}{b_k} \quad , \quad \tilde{\psi}_k = \psi_{\gamma_k}(1 + f_k) \quad ,$$

f_k étant une fonction de classe C^∞ à décroissance rapide en k que l'on déterminera. On prend

$\gamma_k = \frac{k}{C}$, $\tau_k b_k = \alpha \gamma_k$ où α et C sont des constantes strictement positives indépendantes de k.

On montre que, pour k assez grand et $r \in [b_{k+1}, b_k]$, on a

$$\frac{d}{dr} \log \left| \frac{u_k}{u_{k+1}} \right| \geqslant \frac{C_o k}{r} \quad .$$

On détermine $\nu_{k+1} - \nu_k$ par la relation $\log \left| \frac{u_k}{u_{k+1}} \right| (m_k) = 0$ et on obtient $\nu_k \sim C_1 k^2$.

En posant $u = \sum_{k \geq k_o} \chi_k u_k$, avec $\chi_k = \chi(\frac{1}{\mu} \log \frac{r}{b_k})$, χ étant une fonction de classe C^∞ à support compact dans $]-1,+1[$ telle que, si $m_k = e^{-\beta\mu} b_k$, $0 < \beta < 1$, et $0 < \beta < \beta' < 1$, avec $\frac{1}{2} < \beta'$, χ vaille identiquement 1 sur $[-\beta',\beta']$.

On obtient que, sur $[b_{k+1},b_k]$, $u = \chi_k u_k + \chi_{k+1} u_{k+1}$. On pose alors $a = \frac{Lu}{u}$ et on obtient facilement que, près de b_k, $|a| \leq C_N |\log r|^{-N}$. Dans la zone "centrale" (près de m_k), en posant $R_k = \frac{Lu_k}{u_k}$, il vient

$$a = \frac{R_k u_k + R_{k+1} u_{k+1}}{u_k + u_{k+1}} .$$

On utilise la fonction f_k pour "ajuster" R_k (ce qui est possible grâce au résultat de Whitney [9]) de telle sorte que R_k possède un zéro d'ordre infini en $r = m_k$ et $r = m_{k-1}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Alinhac
Non unicité pour des opérateurs à caractéristiques complexes simples, à paraître Annales de l'ENS.

[2] S. Alinhac, M.S. Baouendi
Uniqueness for the characteristic Cauchy problem and strong unique continuation for higher order partial differential inequalities, Amer. J.Math. 102, 1, (1980), 179-217.

[3] N. Aronszajn
A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, J. Math. Pures Appl. (9) 36 (1957), 235-249.

[4] M.S. Baouendi, F. Treves, E.C. Zachmanoglou
Flat solutions and singular solutions of homogeneous linear partial differential equations with analytic coefficients, à paraître.

[5] M.S. Baouendi, E.C. Zachmanoglou
Unique continuation of solutions of partial differential equations and inequalities from manifods of any dimension, Duke Math. Journal 45 (1978), 1-13.

[6] A.P. Calderon
Existence and uniqueness theorem for systems of partial differential equations, Proc. Symp. Fluid Dynamics and Appl. Math. (Un. of Maryland 1961), Gordon and Breach, New York, (1962) 147-195.

[7] H. Cordes
Uber die Besotimmtheit der Lösungen elliptischer differentialgleichungen durch Anfangsvorgaben, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II a (1956), 230-258.

[8] L. Hörmander
Non-uniqueness for the Cauchy problem. Colloque International, Université de Nice (1974). Lecture Notes in Mathematics, Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations Springer-Verlag 459.

[9] Whitney
Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. of the Amer. Math. Society, (36) (1934), 63-89.

*
* *
*