Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Lumer

Équations de diffusion sur des réseaux infinis

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 18, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A19_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 9 - 1 9 8 0

EQUATIONS DE DIFFUSION SUR DES RESEAUX INFINIS

par G. LUMER

Exposé n° XVIII

18 Mars 1980

0. INTRODUCTION

Nous étudions ici des équations de diffusion sur des réseaux ayant un nombre dénombrable (ou fini) de branches.

Décrite de façon très sommaire la situation que nous considérons est la suivante : on a des opérateurs de diffusion différents, A_i, sur chaque branche fermée Ω_i^* d'un réseau Ω , opérateurs que l'on "recolle" aux nœuds N au moyen de conditions de continuité et d'opérateurs de recollement B_N, obtenant ainsi sur Ω un opérateur local A (qui est un opérateur différentiel sur tout ouvert ne contenant pas de nœud); on examine dans quelles conditions de recollement A est "localement dissipatif", et l'on suppose par la suite que ces conditions sont satisfaites; on étudie alors les équations d'évolution posées en termes de l'opérateur local A, dans des ouverts de Ω, et tout particulièrement sur le réseau entier Ω, du type $\partial u/\partial t = Au$, $u(0,.) = f(.)$, $u(t,.) \mid \partial V = 0$ $\forall t \geqslant 0$ ("|" voulant dire "restreint(e) à ").♦

Nous travaillons ici avec des réseaux dans R^n, mais nous mentionnons qu'en gros les mêmes résultats, ou des résultats similaires, peuvent être obtenus pour des réseaux "intrinsèques".

1. TERMINOLOGIE. RESEAUX C^2 DANS R^n

Concernant les notions et terminologie relatives aux réseaux, et plus loin, celles relatives aux opérateurs locaux, problèmes d'évolution, etc, nous renverrons aux références pour les définitions précises, et une étude plus détaillée, mais ferons ici des rappels, et descriptions au besoin quelques peu informelles, destinés à rendre la lecture essentiellement indépendante.

La notion de "réseau C^2 dans $\mathbb{R}^n$ "♦♦ a été définie dans [L4] . Nous rappelons ici de façon quelque peu informelle ce qu'est un tel réseau. Un réseau C^2 dans R^n, Ω, consiste d'un nombre fini ou dénombrable de "branches ouvertes" Ω_i ($i \in \mathfrak{J}$) et de "nœuds de ramification" N.

♦ Nous avons traité récemment dans [L4] la résolubilité de ce genre de problèmes pour certains types de réseaux; nous donnons ici des résultats plus généraux.

♦♦ Il s'agit d'un objet mathématique apparenté à ce qu'on appelle un réseau (network) en théorie des graphes (voir par exemple [B.M]) mais muni de plus de structure , topologique, et analytique.

<u>En ce qui concerne les branches</u> : une branche (fermée) Ω_i^* est déterminée par (l'image de) un arc simple C^2, P_i : $[0,\ell_i] \to R^n$ $(0 < \ell_i < +\infty)$, paramétrisé par la longueur d'arc s_i, la branche ouverte correspondant à l'image de $]0,\ell_i[$ par P_i. (Il est entendu que $P_i(0) \neq P_i(\ell_i)$).

<u>En ce qui concerne les nœuds</u> : on pose $N_i^1 = \{P_i(0)\}$, $N_i^2 = \{P_i(\ell_i)\}$, $N_i^1 \cup N_i^2 = E(\Omega_i)$. On désigne par $\mathcal{N}(\Omega)$ l'ensemble de tous les nœuds, N_i^k, et l'on suppose $\mathcal{N}(\Omega)$ formé de deux sortes de nœuds, i.e. $\mathcal{N}(\Omega)$ union disjointe de $\mathcal{N}_r(\Omega)$ = ensemble des "nœuds de ramification" et $\mathcal{N}_e(\Omega)$ = ensemble des nœuds extérieurs", avec les conditions suivantes : $\mathcal{N}_e(\Omega)$ contient au moins tout nœud N tel que $N \cap \Omega_i^* \neq \emptyset$ pour exactement un $i \in \mathcal{J}$, et si $\Omega' = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} \Omega_i^*$ alors $\Omega' \setminus \{$union de tous les $N \in \mathcal{N}_e(\Omega)\}$ est un ensemble connexe dans R^n. On suppose en outre que la distance euclidienne entre deux nœuds différents est $\geqslant c_o$, c_o une constante > 0. (voir figure 1).

<u>En ce qui concerne la relation entre branches, nœuds, R^n</u> : on suppose que $\Omega_i^* \cap \Omega_j^* \subset E(\Omega_i) \cap E(\Omega_j)$ pour $i, j \in \mathcal{J}$, $i \neq j$; que $\forall N \in \mathcal{N}(\Omega)$, $N \cap \Omega_i^* \neq \emptyset$ pour au plus un nombre fini de $i \in \mathcal{J}$; que $\forall K$ compact dans R^n, $K \cap \Omega_i^* \neq \emptyset$ pour au plus un nombre fini de $i \in \mathcal{J}$.

<u>Un réseau C^2 dans R^n</u>, Ω, est déterminé par la donnée du couple $(\{\Omega_i^*\}_{i\in\mathcal{J}}, \mathcal{N}_e(\Omega))$ les conditions décrites ci-dessus étant vérifiées; Ω est alors l'espace localement compact séparé construit à partir d'un tel couple via

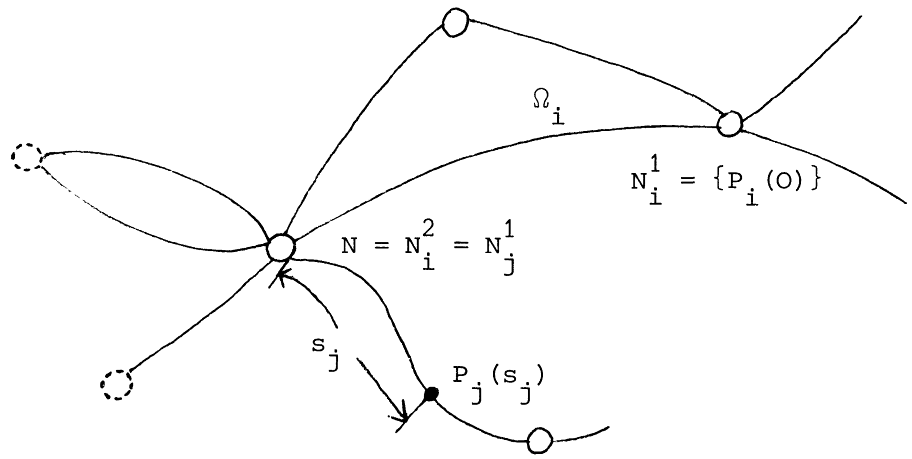
$$\Omega = \Omega' \setminus \{\text{union des } N \in \mathcal{N}_e(\Omega)\} \tag{1}$$

muni de la topologie relative induite par R^n. Nous considérons aussi Ω muni de la structure analytique héritée des arcs C^2, P_i, et de la paramétrisation spécifique s_i déterminée sur chaque Ω_i^* par P_i.

Parfois, lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion, nous ne distinguerons pas entre N comme ensemble et le point de Ω (ou Ω') correspondant.

Il est aussi parfois utile de reparamétriser de la façon suivante : donnés $N \in \mathcal{N}(\Omega)$, Ω_i^* tel que $N \cap \Omega_i^* \neq \emptyset$,

$$s_{Ni} = \begin{cases} s_i & \text{si } N = N_i^1 \\ \ell_i - s_i & \text{si } N = N_i^2 \end{cases} \tag{2}$$



⁚ nœud extérieur

O nœud de ramification

(Figure 1)

2. RECOLLEMENT D'OPERATEURS DE DIFFUSION. OPERATEURS LOCAUX

Soit Ω un réseau C^2 dans R^n. On se donne maintenant sur chaque branche Ω_i^* un opérateur de diffusion, à savoir

$$A_i(s_i,D) = a_i(s_i)D^2 + b_i(s_i)D + c_i(s_i),\ D = \frac{d}{ds_i} \quad , \tag{3}$$

où a_i, b_i, c_i sont des fonctions réelles continues sur Ω_i^*, $a_i(s_i) \geqslant \delta_i > 0$ (δ_i une constante) sur Ω_i^*, $c_i(s_i) \leqslant 0$ sur Ω_i^*.

Le recollement de ces opérateurs de diffusion donne en fait lieu à un opérateur local sur Ω ; donc tout en renvoyant pour les précisions et détails à [L1], [L2], [L3] , nous rappelons brièvement ici ce qu'est un opérateur local, et faisons aussi quelques rappels concernant les équations d'évolution associées à un tel opérateur.

Si $\tilde{\Omega}$ est un espace localement compact séparé quelconque, nous désignons par $C(\tilde{\Omega})$ l'ensemble des fonctions continues à valeurs complexes sur $\tilde{\Omega}$, par $C_o(\tilde{\Omega})$ l'ensemble des élements de $C(\tilde{\Omega})$ qui s'annulent à l'infini sur $\tilde{\Omega}$. $\mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ est l'ensemble des ouverts non vides de $\tilde{\Omega}$, et $\mathcal{O}_c(\tilde{\Omega})$ l'ensemble des $V \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ qui sont relativement compacts. $C_o(\tilde{\Omega})$, $C_o(V)$ pour $V \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$, sont considérés comme des espaces de Banach munis de la norme du sup (norme uniforme). Ici "opérateur" voudra toujours dire "opérateur linéaire".

Un opérateur local A sur $\tilde{\Omega}$ est une famille d'opérateurs A^V indexés par $V \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$, avec domaine $D(A,V) \subset C(V)$, $A^V : D(A,V) \longrightarrow C(V)$, et si $V_1, V_2 \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$, $V_1 \subset V_2$, $f \in D(A,V_2)$, alors $f|V_1 \in D(A,V_1)$ et $(A^{V_2}f)|V_1 = A^{V_1}(f|V_1)$. De cette façon si $x \in \tilde{\Omega}$, $f \in D(A,V_x)$ pour un ouvert contenant x, $(A^{V_x}f)(x)$ est indépendant de V_x, et la valeur de Af au point x, notée $(Af)(x) = (A^{V_x}f)(x)$, est définie sans ambiguité. On peut ainsi parler de Af dans V si $f \in D(A,V)$, $V \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$.

Etant donné un opérateur local A sur $\tilde{\Omega}$, les problèmes d'évolution que nous allons considérer (problèmes en norme du sup, avec valeurs au bord nulles) sont les suivants : à chaque $V \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$, on associe l'opérateur A_V dans l'espace de Banach $C_o(V)$ défini par $D(A_V) = \{f \in C_o(V) \cap D(A,V) : Af \in C_o(V)\}$, $(A_V f)(x) = (Af)(x)$ $\forall x \in V$; on considère alors le problème de Cauchy dans $C_o(V)$ défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} = A_V u \\ u(0) = f, \quad f \in D(A_V), \end{array} \right. \tag{4}$$

et on dira simplement que (4) est "le problème de Cauchy pour V (correspondant à A)" ; en supposant toujours que $D(A_V)$ est dense et A_V fermé, nous dirons que le problème de Cauchy (p.c.) pour V, (correspondant à A), est "résoluble", si et seulement si (4) est uniformément bien posé ce qui équivaut dans ces conditions à ce que A_V engendre un semi-groupe dans $C_o(V)$ (ou en notation symbolique : $\exists\, e^{tA_V}$), voir [L1] . La solution de (4) est alors donnée pour $t \geq 0$, $x \in V$, par $u(t,x,f) = (e^{tA_V}f)(x)$ Comme nous nous intéressons à des problèmes du type diffusion, nous ne considérerons que des opérateurs locaux localement dissipatifs. Nous rappelons qu'un opérateur local A sur $\tilde{\Omega}$ est dit localement dissipatif, si et seulement si $\forall V \in \mathcal{O}_c(\tilde{\Omega})$, $f \in C(\bar{V})$, $f|V \in D(A,V)$, avec soit $\partial V = \emptyset$ soit $\max_{\partial V}|f| < \sup_V |f|$, on a : $\exists\, x \in V$ avec $|f(x)| = \sup_V |f|$, et

$$\operatorname{Re}\,[(Af)(x)\overline{f(x)}] \leq 0. \tag{5}$$

Nous reprenons maintenant la situation du début de cette section où Ω est un réseau C^2 dans R^n. Pour pouvoir faire le recollement des opérateurs $A_i(s_i,D)$ (voir (3) ci-dessus) nous allons introduire pour chaque $N \in \mathcal{N}_r(\Omega)$ un opérateur de recollement B_N. Ainsi pour $N \in \mathcal{N}_r(\Omega)$ donné, B_N est un opérateur local en un sens qui est une légère variante de celui que nous venons de décrire ci-dessus car ici $D(B_N,V)$ sera défini seulement pour les $V \in \mathcal{O}(\Omega)$ tels que $V \supset N$, et $B_N^V : D(B_N,V) \to C(N) \simeq \mathbb{C}$ (donc si $B_N f$ est défini - i.e. si $f \in D(B_N,V)$ pour un $V \supset N$ - c'est un nombre complexe). B_N est défini, pour $V \supset N$, par

$$(6)\qquad \begin{aligned} D(B_N,V) &= \{f \in C(V) : f \text{ est } C^1 \text{ près de N sur tout } \Omega_i^* \text{ tel que } N \cap \Omega_i^* \neq \emptyset\},\\ B_N f &= \sum_{N \cap \Omega_i^* \neq \emptyset} c_{Ni} \frac{d}{d\nu_{Ni}} f \end{aligned}$$

où $(d/d\nu_{Ni})f = ((d/ds_{Ni})f)(0)$, s_{Ni} étant comme défini dans (2), les c_{Ni} étant des constantes réelles, attachées à N et chacun des Ω_i^* tels que $N \cap \Omega_i^* \neq \emptyset$.

Dans ces conditions nous pouvons définir l'objet obtenu par recollement des $A_i(s_i,D)$, comme un opérateur local A défini comme suit : $\forall\ V \in \mathcal{O}(\Omega)$

$$(7)\qquad \begin{aligned} D(A,V) = \{&f \in C(V) : \forall\ \Omega_i \cap V \neq \emptyset,\ f|\Omega_i \cap V \in C^2(\Omega_i \cap V),\\ &\text{la fonction égale à } A_i(s_i,D)f \text{ sur chaque } \Omega_i \cap V \text{ se prolonge}\\ &\text{en un élément de } C(V) \text{ (appelé Af), et } \forall\ N \in \mathcal{N}_r(\Omega),\ N \subset V,\ B_N f = 0\}, \end{aligned}$$

pour $f \in D(A,V)$, Af est la fonction décrite dans la définition ci-dessus de $D(A,V)$.

Nous dirons que A est obtenu "par recollement des $A_i(s_i,D)$ via les B_N". Il est important de savoir pour quels opérateurs B_N tels que définis ci-dessus dans (6) (i.e. pour quels choix de c_{Ni}) A est localement dissipatif. On a

2.1 <u>Théorème</u> : A est localement dissipatif si et seulement si $\forall\ N \in \mathcal{N}_r(\Omega)$ tous les c_{Ni} correspondant à N (d'après (6)) sont du même signe (i.e., soit tous $\geqslant 0$, soit tous $\leqslant 0$), et ne sont pas tous nuls.

3. <u>EQUATIONS DE DIFFUSION EN TERMES DE L'OPERATEUR LOCAL OBTENU PAR RECOLLEMENT DES</u> $A_i(s_i,D)$.

Ω, $A_i(s_i,D)$, B_N, A, sont comme définis dans la section 2 précédente, et nous supposons dorénavant que les c_{Ni} satisfont à la condition nécessaire et suffisante du théorème 2.1, donc que A est localement dissipatif. Dans ces conditions, nous allons examiner la résolubilité des "problèmes de Cauchy (correspondants à A)" - au sens décrit dans la section 2 - c'est-à-dire des équations d'évolution (4), pour des ouverts de Ω, et en particulier pour Ω. Nous utilisons l'approche et les résultats de [L1], [L2], [L3] , (en particulier les théorèmes 5.4 de [L1], 6 de [L3]), ainsi que des méthodes propres aux réseaux et recollements dont il s'agit ici. D'après 6 de [L3] , si l'on sait que le P.c. est résoluble pour une famille $\mathcal{R}$ assez grande d'ouverts relativement compacts (de façon précise "une famille exhaustive d'ouverts A-Cauchy réguliers", voir [L3]), alors la résolubilité du p.c. pour tout autre ouvert de Ω (en particulier Ω) est équivalente à l'existence d'une barrière appropriée (en présence d'une condition de densité de domaine qui ici est toujours satisfaite). L'existence d'une telle famille $\mathcal{R}$ est l'objet du théorème 3.1 ci-dessous ; ensuite nous décrirons les barrières dont il est question et traiterons de la construction de barrières (qui comme nous verrons existent sous des conditions très générales).

Observons tout d'abord que l'on peut décrire facilement ce qu'est un ouvert connexe $G \in \mathcal{O}_c(\Omega)$ (voir [L4]); c'est en gros un "sous-réseau" de Ω avec un nombre fini de branches, ayant comme nœuds de ramification les nœuds de Ω contenus dans G. On a,

3.1 <u>Théorème</u> : Soit $\mathcal{R}_o$ l'ensemble de tous les ouverts connexes $\in \mathcal{O}_c(\Omega)$, et $\mathcal{R}$ l'ensemble des $G \in \mathcal{O}_c(\Omega)$ qui sont union disjointe finie de $G_i \in \mathcal{R}_o$. Alors :
(a) $\mathcal{R}$ est une famille exhaustive d'ouverts de Ω, i.e. $\forall\ V \in \mathcal{O}(\Omega)$, K compact $K \subset V$, $\exists\ G \in \mathcal{R}$ avec $K \subset G$, $\bar{G} \subset V$.
(b) $\forall\ G \in \mathcal{R}$, $\exists\ e^{tA_G}$ (ce qui, en utilisant la terminologie de [L3], dit en particulier que $\mathcal{R}$ est une famille d'ouverts A-Cauchy réguliers).

Pour la preuve de 3.1 (b), on se ramène essentiellement, en vertu des théorèmes de génération de semi-groupes pour opérateurs dissipatifs, à montrer l'existence de la résolvante de A_G, $R(\lambda,A_G)$, dans $C_o(G)$, pour un $\lambda > 0$. Cela est démontré dans [L4] en utilisant, en plus de faits classiques concernant les opérateurs $A_i(s_i,D)$ de (3), des considérations combinatoires (concernant G comme graphe), et la dissipativité de A_G.

En vue de 3.1, et du fait que $\forall\ V \in \mathcal{O}(\Omega)$, $D(A_V)$ est dense♦, l'application du théorème 6 de [L3] permet de voir que pour tout $V \in \mathcal{O}(\Omega)$, la résolubilité du p.c. correspondant à A est équivalente à l'existence d'une "barrière de Cauchy pour V". (Théorème 3.2 ci-dessous). Nous rappelons brièvement ce qu'est une telle barrière (voir 2.10, 3.1, 3.2 de [L2], pour plus de précision et détails) : une barrière de Cauchy pour V, h, est une fonction réelle > 0 définie sur $V\backslash K$, K un compact $\subset V$, "s'annulant à l'infini dans V" i.e. "$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ K_\varepsilon$ compact $\subset V$, $K \subset K_\varepsilon$, avec $h < \varepsilon$ dans V, K_ε", et (A-1)-surharmonique dans $V\backslash K$ (i.e. telle que $\forall\ G \in \mathcal{R}$, $\bar{G} \subset V, K$, $u \in C(\bar{G})$ réelle et (A-1)-harmonique avec $h \geqslant u$ sur ∂G, on a $h \geqslant u$ dans G).

♦ On se ramène au cas $V = G \in \mathcal{R}_o$, et alors la densité de $D(A_G)$ suit de l'approximation de fonctions quelconques de $C_o(G)$ par des fonctions, C^∞ en dehors des nœuds $N \subset G$, et de la forme $\alpha_{Ni}s_{Ni}^2 + \beta_N$ près de N sur chaque $\Omega_i^* \cap N \neq \emptyset$ (avec des α_{Ni}, β_N, appropriés).

3.2 Théorème : Le p.c. est résoluble pour $V \in \mathcal{O}(\Omega)$, (en particulier pour $V = \Omega$), si et seulement si $\exists$ une barrière de Cauchy pour V.

Pour construire effectivement les barrières en question il nous faut un critère facilement utilisable de surharmonicité. On a ceci (voir [L1] ,[L2]) : "Si h est réelle $\in D(A,V)$, pour un $V \in \mathcal{O}(\Omega)$, et $(A - \lambda)h \leqslant 0$, où $\lambda > 0$, alors h est $(A-\lambda)$-surharmonique".A cause des difficultés crées dans le cas d'un réseau par les ramifications (nœuds) il faut disposer d'un critère plus flexible, ce qui est obtenu en étendant le domaine de l'opérateur local recollé de façon appropriée, à savoir, en définissant "A au sens étendu" (s.e.A) : $f \in$ s.e. $D(A,V)$ si et seulement si f satisfait aux conditions de $f \in D(A,V)$ sauf que Af (nous écrivons Af, pas s.e. Af) n'est pas forcément continue aux $N \subset V$, mais seulement continue sur chaque $\Omega_i^* \cap V$ séparément, Af étant comme avant égal à $A_i(s_i,D)f$ sur $\Omega_i \cap V$, et multiforme aux $N \subset V$ (avec les valeurs $(A_i(s_i,D)f)(x) = (A_i f)(x), \{x\} = N$, pour $\Omega_i^* \cap N \neq \emptyset$). En même temps on étend la notion de localement dissipatif à la situation de s.e. A en remplaçant simplement (5) par

$$\inf_{i,\Omega_i^* \ni x} \operatorname{Re}\,[(A_i f)(x)\,\overline{f(x)}] \leqslant 0\,, \tag{8}$$

où nous écrivons $A_i f$ pour $A_i(s_i,D)f$. En ces termes on a le critère suivant, plus flexible, de surharmonicité :

3.3 Théorème : Soient Ω, A, comme définis dans cette section. Alors aussi e.s. A est localement dissipatif. Soit $V \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\lambda > 0$, $h : V \to R$, avec

$$h \in \text{s.e. } D(A,V),\ (A_i - \lambda)h \leqslant 0 \quad \text{sur chaque } \Omega_i \cap V \neq \emptyset\,. \tag{9}$$

Alors h est $(A-\lambda)$-surharmonique dans V.

En outre on peut démontrer dans le contexte qui nous occupe (et d'ailleurs beaucoup plus en général) que "localement $(A-\lambda)$-surharmonique" implique "globalement $(A-\lambda)$-surharmonique" (λ est supposé > 0); ceci combiné avec le fait que l'infimum (sur un $V \in \mathcal{O}(\Omega)$) d'un nombre fini de fonctions $(A-\lambda)$-surharmoniques dans V est $(A-\lambda)$-surharmnique dans V, et combiné avec 3.3 ci-dessus, donne une grande flexibilité pour la construction de barrières de Cauchy. On peut ainsi construire des barrières de façon "intrinsèque" (i.e. en restant dans Ω et sans utiliser effectivement R^n), quelle que soit la nature du réseau du point de vue topologie combinatoire, et aussi en présence d'un nombre infini de nœuds extérieurs.

Par contre, des impossibilités de résolution du p.c. sur Ω peuvent provenir d'une croissance trop rapide des coefficients a_i lorsqu'on "tend vers l'infini sur Ω". Cela ressort de façon plus précise des deux théorèmes, 3.4, et 3.5, ci-dessous.

On voit facilement que l'on peut définir une distance $d(x,y)$ pour $x,y \in \Omega$, à partir des longueurs d'arc s_i en joignant x et y par des "chemins" dans Ω (connexe). Ω devient ainsi un espace métrique (dont la topologie métrique est d'ailleurs la même que celle dont Ω est déjà munie). Cette distance d nous permet d'exprimer de façon intrinsèque le comportement de croissance à l'infini des coefficients a_i et b_i des opérateurs $A_i(s_i,D)$. En ces termes on a (donc pour un réseau C^2 dans R^n quelconque, $A_i(s_i,D)$ comme dans (3), et les c_{Ni} de (6) satisfaisant à la condition nécessaire et suffisante de 2.1),

3.4 Théorème : Soit $x_o \in \Omega$ et supposons que l'on a sur Ω

$$(10)\qquad \begin{aligned} a_i(x) &= O(d(x,x_o)), \\ |b_i(x)| &= O(d(x,x_o)), \end{aligned}$$

quand $d(x,x_o) \to +\infty$ (le choix de x_o n'a bien entendu aucune importance, la condition (10) étant inchangée par changement du point de référence x_o). Alors le p.c. est résoluble pour Ω.

Dans quelles conditions la résolubilité du p.c. pour Ω peut elle devenir impossible, et peut-on affaiblir (10)? Le théorème suivant, concernant une classe plus spéciale de réseaux C^2 dans R^n, apporte des précisions à ce sujet. Nous dirons qu'un réseau C^2 dans R^n est "polygonal" si et seulement si les $\overset{*}{\Omega}_i$ sont des segments de droite dans R^n, et nous dirons qu'un nœud N de Ω_r est "régulier" ♦ si et seulement si (P_i étant considéré comme fonction de s_{Ni}, pour $\overset{*}{\Omega}_i \cap N \neq \emptyset$), on a

$$(11)\qquad \sum_{\overset{*}{\Omega}_i \cap N \neq \emptyset} \frac{dP_i}{ds_{Ni}}(0) = 0 .$$

On a :

♦ Dans [L4] nous avons utilisé la terminologie "C^2 network of straight lines in R^n" pour "réseau C^2 polygonal dans R^n", et nous avons appelé un réseau dont tous les nœuds (de $\mathcal{N}_r(\Omega)$) sont réguliers "nodal regular".

3.5 Théorème : Soit Ω un réseau C^2 polygonal dans R^n dont tous les nœuds sont réguliers; et supposons tous les $c_{Ni} = 1$, $A_i(s_i,D)$ et A étant par ailleurs comme ci-dessus dans cette section. Soit $x_o \in \Omega$, $r(x,x_o)$ la distance euclidienne (i.e. dans R^n) de $x \in \Omega$ à x_o, et soit $d(.,.)$ comme ci-dessus dans 3.4. Dans ces conditions, si l'on a

$$\begin{aligned} a_i(x) &= O((r(x,x_o))^2), \\ |b_i(x)| &= O(r(x,x_o)), \end{aligned} \tag{12}$$

quand $r(x,x_o) \to +\infty$ $(x \in \Omega)$, alors le p.c. est résoluble pour Ω. D'autre part, $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe des réseaux C^2 polygonaux dans R^n avec des $A_i(s_i,D)$, B_N, A, comme ci-dessus, sauf que $a_i(x) = O((r(x,x_o))^{2+\varepsilon})$ (et $a_i(x) = O((d(x,x_o))^{2+\varepsilon})$), le p.c. n'étant pas résoluble pour Ω.

La démonstration de 3.4 est quelque peu laborieuse; nous n'en donnerons pas de détails ici. La démonstration d'une partie de 3.5 (existence de solution lorsqu'il n'y a pas de nœuds extérieurs) se trouve dans [L4].

REFERENCES

[B.M] J. A. Bondy et U. S. R. Murty : Graph theory with applications, Mac Millan Press, London and Basingstoke, 1976, 1977 (revised paperback ed.).

[L1] G. Lumer : Problème de Cauchy pour opérateurs locaux et "changement de temps", Annales Inst. Fourier, 25,fasc. 3 et 4, (1975), 409-446.

[L2] G. Lumer : Problèmes de Cauchy et fonctions surharmoniques, Séminaire de Théorie du Potentiel, Paris, n° 2, Lect. Notes in Math. vol. 563 (1976), 202-218, Springer Verlag.

[L3] G. Lumer : Equations d'évolution pour opérateurs locaux non localement fermés C. R. Acad. Sc. Paris, 284 (1977), 1361-1363.

[L4] G. Lumer : Connecting of local operators and evolution equations on networks, Potential Theory Copenhagen 1979 (Proceedings), Lect. Notes in Math. vol. 787 (1980), Springer Verlag, 219-234.

***