G. Lebeau

Non holonomie dans un problème de diffraction

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 17, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A18_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1979-1980

NON HOLONOMIE DANS UN PROBLEME DE DIFFRACTION

par G. LEBEAU

Exposé n° XVII

18 Mars 1980

I. INTRODUCTION

Soit P l'opérateur du second ordre dans $\mathbb{R}^3$:

$$P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} - x \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

et u la solution du problème mixte extérieur

$$\begin{aligned} Pu &= 0 \quad x > 0 \\ u &= 0 \quad t < 0 \\ u|_{x=o} &= 2\pi\ \delta_{t=o} \otimes \int_1^{+\infty} e^{iy\eta}\, d\eta\ . \end{aligned}$$

On s'intéresse ici aux singularités de u aux points du front diffracté. Sur un exemple analogue (4) Friedlander et Melrose ont montré qu'en ces points u est de classe Gevrey 3 et le spectre singulier de u lagrangien. Il est alors naturel de se poser la question : "u est-elle (micro)-holonôme (nécessairement irrégulière) au voisinage de ces points".

(La micro-holonomie de u aux points du front direct (ou hyperbolique) étant bien connue).

En fait il n'en est rien et le résultat qu'on donne ici relie la nature de la singularité de u avec la géométrie du problème.

Remarque : Le problème identique intérieur (i.e. dans $x < 0$) a été étudié par G. Eskin (3) et Anderson Melrose (1) ; nous allons constater que les deux problèmes sont assez intimement liés.

II. RESULTATS

On note H [respectivement R_n, respectivement R_∞] la réunion des demi-bicaractéristiques de P issues des points $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$ $\xi < 0$, $\eta > 0, \eta\tau = \xi^2$ [respectivement $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$, $\xi > 0$, $\eta > 0$, $\eta\tau = \xi^2$ et n fois réfléchies sur le bord $x = 0$, respectivement $x = 0$, $y = 0$, $t > 0$, $\xi = 0$, $\eta > 0$, $\tau = 0$, pour lesquelles on a $t > 0$.

Si π désigne la projection canonique de $T^*\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$ on note

$$S = \pi(H), \quad \Sigma_n = \pi(R_n), \quad \Sigma_\infty = \pi(R_\infty)$$

et $\sigma_n = \Sigma_n \cap \{x = 0\}$, $\sigma_\infty = \Sigma_\infty \cap \{x = 0\}$.

On obtient facilement les équations suivantes pour ces lieux géométriques :

$$S = \{(x,y,t),\ t > 0,\ x > t^2,\ y = \frac{x^2}{4t} + \frac{xt}{2} - \frac{t^3}{12}\}$$

$$\Sigma_\infty = \{(x,y,t),\ t > 0\quad 0 \leqslant x < t^2,\ y = 2/3\ x^{3/2}\}$$

$$\sigma_\infty = \{(y,t),\ t > 0,\ y = 0\}$$

$$\sigma_n = \{(y,t),\ t > 0,\ y = \frac{-t^3}{12(n+1)^2}\}$$

Remarques :

1) $\overline{SU\,\Sigma_\infty}$ est une surface C^1 pour $x > 0$, non analytique le long de la courbe $x = t^2$, $y = 2/3t^3$.

2) $\overline{SU\,\Sigma_o}$ est la surface analytique dont le demi fibré conormal ($\eta > 0$) est réunion des demi bicaractéristiques de P issues de $x = y = t = 0$, $\eta > 0$, $\tau = \xi^2$.

Les singularités de $u\big|_{x=o}$ sont :

$$SS(u\big|_{x=o}) = \{(0,0,\ \eta \geqslant 0, \tau)\}$$

Les points $\eta > 0$, $\tau < 0$ sont elliptiques pour le problème. Les points $\eta > 0$ $\tau > 0$ sont hyperboliques; ils génèrent les singularités de u sur $\mathcal{H}$.

C'est le point "glancing" m_o (ici strictement diffractif), défini par $\tau = 0$ qui nous intéresse; il est responsable des singularités de u sur le front diffracté Σ_∞. Si m est un point hyperbolique voisin de m_o, il existe deux demi bicaractéristiques de P issues de m, $\gamma_1(s)$, $\gamma_2(s)$, sur lesquelles on a $t > 0$, $(\frac{dt}{ds} < 0)$; on a $x > 0$ sur γ_1 et $x < 0$ sur γ_2 pour $|s|$ petit. La diffractivité de m_o entraine que x s'annule pour $s = s_o < 0$ sur γ_2 en un point hyperbolique. Ainsi peut-on imposer exactement n réflexions sur le bord à γ_2 et obtenir les R_n, qui sont réunion de bicaractéristiques brisées de P.

[Les singularités de $u\big|_{x=o}$ $\eta = o$, $\tau = \pm 1$ ne fournissent pas de singularités de u dans $t > 0$.]

On a les résultats suivants :

1) $SS(u\big|_{\substack{x > o \\ t > o}}) = T^*_+(\overline{SU\,\Sigma_\infty})$, où T^*_+ désigne le demi fibré conormal sur lequel on a $\eta > 0$

2) u est de classe Gevrey 3 aux points de Σ_∞ et non micro-holonome en ces points (plus précisément, si $p \in G_\infty$, codim support $(\mathcal{E}\bar{u})_p = 2$ où $\mathcal{E}$ désigne l'anneau des opérateurs microdifférentiels et $\bar{u}$ la microfonction associée à u)

3) Au voisinage de tout point de Σ_∞, il existe une carte locale (u_1, u_2, u_3) et un opérateur pseudo différentiel elliptique de degré O,Q, tels que

$$Qu = h(u_1) \quad \text{(modulo l'analytique)}$$

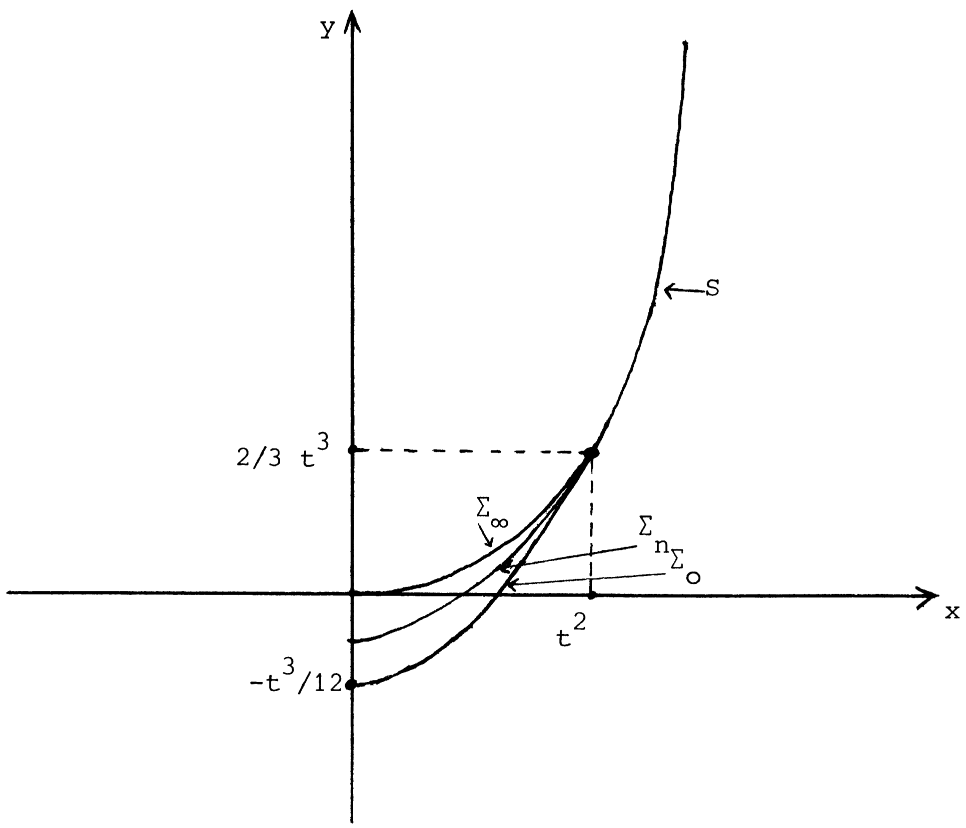
où $u_1 = 0$ est une équation locale de Σ_∞ et où h est valeur au bord d'une fonction holomorphe dans Im $u_1 > 0$ prolongeable d'un tour dans le sens direct autour de l'origine et dont le prolongement est singulier aux points $\alpha_n \in \mathbb{R}_-$, $\alpha_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ et où $u_1 = \alpha_n$ est une équation locale pour Σ_n (n grand).

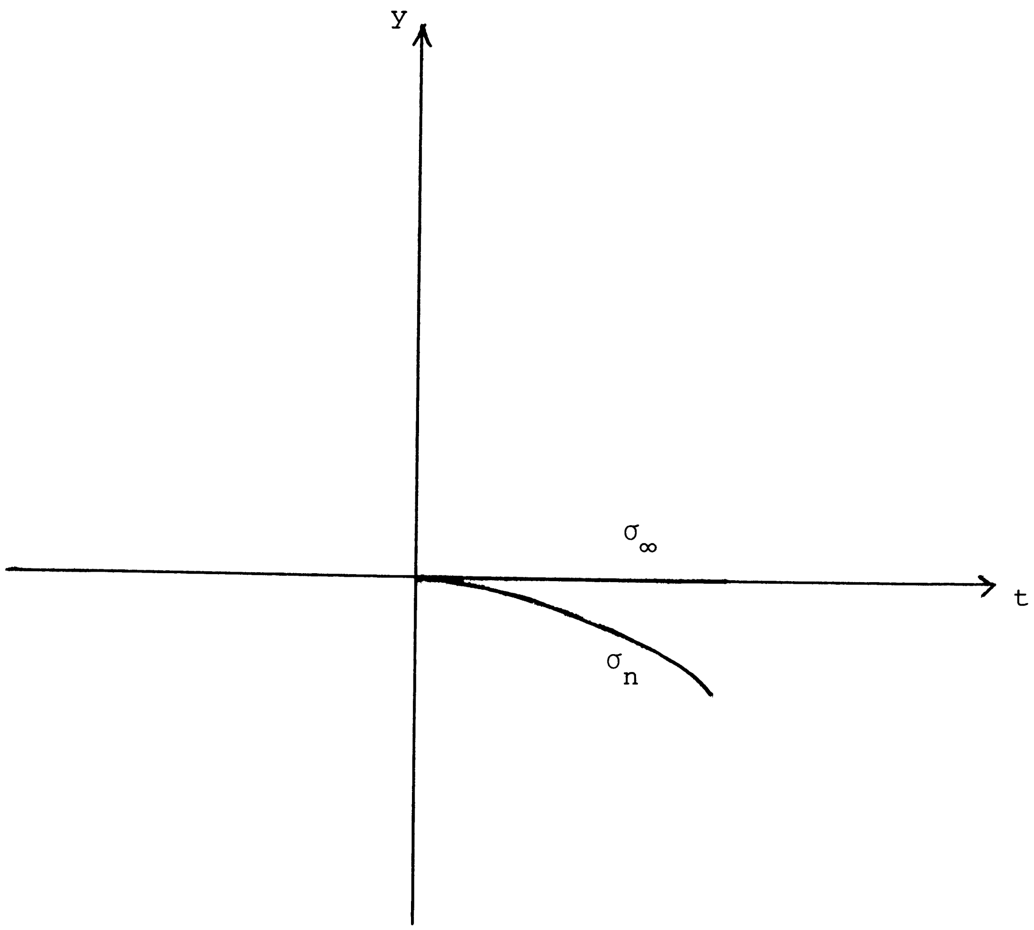
On a aussi des résultats analogues pour la trace de la dérivée normale de u, $\varphi = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}$:

1') $SS(\varphi) = SS(u|_{x=0}) \cup T^*_+(\sigma_\infty)$

2') φ est de classe Gevrey 3 aux points de σ_∞ et non micro holonome en ces points.

3') le prolongement holomorphe de φ autour de σ_∞ est singulier sur σ_n.





III. Les résultats 1) et 1') sont contenus dans (4); 2 et 2') se déduisent assez facilement de 3) 3') et de leurs preuves. On indique ici brièvement la méthode de démonstration de 3 et 3') (on peut naturellement regarder 3) comme un résultat de propagation à partir de 3').

On a la représentation intégrale suivante de u :

III.1 $$u = \int_{\substack{\eta \geqslant 1 \\ \omega \in \mathbb{R}}} e^{i\eta(y+t\omega)} \frac{\mathrm{Ai}[e^{i\pi/3}\, \eta^{2/3}(x+\omega)]}{\mathrm{Ai}[e^{i\pi/3}\, \eta^{2/3}\, \omega]}\, \eta d\eta d\omega$$

où Ai désigne la fonction d'Airy. Rappelons que l'on a

III.2 $$\mathrm{Ai}(\xi) = \xi^{-1/4}\, \Phi(z) \exp(-2/3\ \xi^{3/2}) \ ;\ z = \xi^{-3/2},\ |\mathrm{Arg}\,\xi| < \pi$$

où Φ est Gevrey 2 à l'origine (donc un symbole analytique régulier en $1/Z$)

Notons qu'il résulte de III.2, que les $\omega < 0$ dans III.1 ne contribuent pas au spectre de u. Par une réduction microlocale (qui fournit 1) comme corollaire) on obtient le lemme suivant :

<u>Lemme 1</u> : Au voisinage de tout point de Σ_∞ , il existe une carte locale (u_1, u_2, u_3) et un opérateur pseudo différentiel elliptique Q de degré 0 tels que (modulo une fonction analytique)

III.3
$$Qu = \int_0^{+} e^{i\eta u_1} \eta^{1/6} \mathcal{F}(-\eta^{1/3})\, d\eta$$

où $\mathcal{F}$ est la fonction de Fock : (5)

$$\mathcal{F}(x) = \int e^{-isx} Ai^{-1}[e^{i\pi/3} s]\, ds$$

et $u_1(x,t,y)$ est la valeur stationnaire de la phase

$$\lambda^{-3}[y + (t-\lambda)\omega - 2/3(x+\omega)^{3/2}]$$

(d'où il résulte que u_1 vérifie l'équation eikonale de P).

$\mathcal{F}$ est une fonction entière de x et on a :

$$x < 0 \qquad \mathcal{F}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-i\pi/3} \sigma_k e^{e^{i\pi/6} x x_k}$$

où $-x_k$ est le $k^{\text{ième}}$ zéro strictement négatif de la fonction d'Airy et $\sigma_k = Ai'(-x_k)^{-1}$

$$x > 0 \qquad \mathcal{F}(x) = e^{-ix^3/3}\, x a(x^3)$$

où a est un symbole analytique de degré 0.

Soit alors $h(z) = \int_0^{+\infty} e^{i\tau z} \tau^{1/6} \mathcal{F}(-\tau^{1/3})\, d\tau$ pour $\operatorname{Im} z > 0$.

On pose

$$h_k(z) = \sigma_k e^{-i\pi/3} \int_0^{+\infty} e^{i\tau z} \tau^{1/6} e^{-e^{i\pi/6}\tau^{1/3} x_k}\, d\tau$$

On a $h = \sum h_k$ pour $\operatorname{Im} z > 0$, la série étant uniformément convergente sur tout compact. Les fonctions $h_k(z)$ sont ramifiées de détermination finie autour de l'origine et pour $\varphi > 0$ on a :

$$h_k(ze^{i\varphi}) = e^{-i\pi/3}\sigma_k e^{-7i\varphi/6}\int_0^{+\infty} e^{i\tau z}\tau^{1/6} e^{-e^{i(\pi/6-\varphi/3)}\tau^{1/3}x_k}d\tau$$

Par suite, la série Σh_k est uniformément convergente sur tout compact du secteur angulaire $0 < \operatorname{Arg} z < 3\pi$ et donc h se prolonge à ce secteur.

On note h^*[resp. h_k*] les fonctions définies pour $\operatorname{Im} z > 0$ comme le prolongement analytique d'un tour dans le sens direct des fonctions h et h_k.

Lemme 2 : h^* est singulière aux points de l'axe réel $\alpha_n = \dfrac{-1}{12(n+1/2)^2}$, $n \geqslant 0$ et en 0.

En effet, les singularités de h^* sont les mêmes que celles de $\Sigma(h_k^* - h_k)$. Un calcul simple fournit pour $\operatorname{Im} z > 0$:

$$(h_k - h_k^*)(z) = 3\,\sigma_k\, x_k^{-7/2}\, e^{-i\pi/3}\int_\gamma e^{iu^3 z/x_k^3}\, u^{5/2} e^{-e^{i\pi/6}u}\,du$$

où γ est le chemin réunion des demi-droites d'argument $-2\pi/3$ et 0, orienté de gauche à droite. Posons alors pour $\operatorname{Re} s > 0$:

$$\theta(s) = s^{7/2}\int_\gamma e^{-s[t^3+e^{i\pi/6}t]}t^{5/2}\,dt$$

on obtient :

$$(h_k - h_k^*)(z) = 3\sigma_k\, x_k^{-7/2}\, e^{-i\pi/3}\,\theta\left(\left(\frac{i}{2}\right)^{1/2}x_k^{3/2}\right)$$

Le comportement asymptotique de θ pour $\operatorname{Re} s > 0$ est obtenu par la méthode de la phase stationnaire :

$$\theta(s) = \exp\left(\frac{-2}{3\sqrt{3}}\, e^{-i\pi/4}S\right)S^3\, a(s)$$

où a est un symbole analytique régulier de degré 0.

Remarquons que pour a réel négatif, on a $\left(\frac{i}{2}\right)^{1/2} = e^{-i\pi/4}|z|^{-1/2}$. Or $\sigma_k(-1)^k$ et x_k sont des symboles analytiques réguliers de k de degré respectif $-1/6$ et $2/3$. On est alors ramené à étudier les singularités pour t réel positif de la série définie pour $\operatorname{Im} t > 0$.

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k a_k\, e^{\frac{2}{3\sqrt{3}}\, i x_k^{3/2} t}\;\bar{b}(x_k^{3/2}t)$$

où a_k est un symbole analytique régulier de degré $-15/6$ et $\bar{b}$ un symbole analytique régulier de degré 3. Le lemme s'en déduit alors, compte tenu de :

$$x_k^{3/2} \simeq \frac{3\pi}{2} k$$

Il reste alors à vérifier que les surfaces Σ_n sont décrites par les équations :

$$u_1 + \frac{1}{12(n+1/2)^2} = 0$$

Compte tenu du fait que u_1 vérifie l'équation eikonale de P, il suffit de vérifier que

$$u_1(0,y,t) + \frac{1}{12} \frac{1}{(n+1/2)^2} = 0$$

est une équation de σ_n; un calcul simple fournit

$$u_1(0,y,t) = yt^{-3}[1 - 3yt^{-3} - 2(-3yt^{-3})^{1/2}]^{-1} \qquad (y < 0,\ t > 0)$$

ce qui assure le résultat.

Le résultat analogue pour la trace de la dérivée normale, φ, s'obtient plus aisément. En effet, on a :

$$\varphi = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} = \int e^{i(y+t\omega)\eta} e^{i\pi/3} \eta^{5/3} \frac{A_i'}{A_i}(e^{i\pi/3} \eta^{2/3}\omega)\, d\eta\, d\omega$$

Pour $t_0 > 0$ fixé et pour Im $y > 0$, on obtient :

$$\varphi(y,t_0) = \int e^{iy\eta} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-e^{i\pi/6} t_0 \eta^{1/3} x_k} \eta d\eta$$

et en suivant la preuve du lemme 2, on obtient les singularités du prolongement sur les courbes d'équation $yt^{-3} = \frac{-1}{12k^2}$ $k \geqslant 1$. C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Anderson, Melrose : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77, exposé n°1 Ecole Polytechnique 1977.

[2] L. Boutet de Monvel et P. Krée : Pseudo differential operators and Gevrey classes. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 17 (1967).

[3] G. Eskin : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77, exposé n° 12 , Ecole Polytechnique, 1977.

[4] Friedlander, Melrose : Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77, 81.

[5] V. A. Fock : J. Phys. USSR, 9, 225, 1945.

[6] Handbook of Mathematical functions, National Bureau of standards, Washington, 1964 .

[7] Sato, Kawai, Kashiwara : L.N. n° 287 (1973), Springer.

***