

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Y. OHYA

Le problème de Cauchy à caractéristiques multiples - II

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 10,
p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A11_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 9 - 1 9 8 0

LE PROBLEME DE CAUCHY A CARACTERISTIQUES

MULTIPLES -II^{*}-

par Y. OHYA

* Concernant -I-, voir Séminaire Vaillant 1979-1980.

Considérons le problème de Cauchy non caractéristique

$$(E) \quad \begin{cases} P(t, x; D_t, D_x) u(t, x) = f(t, x) & \text{dans } \Omega \\ D_t^j u(0, x) = \varphi_j(x) & (j = 0, 1, \dots, m-1) \text{ sur } t = 0 \cap \Omega \end{cases}$$

où Ω est une bande $[0, T] \times \mathbb{R}^\ell$, $D_t = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}$, $D_{x_j} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ ($1 \leq j \leq \ell$) et

$$P(t, x; D_t, D_x) = D_t^m + \sum_{\substack{|V|+j \leq m \\ j < m}} a_{Vj}(t, x) D_x^V D_t^j.$$

Notre but est de montrer l'existence de solution $u(t, x)$ et de domaine d'influence dans la classe $C^\infty(\Omega)$, étant données $a_{Vj}(t, x)$ et $f(t, x) \in C^\infty(\Omega)$ et $\varphi_j(x) \in [C^\infty(\mathbb{R}^\ell)]^m$.

Soit p le symbole de P ; $p = p_m + p_{m-1} + \dots + p_0$ où $p_k(t, x; \tau, \xi)$ est le symbole homogène de degré k . Pour la factorisation :

$$p_m(t, x; \tau, \xi) = \prod_{i=1}^{m-s} (\tau - \lambda_i(t, x; \xi)) \prod_{j=1}^s (\tau - \mu_j(t, x; \xi)),$$

on pose les

HYPOTHESES

1) $\lambda_i(t, x; \xi)$ ($1 \leq i \leq m-s$) et $\mu_j(t, x; \xi)$ ($1 \leq j \leq s$)

sont réelles pour tout $(t, x; \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}_\xi^\ell$,

2) elles appartiennent à $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_\xi^\ell \setminus 0)$,

3) pour chaque j ($1 \leq j \leq s$), $\lambda_j(t, x; \xi)$ et $\mu_j(t, x; \xi)$ peuvent se coïncider dans

$\Omega \times \mathbb{R}_\xi^\ell$, mais $\prod_{i=1}^{m-s} (\tau - \lambda_i(t, x; \xi)) = q_{m-s}(t, x; \tau, \xi)$ et

$\prod_{j=1}^s (\tau - \mu_j(t, x; \xi)) = \gamma_s(t, x; \tau, \xi)$ sont des polynômes strictement hyperboliques par rapport à τ .

On emploie les notations usuelles; $H_s(\mathbb{R}^\ell)$ est l'espace complété de $C_0^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ par la norme $\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^\ell} (1 + |\xi|)^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$, et on désigne $S^m(\Omega \times \mathbb{R}_\xi^\ell)$ l'ensemble de symboles des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre m que l'on note par

$L(m)$. Dans la suite, on ne considère que les opérateurs pseudo-différentiels par rapport à x , mais différentiels par rapport à t , et on définit

$$\tilde{L}(m) = \left\{ \sum_{j=0}^m b_j(t, x; D) D_t^{m-j} \quad \text{où} \quad b_j(t, x; D) \in L(m) \right. \\ \left. \text{dépendant de } t \text{ comme paramètre} \right\}.$$

Soient Q et R deux opérateurs pseudo-différentiels de $\tilde{L}(m-s)$ et $\tilde{L}(s)$ associés aux q_{m-s} et r_s ; c'est-à-dire,

$$\begin{cases} q = \text{symbole de } Q \sim q_{m-s} + q_{m-s-1} + \dots \\ r = \text{symbole de } R \sim r_s + r_{s-1} + \dots \end{cases}$$

où q_i et r_j sont des fonctions indéfiniment dérivables, homogènes de degré i et j par rapport à (τ, ξ) et polynômes de degré i et j par rapport à τ . A la place de (E), on résoud :

$$(E)' \quad \begin{cases} Ru = v \\ Qv = -(P - QR)u + f \end{cases}$$

où Q et R sont des opérateurs pseudo-différentiels strictement hyperboliques.

D'abord, on se rappelle du

Lemme 0 : Si $P(t, x; D_t, D)$ est un opérateur pseudo-différentiels strictement hyperboliques de $\tilde{L}(m)$, alors il existe γ telle que

$$|(\|D^{n+m-1} u(t)\|_{\sigma})'_t| \leq \gamma (\|D^{n+m-1} u(t)\|_{\sigma} + \|D^n(Pu(t))\|_{\sigma})$$

pour n : $\forall$ entier (≥ 0) et σ : $\forall$ réel, où

$$\|D^n f(t)\|_{\sigma} = \sup_{0 \leq i \leq n} \|D_t^i u(t)\|_{\sigma+n-i}.$$

Evidemment, il faut imposer une certaine condition sur P pour la résolubilité dans $C^{\infty}(\Omega)$, puisque, en général, on a $(P - QR) \in \tilde{L}(m-1)$; en effet,

$$\begin{aligned} \text{symbole de } (P - QR) &\sim (p_m - q_{m-s} r_s) + \\ &+ \left\{ p_{m-1} - \frac{1}{i} \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial q_{m-s}}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial r_s}{\partial x_{\alpha}} - (q_{m-s} r_{s-1} + q_{m-s-1} r_s) \right\} + \\ &+ \text{termes de degré } \leq m-2. \end{aligned}$$

En définissant

$$(1) \quad \ell_{m-1} = p_{m-1} - \frac{1}{i} \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial q_{m-s}}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial r_s}{\partial x_{\alpha}},$$

si l'on peut établir

$$(2) \quad \ell_{m-1} = q_{m-s} r_{s-1} + q_{m-s-1} r_s$$

par le choix convenable de (q_{m-s-1}, r_{s-1}) , alors on aura $(P - QR) \in \tilde{L}(m-2)$.

Pour nous conduire bien, citons deux exemples ;

$$i) \quad P = D_t^2 - x^2 D_x^2 + cx D_x$$

$$ii) \quad P = D_t^2 - t^2 D_x^2 + c D_x.$$

On a déjà exposé le résultat pour i) dans le Séminaire Vaillant [14], donc dans cet exposé, on discute le cas ii). Une propriété typique de cet exemple est que l'on peut supposer

$$(3) \quad \mu_j - \lambda_j / t \in C^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^{\ell} \setminus 0).$$

Si l'on pose $\tau = \mu_j$ dans (2), alors on a

$$\ell_{m-1}(t, x; \mu_j(t, x; \xi), \xi) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m-s} (\mu_j - \lambda_i) \frac{\mu_j - \lambda_j}{t} (\text{tr}_{s-1}(\mu_j))$$

pour $1 \leq j \leq s$, qui détermine $\text{tr}_{s-1}(t, x; z, \xi)$ de telle manière que tr_{s-1} est une fonction indéfiniment dérivable de $\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^{\ell} \setminus 0$, sous l'hypothèse - condition généralisée de E. E. Levi -

$$(4) \quad \text{pour chaque } j \ (1 \leq j \leq s), \ \ell_{m-1}(\mu_j) \text{ est divisible par } \frac{\mu_j - \lambda_j}{t} \text{ au sens de } \ell_{m-1}(\mu_j) / \frac{\mu_j - \lambda_j}{t} \in C^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^{\ell} \setminus 0) \text{ compte tenu de (3).}$$

Désormais, on considère

$$(5) \quad \begin{cases} q \sim q_{m-s} + \frac{q_{m-s-1}}{t} + q_{m-s-2} + \dots \\ r \sim r_s + \frac{r_{s-1}}{t} + r_{s-2} + \dots \end{cases}$$

Théorème 1 : Pour le problème de Cauchy (E) sous les hypothèses 1) 2) 3) et (3), si l'on suppose (4), alors on a

$$\|D^{n+m-2}u(t)\|^2 \leq C \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{m-j+n+m+N}^2 + \right. \\ \left. + \|D^N f(0)\|_{n+m}^2 + \int_0^t \|D_\tau^{N+1} f(\tau)\|_n^2 dz \right\}$$

pour $n : \forall$ entier (≥ 0), N étant choisi convenablement. Il se démontre par les Lemmes suivants.

Lemme 1 : Soit le symbole de $\tilde{P} \sim p_m + \frac{p_{m-1}}{t} + p_{m-2} + \dots + p_0$. Si p_m est un symbole strictement hyperbolique, alors on aura

$$|(\|D^{n+m-1}u(t)\|_t^2)| \leq C(\|D^{n+m-1}u(t)\|^2 + \\ + \sum_{k=0}^n \frac{\|D^{n+m-1-k}u(t)\|^2}{t^{2k+1}} + t \|D^n f(t)\|_\sigma^2)$$

pour $n : \forall$ entier (≥ 0) et $\sigma : \forall$ réel.

Lemme 2 :

$$\|D^n(P - QR)u(t)\| \leq \text{const.} \sum_{k=0}^{n+m-s-1} \frac{\|D^{n+m-2-k}u(t)\|}{t^{k+2}}$$

A cause du Lemme 2 - c'est-à-dire, il y a singularité plus élevée que le Lemme 1 - on fait depuis le début $u = tw$, alors on a

$$(E)'' \quad \begin{cases} R w = \frac{1}{t}(v - [R, t]w) \\ Q v = -(P - QR)(tw) + f, \end{cases}$$

où $[A, B] = AB - BA$.

Lemme 3 :

$$\|D^n \left(\frac{v - [R, t]w}{t} \right)\| \\ \leq \text{const.} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{\|D^{n-k}v(t)\|}{t^{k+1}} + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\|D^{n+s-1-k}w(t)\|}{t^{k+1}} \right\}.$$

Compte tenu des lemmes 2 et 3, on emploie le Lemme 1 à chacune des équations (E)'', on obtient

$$(6) \quad (\|D^{n+m-2}w(t)\|^2)'_t \leq \gamma \{\|D^{n+m-2}w(t)\|^2 + \\ + \sum_{k=0}^{n+m-s-1} \frac{\|D^{n+m-s-1-k}v(t)\|^2}{t^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{n+m-s} \frac{\|D^{n+m-2-k}w(t)\|^2}{t^{2k+1}}\}$$

$$(7) \quad (\|D^{n+m-s-1}v(t)\|^2)'_t \leq \gamma \{\|D^{n+m-s-1}v(t)\|^2 + \\ + \sum_{k=0}^n \frac{\|D^{n+m-s-1-k}v(t)\|^2}{t^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{n+m-s} \frac{\|D^{n+m-2-k}w(t)\|^2}{t^{2k+1}} \\ + t \|D^n f(t)\|^2\}.$$

En choisissant $n+m-2-j$ au lieu de $n+m-2$ dans (6) et $n+m-s-1-j$ au lieu de $n+m-s-1$ dans (7), on ajoute ces deux inégalités.

Si l'on définit

$$(8) \quad \Phi_n(t) = \sum_{j=0}^{n+m-s} \frac{\|D^{n+m-2-j}w(t)\|^2}{t^{2j+1}} + \sum_{j=0}^{n+m-s-1-j} \frac{\|D^{n+m-s-1-j}v(t)\|^2}{t^{2j+1}}$$

alors on aura

$$t\Phi'_n(t) \leq Ct\Phi_n(t) + (\Gamma - 1)\Phi_n(t) + C \frac{\|D^n f(t)\|^2}{t^{2n-3}}$$

où

$$\Gamma = 2(\gamma - 1)(n+m-s) + 2\gamma \quad \text{et} \quad C = \max(\gamma, \gamma \frac{t^{2n-1}}{t^2 - 1})$$

En multipliant $t^{-\Gamma} e^{-Ct}$, il s'ensuit :

$$(t^{-\Gamma+1} e^{-Ct} \Phi_n(t))' \leq Ct^{-\Gamma-2n+3} e^{-Ct} \|D^n f(t)\|.$$

Si l'on peut vérifier

$$(9) \quad \lim_{t \downarrow 0} t^{-\Gamma+1} e^{-Ct} \Phi_n(t) = 0,$$

alors on peut l'intégrer ; donc on a

$$\Phi_n(t) \leq C t^{\Gamma-1} \int_0^t t^{-\Gamma-2n+3} e^{C(t-\tau)} \|D^n f(\tau)\|^2 d\tau.$$

Pour vérifier (9), on définit

$$z(t,x) = u(t,x) - \sum_{j=0}^{N+m} \frac{(it)^j}{j!} D_t^j u(0,x)$$

à nouveau .

En employant le raisonnement ci-dessus au problème de Cauchy

$$\begin{cases} Pz = g \\ D_t^j z(0,x) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, N+m) \end{cases}$$

où $g = f - P\left\{\sum_{j=0}^{N+m} \frac{(it)^j}{j!} D_t^j u(0,x)\right\}$, si l'on tient compte du

Lemme 4 :

$$D_t^k g(0,x) = 0 \quad (k \leq N)$$

implique

$$\|g(s)\|^2 \leq \text{const.} S^{2N+1} \int_0^S \|D_z^{N+1} g(z)\|^2 dz,$$

on peut terminer la preuve du théorème 1, en choisissant $N \geq \max(\frac{\Gamma-1}{2} + n - 1, 2n - \frac{7}{2})$.

Théorème 2 : Pour le problème de Cauchy adjoint à (E)

$$(E)^* \quad \begin{cases} P^*(t,x; D_t, D_x) v(t,x) = h(t,x) \quad \text{dans } \Omega \\ D_t^j v(T,x) = \psi_j(x) \quad (j = 0, 1, \dots, m-1) \end{cases}$$

sous les hypothèses 1) 2) 3) et (3), si l'on suppose (4), alors on aura

$$\begin{aligned} \int_0^T \|D^{n+m-2} v(t)\|^2 dt &\leq \text{const.} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \|\psi_j\|_{m-j+n+M}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \|D^{n+M-1} h(T)\|_M^2 + \int_0^T \|D^{n+M-1} h(\tau)\|_M^2 d\tau \right\} \end{aligned}$$

où M est le plus petit entier plus grand que

$$(n+s)(\gamma+1) + \gamma - 1.$$

On résoud (E)'' comme il précède ;

$$\begin{cases} Qv = w \\ Rv = -(P^* - RQ)v + h \end{cases}$$

ou plutôt en posant

$$v = t\tilde{v}, \quad \begin{cases} R\tilde{v} = \frac{1}{t}(w - [Q, t]\tilde{v}) \\ Rv = -(P^* - RQ)(t\tilde{v}) + h. \end{cases}$$

Alors on aura

$$t^{A-2} \|D^{n+m-2} v(t)\|_N^2 \leq \text{const.} \{T^{1+A} \phi_n^*(T) + \int_t^T \tau^{A-2n+3} \|D^n h(\tau)\|_N^2 d\tau\}$$

pour n'importe quel entier positif N, où

$$A = 2\{Cn + s(\gamma + 1) + \gamma\},$$

puisque

$$P^* - RQ \in \tilde{L}^{(m-2)}$$

sous l'hypothèse (4).

Si l'on emploie les

Lemme 5 : Pour $\sigma : \forall$ réel, il existe δ_j ($j = 1, 2$) tel que

$$\begin{aligned} \|D^{n+m-2} v(t)\|_\sigma^2 &\geq \delta_1^k \|D^{n+m-2+k} v(t)\|_{\sigma-k}^2 - \\ &\quad - \sum_{i=0}^{k-1} \delta_2 \delta_1^i \|D^{n-1+i} h(t)\|_{\sigma-1-i}^2. \end{aligned}$$

Lemme 6 : Pour $\sigma : \forall$ réel, il existe $\{A_i\}_{0 \leq i \leq \mu}$ $\{\beta_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$ tel que

$$A_1 \int_0^T \|D_t^{\lambda-\mu} v(t)\|_\sigma^2 dt - \sum_{i=1}^{\mu} A_{i+1} \beta_i T^{2i-1} \|D_t^{\lambda-\mu+i-1} v(T)\|_\sigma^2 \\ \leq \int_0^T t^2 \|D_t^{\lambda} v(t)\|_\sigma^2 dt$$

pour $\lambda (\geq) \mu : \forall$ entier (≥ 0) , alors on complétera la preuve du Théorème 2.

Théorème 3 : Pour le problème de Cauchy (E) sous les hypothèses 1) 2) 3) et (3) si l'on suppose (4), alors il existe une solution dans $H_\infty(\Omega)$ pour $f \in H_\infty(\Omega)$ et $\varphi_j \in [H_\infty(\mathbb{R}^2)]^m$.

A la fin, on peut vérifier qu'il y a domaine d'influence pour le problème de Cauchy (E) comme une propriété typique d'hyperbolicité. En effet, on a le

Théorème 4 : Pour le problème de Cauchy (E) où $f \equiv 0$ sous les hypothèses 1) 2) et 3), si l'on suppose

$$(p_{m-1} - \frac{1}{2i} \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_\alpha \partial x_\alpha}) (t, x; \mu_j(t, x; \xi), \xi) / \frac{\mu_j - \lambda_j}{t} \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_\xi^\ell \setminus 0)$$

et

$$\{q_{m-s}, r_s\}(\mu_j) / \frac{\mu_j - \lambda_j}{t} \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_\xi^\ell \setminus 0)$$

pour chaque j ($1 \leq j \leq s$), où $\{ , \}$ est la parenthèse de Poisson, alors il y a domaine d'influence ; plus précisément, pour chaque t , le support de $u(t, x)$ est contenu dans l'ensemble

$$\{x; \exists y |x-y| \leq \lambda \max_y t, \text{ où } y \text{ parcourt le support des données}$$

$$(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x))\}, \text{ où } \lambda \max = \sup |\lambda_i(t, x; \xi)| \text{ pour } (t, x) \in \Omega,$$

$$|\xi| = 1 \text{ et } 1 \leq i \leq m.$$

Remarquons que l'on ne peut pas montrer le théorème d'unicité locale qui est une extension du théorème d'Holmgren; puisque notre hypothèse (4) ne peut pas être conservée par la transformation d'hypersurface spatiale.

Considérons deux problèmes de Cauchy ;

$$a) \quad \begin{cases} P u = 0 & \text{dans } \Omega \\ D_t^j u(0, x) = \varphi_j(x) \\ (0 \leq j \leq m-1) \end{cases} \quad \text{et} \quad a)^* \quad \begin{cases} P^* v = h & \text{dans } \Omega \\ D_t^j v(T, x) = 0 \\ (0 \leq j \leq m-1) \end{cases} .$$

Si l'on envisage $a)^*$ sur $[\delta, T] \times \mathbb{R}^\ell$ pour n'importe quel δ positif, alors nos hypothèses du Théorème 4 sont les mêmes que celles du Théorème 4 de [14], pour lequel il y a le théorème d'unicité locale, donc domaine d'influence ; c'est à-dire, on a

$$\text{supp } v(t, x) \subset \bigcup_{(s, y) \in \text{supp}[h]} \{(t, x) \in [\delta, T], |x - y| \leq \tilde{\lambda}_{\max} |t - s|\}$$

où $\tilde{\lambda}_{\max} = \sup_{[\delta, T] \times \mathbb{R}^\ell} |\lambda_i(t, x; \xi)|$. Alors, il est évident que l'on peut remplacer $|\xi| = 1$ $1 \leq i \leq m$

$\tilde{\lambda}_{\max}$ par $\lambda_{\max}$, à cause de notre hypothèse 2). Ceci nous permet de montrer l'unicité de $u(t, x)$ du problème a), d'où il résulte l'existence de domaine d'influence.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Chazarain : Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, Ann. Inst. Fourier (1974).
- [2] V. Ja. Ivrii et V. M. Petkov : Necessary conditions for the correctness of the Cauchy problem for non strictly hyperbolic equations, Uspehi Mat. Nauk (1974).
- [3] J. Leray : Particules et singularités des ondes, Applications des équations non linéaires à la physique théorique (1962), Gauthier-Villars.

- [4] J. Leray et Y. Ohya : Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts, Deuxième colloque sur l'Analyse Fonctionnelle (1964).
- [5] E. E. Levi : Caratteristiche multiple e problema di Cauchy, Ann. Math. Pura Appl. (1909).
- [6] A. Menikoff : The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Amer. J. Math. (1975).
- [7] S. Mizohata et Y. Ohya : Sur la condition de E. E. Levi concernant des équations hyperboliques, Publ. Res. Inst. Math. Sci. (1968).
- [8] S. Mizohata et Y. Ohya : Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples II, Jap. J. Math. (1971).
- [9] T. Nishitani : Some remarks on the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, J. Math. Kyoto Univ. (1977).
- [10] Y. Ohya : Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristique multiple , J. Math. Soc. Japan (1964).
- [11] Y. Ohya : Le problème de Cauchy à caractéristiques multiples, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (1977).
- [12] O. A. Oleinik : On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math. (1970).
- [13] R. T. Seeley : Singular integrals on compact manifolds, Amer. J. Math. (1959).
- [14] Y. Ohya : Séminaire Vaillant 1979-1980.

*
* *
*