Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

L. Tartar

Homogénéisation et compacité par compensation

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 9, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

HOMOGENEISATION ET COMPACITE PAR COMPENSATION

par L. TARTAR

Exposé n° IX

19 Décembre 1978

Ces deux théories servent à étudier les relations "échelle microscopique-échelle macroscopique", la première dans le cas d'inhomogénéité en espace, la seconde dans le cas de comportement non linéaire.

Les idées et résultats exposés ici ont été obtenus en collaboration avec François Murat.

§ 1. HOMOGENEISATION

I.1 Introduction

Dans la pratique presque tous les matériaux, même considérés comme homogènes sont en fait hétérogènes (acier par exemple); les exceptions ont en général une structure cristalline.

Les expériences que l'on peut faire avec ces matériaux (diffusion de la chaleur, déformations élastiques, propagation des ondes) font apparaître, à côté des grandeurs physiques définies au niveau microscopique d'autres grandeurs, définies de manière assez vague : les grandeurs macroscopiques. L'homogénéisation donne un modèle mathématique permettant de relier ces notions par l'utilisation de topologies faibles.

I.2 Un exemple

Le cas le plus simple est celui des équations elliptiques du deuxième ordre ; on utilise ici l'interprétation électrostatique.

Le potentiel électrostatique u, le champ électrique E, le champ d'induction électrique D, la densité de charges électriques ρ, la densité d'énergie électrostatique e sont reliés, dans un matériau homogène par les équations (dans un ouvert Ω ; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dans toute la suite)

(1) $E = -\text{grad } u$

(2) $D = AE$

(3) $\text{div } D = \rho$

(4) $e = E.D$

. A est la matrice de conductivité du matériau (la physique nous dit que A est symétrique définie positive, ce qui montre que (1) (2) (3) est une équation elliptique en u).

. Dans le cas d'un matériau isotrope $A = aI$ ce qui donne $- a\Delta u = \rho$.

. Si on a une interface (régulière) entre deux matériaux, le potentiel, la composante tangentielle de E et la composante normale de D sont continus à l'interface ; cela exprime que (1) et (3) sont valables au sens des distributions.

. Il faut évidemment rajouter des conditions aux limites qui dépendent de l'expérience faite avec le matériau.

. On obtient ainsi une équation aux dérivées partielles, à coefficients discontinus,

$$(5)\quad -\operatorname{div}(A \operatorname{grad} u) = \rho$$

et pour que l'énergie électrostatique contenue dans le matériau soit finie on cherche u avec grad $u \in L^2(\Omega)$ soit (en supposant Ω borné et régulier)

$$(6)\quad u \in H^1(\Omega).$$

. L'homogénéisation intervient quand le matériau est hétérogène (formé de composants ayant des A différents) et que les morceaux sont "petits" ; alors E et D, étant discontinus à chaque interface, ont des variations importantes sur de petites distances et le besoin d'introduire des grandeurs moyennes dites macroscopiques a été perçu très tôt ; pour comprendre ce que sont ces grandeurs macroscopiques et expliquer l'utilisation de la topologie faible le cas périodique est instructif (et simple car la théorie des développements asymptotiques s'applique) :
ce cas suppose que $A = A(\frac{x}{\varepsilon})$ avec A périodique de périodes indépendantes $y_1,\ldots,y_n$ (Y désigne le parallélipipède engendré par $y_1,\ldots,y_n$) ; alors, sous certaines hypothèses concernant les conditions aux limites, on a un développement

$$u = u_o(x) + \varepsilon u_1(x,\frac{x}{\varepsilon})+\ldots$$

où $u_1(x,y)$ est périodique en y.

Alors $E = -\operatorname{grad} u_o(x) - \operatorname{grad}_y u_1(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon(.) + \ldots$ On voit que u est voisin de u_o quand ε tend vers 0 et donc des mesures du potentiel donneront une information voisine de u_o. On aura donc tendance à croire E voisin de $E = -\operatorname{grad} u_o$; or ceci n'est pas vrai pour la topologie forte de $L^2(\Omega)^N$ (le terme $-\operatorname{grad}_y u_1(x,\frac{x}{\varepsilon})$ ne tendant pas vers 0) mais c'est vrai pour la topologie faible de $L^2(\Omega)^N$ (le terme incriminé tendant faiblement vers 0). [Il est bon de se rappeler que sur les bornés de $L^2(\Omega)$ la topologie faible est métrisable].

De même $D = A(\frac{x}{\varepsilon})(-\operatorname{grad} u_o(x) - \operatorname{grad}_y u_1(x_1,\frac{x}{\varepsilon})) + \varepsilon(\ .\ )$ est voisin de $D_o(x)$ = moyenne sur Y de $[A(y)(-\operatorname{grad} u_o(x) - \operatorname{grad}_y u_1(x,y))]$. Le résultat principal de l'homogénéisation dit qu'il existe A_o qui ne dépend que de

$A(y)$ tel que $D_o = A_o E_o$.

Donc vis à vis des grandeurs macroscopiques E_o, D_o tout se passe comme si on avait un matériau homogène de conductivité A_o. De plus $e = E.D = e_o(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon(.) + \dots$ et on a donc une densité macroscopique d'énergie électrostatique $e_o(x)$ = moyenne sur Y de $e_o(x.y)$. Alors on a la surprise agréable de s'apercevoir que $e_o(x) = E_o(x).D_o(x)$.
[Pour obtenir les formules qui donnent A_o (on les verra plus loin) il suffit dans (3) d'identifier les puissances de ε (et d'utiliser à bon escient l'alternative de Fredholm) ; mais cette approche est plutôt formelle et il est difficile, sauf cas particulier (conditions de Dirichlet) de faire la démonstration sans utiliser les techniques d'homogénéisation, qui elles sont valables dans des cas plus généraux.]

I.3 Résultats types

Le problème qu'on se pose est le suivant :
Soit A^n, u^n, E^n, D^n, ρ^n, e^n liés par (1) - (4). On fait les hypothèses

$$(7) \quad \begin{aligned} &A^n \text{ borné dans } L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)) \\ &u^n \text{ borné dans } H^1(\Omega) \\ &E^n, D^n \text{ borné dans } (L^2(\Omega))^N \end{aligned}$$

On suppose de plus :

$$(8) \qquad (A^n\lambda, \lambda) \geq \alpha|\lambda|^2 \text{ p.p } \forall n \qquad (\alpha > 0).$$

La question est alors la suivante :

Si $E^n \rightharpoonup E^\infty$ et $D^n \rightharpoonup D^\infty$ dans $(L^2(\Omega))^N$ faible que devient la relation (2) et la relation (4) quand n tend vers l'infini. [Les relations (1) et (3) sont linéaires et donc sont conservées par limite faible; au contraire les relations (2) et (4) étant non linéaires il n'est pas clair qu'elles se comportent bien vis à vis de la convergence faible].

La réponse est donnée par le :

Théorème 1 : Il existe une sous-suite A^m et $A^\infty \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ vérifiant (8) tel que si

$$(9) \quad \begin{cases} u^m \rightharpoonup u^\infty \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible (donc } E^n \rightharpoonup E^\infty \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible)} \\ \rho^m \to \rho^\infty \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ fort} \end{cases}$$

alors

$$(10) \quad D^m \rightharpoonup D^\infty = A^\infty E^\infty \quad \text{dans} \quad (L^2(\Omega))^N \text{ faible}$$

$$(11) \quad e^m = E^m.D^m \rightharpoonup e^\infty = E^\infty . D^\infty \text{ au sens des distributions .} \blacksquare$$

On peut donner une notion de convergence (dite H-convergence ou convergence au sens de l'homogénéisation et notée $A^m \xrightarrow{H} A^\infty$) par la définition suivante :

<u>Définition</u> : $A^n \xrightarrow{H} A^\infty$ si quelle que soit la suite $E^n \rightharpoonup E^\infty$ dans $(L^2(\Omega))^N$ faible avec $E^n = -\text{grad}\, u^n$ et $\text{div}(A^n E^n) \in$ compact de $H^{-1}(\Omega)$ on ait $A^n E^n \rightharpoonup A^\infty E^\infty$.

Alors le théorème exprime que les bornés de $L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ vérifiant (8) sont relativement compacts pour la topologie correspondante.

On peut donner alors quelques propriétés supplémentaires :

<u>Compléments au théorème 1</u> :

1 - La H-convergence est locale : si $A^n \xrightarrow{H} A^\infty$ et $B^n \xrightarrow{H} B^\infty$ avec $A^n = B^n$ sur un ensemble mesurable E alors $A^\infty = B^\infty$ presque partout sur E. Pourtant elle n'est pas reliée simplement à la convergence faible : la connaissance de toutes les limites faibles de suites $F(A^n)$ pour toutes les fonctions continues (à croissance au plus linéaire) sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, ne suffit pas à caractériser A^∞ (la définition de ces limites faibles n'utilise que la structure d'espace mesuré alors que la H-convergence utilise la structure différentiable de Ω).

2 - Si les A^n sont symétriques alors A^∞ est symétrique (mais si les A^n sont de la forme $a^n I$ il n'en est pas de même de A^∞)

3 - Si $|A^n\lambda| \leq \beta|\lambda|$ presque partout alors A^∞ vérifie une inégalité semblable avec $\beta' = \frac{\beta^2}{\alpha}$ dans le cas général, mais $\beta' = \beta$ dans le cas symétrique.

4 - Si les A^n sont symétriques on peut comparer A^∞ à des limites faibles : si $A^n \rightharpoonup A_+$ dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ faible * et $(A^n)^{-1} \rightharpoonup (A_-)^{-1}$ dans $L^\infty(\Omega), \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ faible * alors on a $A_- \leq A^\infty \leq A_+$ presque partout (pour l'ordre défini par la positivité des matrices symétriques)

5 - Il n'est pas nécessaire que E^m soit un gradient pour conclure (10) ; si $E^m \rightharpoonup E^\infty$ dans $(L^2(\Omega))^N$ faible avec $D^m = A^m E^m$ et si $\text{div}\, D^m \in$ compact de $H^{-1}(\Omega)$ et rot $E^m \in$ compact de $(H^{-1}(\Omega))^{N^2}$ alors on a $D^m \rightharpoonup D^\infty = A^\infty E^\infty$ dans $(L^2(\Omega))^N$ faible et $E^m D^m \rightharpoonup E^\infty . D^\infty$ au sens des distributions .

6 - On peut préciser la différence entre E^m et E^∞ ; il existe une suite $P^m \in L^2(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ (qui ne dépend que de A^m) tel que

(12) $$\begin{cases} P^m \rightharpoonup I & \text{dans } L^2(\,.\,) \text{ faible et} \\ E^m - P^m E^\infty \to 0 & \text{dans } L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ fort .} \\ A^m P^m \rightharpoonup A^\infty & \text{dans } L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)) \text{ faible * .} \end{cases}$$

Cette suite $\mathbb{P}^m$ permet de déduire des informations sur les limites faibles de fonctions de E^m (ou de E^m et D^m) .

7 - Dans le cas où A^n est périodique : $A^n(x) = A(\frac{x}{\varepsilon_n})$ avec $\varepsilon_n \to 0$ on peut expliciter A^∞ (et aussi $\mathbb{P}^m$) ; qui ici est constant :
Pour $\lambda \in \mathbb{R}^N$ on résout le problème

(13) $$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(y)\operatorname{grad} w_\lambda) = 0 \\ w_\lambda - \lambda.y \text{ périodique sur } Y \end{cases}$$

Alors on a (14) $A^\infty\lambda$ = moyenne sur Y de $A(y)\operatorname{grad} w_\lambda(y)$. [On peut choisir $\mathbb{P}^m(x) = \mathbb{P}(\frac{x}{\varepsilon_m})$ avec $\mathbb{P}(y)\lambda = \operatorname{grad} w_\lambda(y)$] .

<u>Principes des démonstrations</u> : En plus d'estimations a priori standard (les coefficients étant irréguliers on doit utiliser une approche variationnelle) tout est basé sur l'utilisation répétée du lemme suivant :

<u>Lemme 1</u> : Si $\varphi^n \rightharpoonup \varphi^\infty$, $\psi^n \rightharpoonup \psi^\infty$ dans $(L^2(\Omega))^N$ faible avec $\operatorname{div}\varphi^n \in$ compact de $H^{-1}(\Omega)$ et $\operatorname{rot}\psi^n \in$ compact de $(H^{-1}(\Omega))^{N^2}$ alors $\varphi^n.\psi^n \rightharpoonup \varphi^\infty.\psi^\infty$ au sens des distributions.

Ce lemme, qui est un cas particulier de compacité par compensation, s'obtient par simple intégration par parties si $\psi^n = \operatorname{grad} v^n$: dans ce cas on peut supposer que $\operatorname{div}\varphi^n \to \operatorname{div}\varphi^\infty$ dans $H^{-1}(\Omega)$ fort et $v^n \rightharpoonup v^\infty$ dans $H^1_{loc}(\Omega)$ faible ; alors si $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on peut passer à la limite dans $\langle \operatorname{div}\varphi^n, \chi v^n\rangle = -\langle \varphi_n, \chi\psi^n + \operatorname{grad}\chi\, v^n\rangle$ ce qui donne $\langle \operatorname{div}\varphi^\infty, \chi v^\infty\rangle = -\lim \int \chi\varphi^n.\psi^n dx - \langle \varphi_\infty, \operatorname{grad}\chi\, v^\infty\rangle$ d'où $\lim\int \chi\varphi^n.\psi^n dX = \int \chi\varphi^\infty.\psi^\infty dx$.

Alors pour trouver la relation entre E^∞ et D^∞ il suffit de fabriquer des fonctions test v^n telles que $\psi^n = \operatorname{grad} v^n \rightharpoonup \lambda$ dans $(L^2(\Omega))^N$ faible (avec $\lambda \in \mathbb{R}^N$) et $\operatorname{div}({}^tA^n \operatorname{grad} v^n) = 0$ avec $\varphi^n = {}^tA^n \operatorname{grad} v^n$ qui convergera (après extraction d'une sous-suite) vers une limite qu'on appelle ${}^tA^\infty(x)\lambda$: alors il suffit d'appliquer le lemme à $D^n.\psi^n = E^n.\varphi^n$ pour déduire que $D^\infty.\lambda = E^\infty.{}^tA^\infty\lambda$ presque partout.

Pour fabriquer les v^n il suffit de résoudre sur Ω un problème de Dirichlet .

I.4 Généralisations

Dans l'exemple précédent il n'a jamais été fait usage du principe du maximum mais uniquement de méthodes variationnelles. C'est un simple exercice d'écrire les résultats correspondants pour d'autres équations elliptiques (systèmes de l'élasticité par exemple) ou pour des équations d'évolution obtenues en rajoutant $\frac{du}{dt}$ ou $\frac{d^2u}{dt^2}$ (avec les coefficients fonctions de X seul) ; on peut traiter certains cas où les coefficients sont aussi fonctions de t.

Une généralisation plus importante est celle des problèmes dégénérés : cas où $A = 0$ ou ∞ dans l'exemple utilisé.

Le cas où $A = 0$ sur ω correspond à un isolant parfait : alors $D = 0$ sur ω mais E n'est pas défini ; le cas où $A = \infty$ dans ω correspond à un conducteur parfait : alors $E = 0$ sur ω mais D n'est pas défini. Dans le cas où les inclusions où $A = 0$ ou ∞ sont assez régulières et bien espacées (ce qui est automatiquement vérifié dans le cas d'une répartition périodique) on obtient des résultats d'homogénéisation analogue. Pour cela il faut fabriquer un prolongement de E dans les parties isolantes et de D dans les parties conductrices (c'est pour fabriquer ce prolongement qu'on fait des hypothèses de régularité et d'espacement sur les inclusions). Les inclusions peuvent être considérées comme des trous dans Ω (avec des conditions aux limites adéquates sur le bord des trous), les prolongements fabriqués pour la démonstration n'ayant pas forcément une interprétation physique. Les techniques d'homogénéisation s'appliquent aussi à des cas non linéaires ; on peut d'ailleurs combiner les résultats d'homogénéisation et de compacité par compensation.

§ II. COMPACITE PAR COMPENSATION

Le lemme 1 vu précédemment est un exemple type ; répétons le plus en détail ; on a des suites :

(15)
$$\begin{cases} \varphi_j^n \rightharpoonup \varphi_j^\infty & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \quad j = 1,\dots,N \\ \psi_j^n \rightharpoonup \psi_j^\infty & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \quad j = 1,\dots,N \end{cases}$$

($\Omega \subset \mathbb{R}^N$, le fait que ce soit le même N est important).

On sait de plus que :

(16) $$\sum_i \frac{\partial \varphi_i^n}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi_j^n}{\partial x_i}\,, \quad i,j = 1,\dots,N$$

restent dans un compact de $H^{-1}(\Omega)$.

La conclusion est

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j^n \psi_j^n \longrightarrow \sum_{j=1}^{N} \varphi_j^\infty \psi_j^\infty$$

dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

La particularité de ce résultat est que $\varphi_j^n \psi_j^n$ ne converge pas vers $\varphi_j^\infty \psi_j^\infty$ en général pour chaque j mais c'est seulement la somme qui converge vers la somme. On verra même que si on cherche des fonctions $F(\varphi^n,\psi^n)$ telles que (15) et (16) impliquent $F(\varphi^n,\psi^n) \rightharpoonup F(\varphi^\infty,\psi^\infty)$ alors F est nécessairement de la forme c $\varphi^n.\psi^n$ + fonction affine (φ^n,ψ^n).

Avant de voir un résultat plus général il est bon de connaître les résultats optimaux sous des hypothèses telles que (15) , c'est à dire ne faisant pas intervenir de dérivées.

II.1 <u>Le cas sans information sur les dérivées</u>

Soit $U^n \quad \Omega \to \mathbb{R}^p$ vérifiant

<u>H1</u> : $\quad U^n \rightharpoonup U^\infty$ dans $L^\infty(\Omega)^p$ faible *

<u>H2</u> : $\quad U^n(x) \in K$ presque partout

où K est une partie quelconque de $\mathbb{R}^p$.

On peut se poser la question suivante : est-ce que $U^\infty(x) \in K$ presque partout. La réponse est alors donnée par le

<u>Théorème 2</u> : $U^\infty(x) \in \overline{\text{conv}\, K}$ (enveloppe convexe fermée de K) presque partout. Réciproquement si $v(x) \in \overline{\text{conv}\, K}$ presque partout (et $v \in (L^\infty(\Omega))^p$) il existe une suite v^n vérifiant $v^n \rightharpoonup v$ et $v(x) \in K$ presque partout.

Si maintenant F est une fonction réelle sur $\mathbb{R}^p$ on peut se demander quand $F(U^n) \rightharpoonup v$ (avec H1 et H2) si on peut comparer v à F (U^∞). Alors on a la propriété suivante : H1, H2 impliquent $v = F(U^\infty)$ si et seulement si F est affine sur $\overline{\text{conv}\, K}$; H1, H2 impliquent $v \geq F(u^\infty)$ si et seulement si F est convexe sur $\overline{\text{conv}\, K}$.

On voit donc que la conclusion du lemme 1 ne peut pas se déduire des seules informations (15) et que les informations (16) sur les dérivées sont essentielles.

II.2 Le cas avec information sur les dérivées

Aux hypothèses H1, H2 on ajoute la suivante

$$\text{H3} \qquad \sum_{jk} a_{ijk} \frac{\partial u_j^n}{\partial x_k} \in \text{borné de } L^\infty(\Omega) \qquad i = 1,\ldots,q$$

où les a_{ijk} sont constants.

Sous ces hypothèses supplémentaires on ne connait pas d'analogue du théorème 2 mais on connait des conditions nécessaires et d'autres suffisantes.

Pour exprimer ces conditions nous aurons besoin de l'ensemble Λ suivant

$$(17) \qquad \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^p : \exists \xi \in \mathbb{R}^N\ \xi \neq 0 \ : \ \sum_{jk} a_{ijk}\lambda_j \xi_k = 0, \quad i = 1,\ldots,q\}.$$

Théorème 3 : Si H1, H2, H3 impliquent $u(x) \in K$ presque partout alors K est fermé et si $a, b \in K$ avec $a - b \in \Lambda$ tout le segment $[a,b]$ est inclus dans K.

Si H1, H2, H3 et $F(u^n) \rightharpoonup v$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible * impliquent $v = F(u^\infty)$ alors si $a, b \in K$ avec $a - b \in \Lambda$, F est affine sur $[a,b]$.

Si H1, H2, H3 et $F(u^n) \rightharpoonup v$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible * impliquent $v \geq F(u^\infty)$ alors, si $a, b \in K$ avec $a - b \in \Lambda$, F est convexe sur $[a,b]$.

Remarque 1 : L'ensemble Λ décrit la richesse de l'information donnée par H3. Si $\Lambda = \mathbb{R}^p$ il y a trop peu d'informations dans H3 et on a la même conclusion que pour le théorème 2. Si $\Lambda = \{0\}$ il y a tellement d'informations dans H3 qu'on peut conclure à la convergence forte (locale) de u^n.

Remarque 2 : Dans le cas du lemme 1 on a $p = 2N$ avec $u = (\varphi,\psi)$ avec $K = \mathbb{R}^{2p}$ et la liste H3 est donnée par $\sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}$ pour $i \neq j$.

Dans ce cas on voit facilement que $\Lambda = \{(\mu,\nu), \mu,\nu \in \mathbb{R}^N : \mu.\nu = 0\}$. Alors si une fonction F est faiblement (séquentiellement) continue elle doit vérifier, d'après le théorème 2, $F(a + t\mu, b + t\nu)$ affine en t pour $\mu.\nu = 0$;

en particulier F est bi-affine et un examen attentif montre que $F(a,b) = c\,a.b +$ affine (a,b). Le lemme 1 découle alors simplement de la condition suffisante suivante :

Théorème 4 : Si H'1 : $u^n \rightharpoonup u^\infty$ dans $(L^2(\Omega))^p$ faible

$$H'3 : \sum_{jk} \mathcal{C}_{ijk}\frac{\partial u_j^n}{\partial x_k} \in \text{compact de } H^{-1}_{loc}(\Omega) \quad i = 1,\ldots,q.$$

si $F(\lambda)$ est quadratique et $F(\lambda) \geq 0$, $\forall \lambda \in \Lambda$ alors $F(u^n) \rightharpoonup v$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ implique $v \geq F(u^\infty)$. [En particulier si $F(\lambda) = 0$, $\forall \lambda \in \Lambda$ alors $F(u^n) \rightharpoonup v$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ implique $v = F(u^\infty)$].

La condition nécessaire du théorème 3 n'est pas toujours suffisante [on sait donner d'autres conditions nécessaires] comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1 : $\Omega = \mathbb{R}^2$; $p = 3$; la liste H3 étant donnée par

$$\frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} ; \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} ; \frac{\partial u_3^n}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3^n}{\partial x_2} .$$

Alors $\Lambda = \{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$: deux au moins des λ_j sont nuls$\}$. Alors les seules fonctions F affines dans les directions de Λ sont de la forme affine (λ) $+ a_1\lambda_2\lambda_3 + a_2\lambda_1\lambda_3 + a_3\lambda_1\lambda_2 + b\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Le théorème 4 nous dit que $\lambda_2\lambda_3$, $\lambda_1\lambda_3$ et $\lambda_1\lambda_2$ sont faiblement (séquentiellement) continues ; $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ vérifie la condition nécessaire mais n'est pas faiblement continue : il suffit de prendre

$$u_1^n = \sin(nX_2) \quad , \quad u_2^n = \cos(nX_1) \ ; \ u_3^n = \pm\sin(nX_1 - nX_2)$$

pour avoir $u_i^n \rightharpoonup 0$ et $u_1^n\, u_2^n\, u_3^n \rightharpoonup \pm\frac{1}{2}$.

II.3 Exemples

La connaissance des fonctions faiblement (séquentiellement) continues est très utile car elle permet de mettre en évidence certaines quantités intrinsèques. Elle ne permet pas de mettre en évidence toutes ces quantités mais seulement celles qui se comportent bien vis à vis de la topologie faible, les autres sont peut être adaptées à une autre topologie par exemple celle de l'homogénéisation vue précédemment.

Exemple 2 : $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $p = 2N$, $\varphi^n \rightharpoonup \varphi^\infty$, $\psi^n \rightharpoonup \psi^\infty$ dans $(L(\Omega))^N$ faible* et rot φ^n, rot $\psi^n \in$ borné de $(L^\infty(\Omega))^{N^2}$.

Alors les seules fonctions faiblement (séquentiellement) continues sont

$$F_{ij}(\varphi,\psi) = \varphi_i\psi_j - \varphi_j\psi_i \qquad i,j = 1,\dots,N$$

Cela provient du fait que $\Lambda = \{(\varphi,\psi) : \varphi_i\psi_j - \varphi_j\psi_i = 0 \ , \ \forall i,j\}$. Ce résultat peut s'interpréter très facilement. Soit $a^n = \sum_i \varphi_i^n \, dX_i$ et $b^n = \sum_i \psi_i^n dX_i$.

Les hypothèses disent que a^n, b^n sont deux 1-forme différentielles dont les coefficients sont bornés et que leurs différentielles da_n, db_n sont de bonnes 2-formes différentielles. La conclusion est que les seules "bonnes fonctions" qu'on puisse définir sont les coefficients du produit extérieur $a^n \wedge b^n$.

Exemple 3 : Le lemme 1 exprime que si $a^n = \sum_i \varphi_i^n dX_1 \dots \widehat{dX_i} \dots dX_N$ est une (N-1)-forme et $b_n = \sum_i \psi_i^n \, dX_i$ une 1-forme dont les différentielles sont à coefficients bornés alors $a^n \wedge b^n$ converge faiblement vers $a^\infty \wedge b^\infty$; le théorème 3 montre que c'est la seule "bonne fonction" non affine.

Exemple 4 : Si a^n est une p-forme et b^n une q-forme avec $a^n \rightharpoonup a^\infty$, $b^n \rightharpoonup b^\infty$ et si da^n et db^n sont à coefficients bornés alors $a^n \wedge b^n \rightharpoonup a^\infty \wedge b^\infty$.

Exemple 5 : [J. Ball] $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $u_j^n \rightharpoonup u_j$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ faible $p \geq N$, $j = 1,\dots,N$. Alors $\det\left(\frac{\partial u_j^n}{\partial x_k}\right)_{j,k} \longrightarrow \det\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Il suffit de poser $a_j^n = \sum_k \frac{\partial u_j^n}{\partial x_k} dx_k$ pour avoir des 1-formes vérifiant $da_j^n = 0$ et d'utiliser l'exemple 4 en remarquant que $d(a_1^n \wedge a_2^n \wedge \dots \wedge a_p^n) = 0$.

Exemple 6 : Le lemme 1 est adapté aux équations de l'électrostatique. Pour le cas de l'électromagnétisme on a le résultat suivant : soit E^n, D^n, B^n, D^n convergeant vers E^∞, D^∞, B^∞, D^∞ dans $L^2(0,T)\times\Omega)^3$ faible avec $\Omega \subset \mathbb{R}^3$; supposons d'autre part que

$$\operatorname{div} D^n, \frac{\partial D^n}{\partial t} - \operatorname{rot} H^n, \operatorname{div} B^n, \frac{\partial B^n}{\partial t} + \operatorname{rot} E^n$$

restent dans des compacts de $H^{-1}(\Omega)$ ou $(H^{-1}(\Omega))^3$ alors on a

$$E^n.B^n \rightarrow E^\infty.B^\infty \; ; \; D^n.H^n \rightarrow D^\infty.H^\infty \; ; \; E^n.D^n - B^n.H^n \rightarrow E^\infty.D^\infty - B^\infty.H^\infty$$

dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Les seules "bonnes fonctions" non affines sont des combinaisons de E.B, D.H, E.D - B.H .

II.4 Applications

Le but de cette théorie est de résoudre les équations aux dérivées partielles non linéaires qui apparaissent essentiellement en mécanique et en physique. Ce but n'est pas encore atteint mais la classe de problèmes qu'on peut traiter est élargie (auparavant on ne connaissait que deux techniques : la monotonie et la compacité).

La difficulté principale des équations aux dérivées partielles non linéaires est de passer à la limite dans les termes non linéaires avec peu d'information sur les dérivées ; l'utilisation des théorèmes 3 et 4 pour caractériser les "bonnes non linéarités"est pour l'instant le meilleur outil connu.

§ III. COMMENTAIRES ET BIBLIOGRAPHIE

Les premiers résultats de type homogénéisation (le terme est apparu plus tard) ont été obtenus par Spagnolo et De Giorgi (1967): Spagnolo [1]. Ces résultats ont été améliorés avec F. Murat en 1974 ; c'est à ce moment qu'est apparu le lemme 1. Les résultats essentiels ont été exposés au cours Peccot (en 1977), dont les notes n'existent pas . (Des morceaux existent : Tartar [1], Murat [1] [2]). L'exemple 5 est dû à J. Ball (1975) : c'est un résultat fondamental en élasticité non linéaire : Ball [1] ; en fait il avait été obtenu antérieurement : Reshetnyak [1]. C'est en mélangeant les deux idées qu'est apparue la compacité par compensation Murat [3], [4] Tartar [2]. Ces résultats ont fait l'objet d'un cours (Juillet 1978, Heriot-Watt University, Edimbourg) dont les notes existent : Tartar [3] ; on pourra y trouver les démonstrations ainsi que quelques développements supplémentaires.

BIBLIOGRAPHIE

J. Ball [1] Convexity conditions and existence theorems in non linear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal. 63, 337-403 (1977).

F. Murat [1] H-convergence. Publications du Département de Mathématiques. Université d'Alger, 1977-78.

[2] Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique, Paris VI

[3] Compacité par compensation. Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa

[4] Compacité par compensation 2. A paraître. Proceedings congrès, Rome, mai 1978.

Y.Reshetnyak [1] General theorems on semicontinuity and on convergence with a functional. Sib. Mat. Z. 8 (1967) 1051-1069.

S. Spagnolo [1] Convergence in energy for elliptic operators, p.469-498 Numerical solution of Partial Differential Equations III, Synspade 1975, ed. par B. Hubbard, Academic Press 1976.

L. Tartar [1] Quelques remarques sur l'homogénéisation, p.469-482 Functional Analysis and Numerical Analysis, Japan-France seminar 1976, ed. par H. Fujita, Japon Society for the Promotion of Science, 1978.

[2] Une nouvelle méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires, p.228-241. Journées d'Analyse Non Linéaire . Besançon 1977, Lecture Notes in Mathematics 665, Springer, 1978.

[3] Compensated compactness and applications to partial differential equations, à paraître dans Non linear analysis and mechanics : Heriot Watt Symposium, Vol. III, Research Notes in Mathematics, Pitman.