Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

R. Lascar

Paramétrices microlocales de problèmes aux limites pour une classe d'équations pseudo-différentielles à caractéristiques de multiplicité variable

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 4, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A4_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

PARAMETRICES MICROLOCALES DE PROBLEMES AUX LIMITES POUR UNE CLASSE D'EQUATIONS PSEUDO-DIFFERENTIELLES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE

par R. LASCAR

Exposé n° IV

21 Novembre 1978

§ 1 INTRODUCTION

Soit Y un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $X_o > 0$, et $\mathbf{X}$ le cylindre

$$\mathbf{X} = (-X_o, X_o) \times Y \quad .$$

La variable x de $\mathbf{X}$ sera notée $x = (x_o, y) = (x_o, y_1, \ldots, y_N)$.

L'étude des singularités d'équations aux dérivées partielles hyperboliques par rapport à la première variable x_o, à caractéristiques au plus doubles, se réduit à l'étude d'équations pseudo-différentielles du type :

$$(1.0) \qquad P(x,D) = -D_o^2 + 2\, A_1(x,D_y)D_o + A_2(x,D_y)$$

où A_1 (resp. A_2) est un opérateur pseudo-différentiel de degré 1 (resp. 2) sur Y, proprement supporté, et dépendant de façon C^∞ de $x_o \in (-X_o, X_o)$; on supposera que le symbole total de A_1 (resp. A_2) admet un développement en termes homogènes

$$A_1(x,\eta) \sim a_1(x,\eta) + \ldots$$

$$(\text{resp.}\, A_2(x,\eta) \sim a_2(x,\eta) + \ldots) \;.$$

Le symbole principal de P est alors :

$$p(x,\xi) = -\xi_o^2 + 2\, a_1(x,\eta)\xi_o + a_2(x,\eta) \;,$$

l'équation

$$(1.1) \qquad p(x,\xi_o,\eta) = 0 \quad (x,\eta) \in \mathbf{X} \times (\mathbb{R}^N \setminus 0) \text{ ayant ses racines réelles,}$$

on a :

$$(a_1^2 + a_2)(x,\eta) \geq 0 \qquad (x,\eta) \in \mathbf{X} \times (\mathbb{R}^N \setminus 0).$$

l'ensemble des points où les caractéristiques sont doubles est

$$N = \{(x,\xi) \in \mathbf{X} \times (\mathbb{R}^{N+1} \setminus 0),\ \eta \neq 0,\ dp(x,\xi) = 0\} \;.$$

Aux points de N on introduit le hessien Q de p, et à l'aide de la 2-forme symplectique $\sigma_X = \sum_{j=o}^{N} d\xi_j \wedge dx_j$, l'application hamiltonienne F définie par

$$\sigma_X(z,Fz') = Q(z,z') \qquad z,z' \in T(T^*X) .$$

Aux points de N on introduit également le symbole sous-principal de P

$$P_1^S(x,\xi) = p_1(x,\xi) - \frac{1}{2i} \sum_{j=o}^{N} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \xi_j}(x,\xi).$$

Il est prouvé par Ivrii-Petkov [14] que F a au plus un couple de valeurs propres réelles μ, $-\mu$, $\mu > 0$, les autres valeurs propres étant de la forme $\pm i\mu$, $\mu \geq 0$.

Les cas où F a des valeurs propres réelles non nulles sont dits effectivement hyperboliques. Dans le cas où F n'est pas effectivement hyperbolique, Ivrii-Petkov [14] et Hörmander [10] ont prouvé la nécessité de conditions, dites conditions de Levi, pour que le problème de Cauchy soit bien posé au voisinage de $x_o = 0$, à un sens raisonnable:

$$\text{(L)} \qquad (x,\xi) \in N \qquad P_1^s(x,\xi) + \frac{1}{2} \sum_{\{\mu_j(x,\xi) \in \operatorname{Spec} F(x,\xi)\}} |\mu_j|(x,\xi) \quad \geq 0 \quad .$$

Ivrii conjecture que dans le cas effectivement hyperbolique le problème de Cauchy est toujours bien posé sans restrictions sur les termes sous principaux, conjecture qu'il prouve dans certains cas .

Dans les autres cas Ivrii et Hörmander ont prouvé des estimations d'energie moyennant le renforcement de la condition (L) par une inégalité stricte et sous diverses autres conditions.

On désigne par Ω le demi-espace :

$$\Omega = [0,X_o) \times Y ,$$

que l'on suppose muni de sa structure canonique de variété à bord, on désigne par $\mathcal{D}'(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}'_\partial(\Omega)$) l'espace des distributions sur $\mathring{\Omega}$ prolongeables (resp. et régulières jusqu'au bord).

L'étude des singularités des solutions de l'équation P se pose pour deux problèmes :

(A) le problème au limite $u \in \mathcal{D}'_\partial(\Omega)$ $\begin{cases} P(x,D)u = f \\ \text{conditions sur } \partial\Omega \end{cases}$,

(B) le problème dans l'espace libre $u \in \mathcal{D}'(X)$ $P(x,D)u = f$.

Dans le cas où les racines de l'équation (1.2) sont des fonctions C^∞ de $(x,\eta) \in X \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$ il y a des réponses assez complètes aux problèmes (A) et (B).

Quand cette condition n'est pas satisfaite il y a pour le problème (A) le résultat de S. Alinhac [2] pour les opérateurs <u>effectivement hyperboliques dans $\mathbb{R}^3$</u> suivants :

$$P(x,D) = -D_o^2 + x_o^2 D_2^2 + D_1^2 + \Lambda_1(x,D_1,D_2).$$

Dans trois notes Ivrii [11], [12], [13] traite du problème (B).

Dans [12] il étudie des opérateurs <u>effectivement hyperboliques</u> de la forme :

$$P(x,D) = D_o x_o + B_1(y,D_y) ,$$

avec $b_1(y,\eta) \geq 0$.

Dans les autres cas Ivrii [11], [13] obtient en général un résultat de propagation de la régularité qui s'exprime sous la forme :
Si $\varphi \in C^\infty(T^*X \setminus 0)$ est homogène de degré 1, si H_φ vérifie une condition convenable, si Ω est un ouvert conique à base compacte on a :

$$\left.\begin{array}{l} WF(u) \cap (\partial\Omega) \cap (\varphi > 0) \cap N = \emptyset \\ WF(Pu) \cap \Omega \cap (\varphi > 0) \cap N = \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow WF(u) \cap \Omega \cap (\varphi > 0) \cap N = \emptyset$$

L'inconvénient de cet énoncé est qu'il est "peu géométrique" et que l'on ne sait pas dans quelles conditions il est "optimal".

Ivrii en déduit dans certains cas une propriété géométrique simple, par exemple il prouve que si P vérifie une condition de Levi stricte et a pour symbole principal :

$$p(x,\xi) = -\xi_o(\xi_o - \xi_1) + x_1^2 |\xi'|^2,$$

ou

$$p(x,\xi) = -\xi_o^2 + \xi_1^2 + x_1^2 |\xi'|^2 ,$$

$[WF(u) \setminus WF(Pu)] \cap N$ est H_{ξ_o} invariant .

Nous renvoyons à Ivrii [11], [12], [13] pour d'autres énoncés et nous préciserons qu'à notre connaissance Ivrii n'a publié jusqu'ici la preuve d'aucun de ses résultats concernant la propagation des singularités.

Nous passons maintenant à la description de nos résultats.

On se restreint, dans cet exposé, au cas où N est <u>involutive</u> .

(1.2) On suppose que N est une variété régulière involutive i.e. que en tout point de N le radical du hessien de p contient son propre orthogonal pour la forme symplectique et que de plus N n'est pas orthogonal au champ radial.

On ajoute également une condition d'"ellipticité transverse".

(1.3) En tout point de N le rang du hessien de p est égal à la codimension de N.

La condition (L) sous l'hypothèse (1.2) est réduite à

$$p_1^S|_N \geq 0.$$

L'injection $i : \partial\Omega \to \Omega$ induit une application $i^* : T^*_{\partial\Omega}\Omega \to T^*\partial\Omega$, nous effectuerons une étude microlocale au voisinage d'un point du bord $z_o \in T^*(\partial\Omega)\backslash 0$ où les "caractéristiques" sont doubles i.e. :

$$i^{*-1}(z_o) \cap p^{-1}(0)$$

est réduit à un seul point $\sigma_o \in N$.

On considérera ici les situations :

(1.4) (i) $p_1^S|_N$ est > 0 au voisinage de σ_o

(1.4) (ii) $p_1^S|_N$ est < 0 au voisinage de σ_o .

Dans le cas (1.4)(i) la condition de Lévi stricte est satisfaite, au moins microlocalement, et dans le problème (A) on se donnera comme condition au bord une pleine donnée de Cauchy.

Dans le cas (1.4)(ii) nous étudierons le problème (A) avec une donnée de Dirichlet sur $\partial\Omega$ sous une hypothèse de "diffraction" que nous indiquerons ci-dessous.

Dans l'une et l'autre de ces situations nous construisons des paramétrices pour le problème au limite considéré. Nous construisons également des paramétrices microlocales de P permettant d'étudier le problème (B).

Indiquons enfin que le cas

$$p_1^S | N = 0$$

est étudié dans [20] par une méthode d'estimation de Carleman, et que un cas où le symbole sous-principal peut s'annuler sur N sans être identiquement nul est étudié dans [21] par une méthode analogue à celles que nous exposons ici.

Avant de décrire nos résultats nous procèderons à une classification des points de $\partial\Omega$ qui en faisant intervenir le symbole sous principal "explique" la condition (L) et éclaire les situations (1.4).

Cette classification est analogue à celle de [23] à la différence qu'elle est microlocale.

§ 2. UNE CLASSIFICATION MICRO-MICRO-LOCALE DES POINTS DU BORD

On remarque d'abord que N est une sous-variété de $T^*\Omega\backslash 0$ que :

(2.1) $M = i^*(\partial N)$ est une sous-variété régulière involutive que l'on peut identifier à ∂N.

Aux points z de $T^*(\partial\Omega)\backslash 0$ pour lesquels

$$i^{*-1}(z) \cap p^{-1}(0)$$

est réduit à un seul point σ, i.e. l'ensemble des points de M, on introduit les fibres $N_z(M) = T_z(T^*\partial\Omega\backslash 0)/T_zM$ et on classifie les points $(z,t) \in N_z(M)$.

Si F est la feuille de N passant par σ, ∂F s'identifie à la feuille G de M passant par $z = i^*(\sigma)$, "l'injection" $j : G \mapsto F$ induit une application $j^* : T^*_{\partial F} F \to T^* G$.

On introduit également le fibré $N(N) = T(T^*\Omega\backslash 0)/TN$, et on identifie au moyen de la forme symplectique $N_\sigma(N)$ à $T^*_\sigma F$. Définissons pour $\sigma \in N$, $(\sigma,\zeta) \in T(T^*\Omega\backslash 0)$ les fonctions

$$Q(\sigma,\zeta) = 1/2 \,\mathrm{Hess}\, p(\sigma).(\zeta,\zeta)$$

$$q(\sigma,\zeta) = Q(\sigma,\zeta) + p_1^S(\sigma) .$$

Par transport de structure on suppose Q et q définis sur l'espace cotangent des feuilles de N.

On définit alors des ensembles $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{H}$, resp. $\mathcal{G}$) des points $(z,t) \in N(M)$ pour lesquels $j^{*-1}(z,t) \cap q^{-1}(0)$ est vide (resp. formé de deux points distincts, resp. d'un seul point).

$$N(M) = \mathcal{E} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{H} .$$

Un point (z,t) de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{H}$, resp. $\mathcal{G}$) est dit micro-elliptique (resp. microhyperbolique, resp. microglancing).

Soit $f \geq 0$ dans Ω $df \neq 0$, $f = 0$ définissant localement $\partial\Omega$, remontant f en une fonction sur $T^*\Omega\backslash 0$ et restreignant à F, on définit l'ensemble $\mathcal{G}_d$ des points de diffraction en posant :

$$\mathcal{G}_d = \{(z,t) \in N(M) \mid \text{ tels que si } (\sigma,\zeta) = j^{*-1}((z,t)) \cap q^{-1}(0)$$
$$\text{on a } \quad H_q(f)(\sigma,\zeta) = 0 \quad , \ (H_q)^2(f)(\sigma,\zeta) > 0\}$$

Sous l'hypothèse (1.4)(i) on a $\mathcal{E} = \mathcal{G} = \emptyset$. Sous l'hypothèse (1.4)(ii) on a toujours des points de $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ et on ajoute l'hypothèse :

(2.2) Dans le cas (1.4)(ii), on a $\mathcal{G} = \mathcal{G}_d$.

On peut voir alors que les points diffractifs sont non dégénérés i.e. que si $(z,t) \in \mathcal{G}_d$ $H_q(\sigma,\zeta)$ est transverse à la fibre en σ de T^*F.

<u>Exemples</u> (2.3) : Décomposons $\mathbb{R}^N_y = \mathbb{R}^{N-p}_{y'} \times \mathbb{R}^p_{y''}$, et posons

$$P_1(x,D) = -D^2_{x_0} + \sum_{j=1}^{p} D^2_{y''_j} + D_{y'_1} \quad ,$$

$$P_2(x,D) = -D^2_{x_0} + \sum_{j=1}^{p} D^2_{y''_j} + (-1+x_0)D_{y'_1} \quad ,$$

$$z_0 = (0;\eta_0) \ , \ \eta_0 = (1,0,\dots,0) \ , \ \sigma_0 = (0;0,\eta_0) .$$

P_1 vérifie les hypothèses (1.2), (1.3), (1.4)(i) au point z_0, P_2 vérifie les hypothèses (1.2), (1.3), (1.4)(ii), (2.2) au point z_0.

§ 3. ENONCE DES RESULTATS

Soit Γ un voisinage conique fermé de σ_0 dans $T^*\Omega\backslash 0$, assez petit. Introduisons :

$$(3.0)\quad \left[\begin{array}{l} C^{\pm}_{\partial}(\Gamma) = \{(\sigma',z)\in T^{*}\mathring{\Omega}\backslash 0\times T^{*}(\partial\Omega)\backslash 0 \mid \sigma'\in\Gamma,\ z\in i^{*}\Gamma,\ z\notin M \\ \text{il existe un segment de bicaractéristique nulle de } p \text{ issue d'un point} \\ \text{de } i^{*-1}(z) \text{ joignant } \sigma' \text{ à un temps} \gtrless 0\} \end{array}\right.$$

$$(3.1)\qquad C_{\partial}(\Gamma) = C^{+}_{\partial}(\Gamma)\cup C^{-}_{\partial}(\Gamma)\ ,$$

puis

$$(3.2)\quad \left[\begin{array}{l} C'_{\partial}(\Gamma) = \{(\sigma',z)\in T^{*}\mathring{\Omega}\backslash 0\times T^{*}(\partial\Omega)\backslash 0 \mid \sigma'\in\Gamma\ ,\ z\in i^{*}\Gamma,\ z\in M,\ \sigma = i^{*-1}(z)\cap p^{-1}(0), \\ \sigma'\in \text{feuille } F \text{ de } N \text{ contenant } \sigma \text{ et tel qu'il existe un point } (\sigma,\zeta) \\ (\text{resp. } (\sigma',\zeta'))\in T^{*}_{\sigma}F(\text{resp. } T^{*}_{\sigma'}F) \text{ et un segment de bicaractéristique} \\ \text{nulle de } q \text{ joignant } (\sigma,\zeta) \text{ à } (\sigma',\zeta')\}, \end{array}\right.$$

(3.3) $\quad C''_{\partial}(\Gamma)$ obtenu en remplaçant q par Q dans (3.2).

Soit γ un voisinage conique fermé de z_o dans $T^{*}\partial\Omega\backslash 0$, $\gamma\subset i^{*}\Gamma$, et soit ω un voisinage de $\pi\sigma_o$ dans Ω .

<u>Théorème 1</u> : Si P vérifie (1.2), (1.3), (1.4)(i), il existe pour $i = 0,1$ des opérateurs linéaires continus $E_i : \mathcal{D}'(\partial\Omega)\to\mathcal{D}'_{\partial}(\Omega)$ tels que :

$$PE_i(f)|_{\omega}\in C^{\infty}(\omega)$$

$$D^{j}_{o}E_i f|_{\partial\Omega} - \delta_{ij}f\in C^{\infty}(\partial\Omega)\quad \text{si}\quad WF(f)\subset\gamma\quad i,j, = 0,1$$

$$WF(E_i f)\subset (C_{\partial}(\Gamma)\cup C'_{\partial}(\Gamma)\cup C''_{\partial}(\Gamma))\circ WF(f)\cup (i^{*-1}(WF(f))\cap p^{-1}(0)).$$

<u>Théorème 2</u> : Si P vérifie (1.2), (1.3), (1.4)(ii) et (2.2) il existe des opérateurs linéaires continus $E_{\pm} : \mathcal{D}'(\partial\Omega)\to\mathcal{D}'_{\partial}(\Omega)$ tels que

$$PE_{\pm} f|_{\omega}\in C^{\infty}(\omega)$$

$$E_{\pm} f|_{\partial\Omega} - f\in C^{\infty}(\partial\Omega)\quad \text{si}\quad WF(f)\subset\gamma$$

$$WF(E_{\pm} f)\subset (C^{\pm}_{\partial}(\Gamma)\cup C'_{\partial}(\Gamma)\cup C''_{\partial}(\Gamma))\circ WF(f)\cup i^{*-1}(WF(f)\cup\{0\}).$$

Soit Γ' un voisinage conique fermé de σ_o dans $T^{*}X\backslash 0$, soit Γ contenu dans l'intérieur de Γ' un autre voisinage conique de σ_o. Considérant maintenant la variété N et ses feuilles comme des sous-variétés de $T^{*}X\backslash 0$, on définit :

$C(\Gamma') = \{(\sigma',\sigma)\in\Gamma'\times\Gamma' \mid \sigma\notin N$ et il existe un segment de bicaractéristique nulle de p joignant σ et $\sigma'\}$,

$$C'(\Gamma') = \{(\sigma',\sigma)\in\Gamma'\times\Gamma' \mid \sigma\in N,\ \sigma\in N,$$

$\sigma'\in$ feuille F de N contenant σ et il existe un point

(σ,ζ) (resp. $(\sigma',\zeta')) \in T^*_\sigma F$ (resp. $T_{\sigma'}F$) et un segment de bicaractéristique nulle de q joignant (σ,ζ) à $(\sigma',\zeta')\}$, et enfin

$C''(\Gamma')$ en utilisant Q à la place de q.

Théorème 3 : Si P vérifie (1.2), (1.3), (1.4)(i) ou (ii), il existe un opérateur linéaire continu E $\mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'(X)$ tel que

$$WF'(PE - I) \cap (\Gamma \times \Gamma) = \emptyset$$

$$WF'(E) \subset C(\Gamma') \cup C'(\Gamma') \cup C''(\Gamma') \cup \Delta^*(\Gamma') ,$$

où $\Delta^*(\Gamma')$ est la diagonale de Γ'.

Une conséquence de ces résultats est par exemple :

Théorème 4 : Soit $u \in \mathcal{D}'_\partial(\Omega)$, $Pu = f$, P vérifiant au point $z_o \in T^*(\partial\Omega)\backslash 0$ les conditions des théorèmes 1 ou 2. Sous les hypothèses

(i) $z_o \notin WF_b(f)$

(ii) $(C'_\partial(\Gamma) \cup C''_\partial(\Gamma)) \circ \{z_o\} \cap WF(u) = \emptyset$

(iii) $z_o \notin WF(u|_{\partial\Omega})$,

$z_o \notin WF_b(u)$.

L'hypothèse (iii) peut être omise quand P vérifie les conditions du théorème 1.

Remarque : L'ensemble $C_\partial(\Gamma) \cup C'_\partial(\Gamma) \cup C''_\partial(\Gamma)$ est une partie conique fermée de $(T^*\Omega) \times (T^*(\partial\Omega))\backslash 0$, il exprime le phénomène de refraction conique qui se produit aux points caractéristiques doubles, c'est-à-dire le fait que les singularités des données initiales se dispersent sur des variétés intégrales. Les solutions singulières construites dans [21] § 9 expriment en quoi cet ensemble est minimal.

§ 4. SCHEMA DE LA PREUVE DES THEOREMES

On simplifie d'abord l'opérateur P. En conjugant P par un opérateur intégral de Fourier sur Y dépendant de x_o comme d'un paramètre on se ramène au cas où

$$P = - D_o^2 + A(x, D_y) ,$$

puis en conjugant A par un opérateur intégral de Fourier sur Y au cas où, avec les notations de l'exemple (2.3) ,

$$a(x,\eta) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x,\eta)\eta''^{\alpha} ,$$

$$z_o = (0,\eta_o) \ , \ \eta_o = (1,0,\ldots,0).$$

Bien entendu ces opérations ne sont pas "exactes" et il faut, en fait, ajouter et étudier les perturbations crées par différents "restes".

On désigne par U un voisinage de O dans $\bar{\mathbb{R}}_+^{N+1}$, par G un voisinage conique de η_o dans $\mathbb{R}^n\backslash 0$.

Nous rappelons d'abord une définition qui nous sera utile.

On désigne par $S^{m,k}(U\times G\ , M)$, M étant la variété $\eta''=0$, la classe des fonctions $e(x,\eta)$ C^∞ dans $U\times G$ satisfaisant aux estimations :

$$|D_x^\alpha D_{\eta'}^{\beta'} D_{\eta''}^{\beta''} e(x,\eta)| \leq C_{\alpha,\beta,K}(1+|\eta|)^{m-|\beta'|-|\beta''|} d_M(\eta)^{k-|\beta''|}$$

pour $x\in K\subset\subset U$, $\eta\in G$, $|\eta|\geq 1$, et où $d_M(\eta) = (|\eta'|^{-1}+|\eta''|^2/|\eta'|^2)^{1/2}$.

Cette classe a été introduite (dans un contexte plus général) par L. Boutet de Monvel [5].

a) <u>Schéma de la preuve du théorème 1</u>

On désigne par $G^T = \{\xi\in G|\ |\xi|\geq T\}$ pour $T>0$. Soit donc l'équation

$$P = -D_{x_o}^2 + A(x,D_{x'}\ ,\ D_{x''})$$

Nous cherchons des solutions asymptotiques indépendantes (pures) sous la forme :

$$q(x,\xi) = e(x,\xi)e^{i\varphi_\pm(x,\xi)} ,$$

où nous avons noté $\xi = (\xi',\xi'')\in G\subset\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$, où $\varphi_\pm(x,\xi)$ est une fonction de "phase" sans propriété particulière d'homogénéité mais de la forme

$$\varphi_\pm(x,\xi) = x'.\xi' + \varphi_\pm^{(1)}(x,\xi) ,$$

où $\varphi^{(1)}_{\pm}(x,\xi) \in S^{1,1}(U\times G\,,\,M)$ et où $\left|\det\left(\frac{\partial^2\varphi^{(1)}_{\pm}}{\partial x''_j\,\xi''_k}\right)\right| \geq C > 0$ pour $(x,\xi) \in U\times G^T$, T assez grand.

Le symbole $e(x,\xi)$ sera cherché dans une classe $S^{m,k}(U\times G,M)$, avec e nul hors d'un voisinage conique fermé $\Gamma \subset U\times G$, assez petit, de $(0,0,\eta_o)$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N\setminus 0)$; la fonction $e(x,\xi)$ sera supposée, même sans mention explicite, identiquement nulle près de $\xi = 0$.

La fonction $\varphi^{(1)}$ satisfait à l'équation

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_o}\varphi^{(1)}_{\pm} = \pm\left(a\left(x,\xi' + \dfrac{\partial\varphi^{(1)}_{\pm}}{\partial x'}, \dfrac{\partial\varphi^{(1)}_{\pm}}{\partial x''}\right) + m(x,\xi')\right)^{1/2}, (x,\xi) \in U\times G^1 \\[2ex] \varphi^{(1)}_{\pm}\Big|_{x_o=o} = x''.\xi'' \end{cases}$$

La construction de $\varphi^{(1)}_{\pm}$ ne se réduit pas immédiatement à un résultat classique car il faut analyser la dépendance par rapport au grand paramètre $|\xi|$.

La construction de solutions asymptotiques est basée sur :

$$(4.2)\qquad e^{-i\varphi_{\pm}}P(x,D)(e^{i\varphi_{\pm}}e(x_o,y,\xi)) = \left[-\left(\frac{\partial\varphi_{\pm}}{\partial x_o}\right)^2 + a\left(x,\xi' + \frac{\partial\varphi^{(1)}_{\pm}}{\partial x'}, \frac{\partial\varphi^{(1)}_{\pm}}{\partial x''}\right) + \right.$$

$$\left. + m(x,\xi')\right]e(x_o,y,\xi) + \mathcal{L}_p(e) \operatorname{mod} S^{m+1,k+2}$$

si $e \in S^{m,k}$,où $\mathcal{L}_p = a_o\dfrac{\partial}{\partial x_o} + \sum\limits_{j=1}^{p} a_j\dfrac{\partial}{\partial x''_j} + c$ et où les $a_j(x,\xi)$ $j = 0\ldots p$, $c(x,\xi)$ sont dans la classe $S^{1,1}(\bar{\mathbb{R}}^{N+1}_+ \times \mathbb{R}^N\setminus 0, M)$.

La résolution de l'équation de phase (4.1) et d'une suite d'équations :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_p(e_j) = f_j \\ e_j\big|_{x_o=o} = \tilde{e}_j \end{cases}$$

permet d'obtenir une $\bar{e}(x,\xi) \in S^{o,o}$ ayant une trace voulue sur $x_o = 0$ et telle que dans un voisinage ω de 0 dans $\bar{\mathbb{R}}^{N+1}_+$ on ait :

$$e^{-i\varphi_{\pm}}\,P(\bar{e}\,e^{i\varphi_{\pm}})\big|_{\omega\times\mathbb{R}^N} \in S^{1,\infty} .$$

Pour obtenir une solution asymptotique au sens ordinaire il faut ajouter des termes complémentaires "plats" sur M.

b) Schéma de la preuve du théorème 2

La preuve est beaucoup plus compliquée que celle du théorème 1. Désignant par A une fonction d'Airy convenable on cherche cette fois des paramétrices sous la forme (voir Melrose [23]) :

$$(4.3)\quad Ef(x_0,y) = \iint e^{i(\varphi(x_0,y,\xi)-\varphi(0,z,\xi))} \frac{a(x_0,y,z,\xi)A'(\zeta(x,\xi)) + b(x_0,y,z,\xi)A'(\zeta(x,\xi))f(z)dzd\xi}{A(\zeta(0,z,\xi))}$$

où a et b sont des symboles peu réguliers, et où les "phases" φ et ζ sont de la forme :

$$\varphi(x,\xi) = x'.\xi' + \varphi^{(1)}(x,\xi) \quad \text{avec} \quad \varphi^{(1)} \in S^{1,1} \text{, et}$$

$$\zeta(x,\xi) \in S^{2/3,2/3} \text{ ,}$$

et sont determinées par diverses équations.

La principale difficulté est d'obtenir un calcul assez précis de la composition $a(x,D_y)$ E f où a est un opérateur pseudo-différentiel sur Y. Nous renvoyons pour les détails à [21] .

c) Schéma de la preuve du théorème 3

On ajoute une variable supplémentaire t et on analyse des solutions asymptotiques pour $D_t + P$.

d) Schéma de la preuve du théorème 4

Elle est fondée sur un argument classique d'unicité microlocale.

REFERENCES

[1] K. G. Anderson, R. Melrose : The propagation of singularities along glidings rays. Inventiones Math. 41 197-232 (1977).

[2] S. Alinhac : Paramétrixe pour un système hyperbolique à multiplicité variable. Comm. in Partial Diff. Eq. 2 (1977).

[3] S. Alinhac : Solution explicite du problème de Cauchy pour des opérateurs effectivement hyperboliques. Duke Math. J. (1978) Vol.45 n°2.

[4] J. M. Bony : Une extension du théorème de Homlgren. Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique (1976).

[5] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators. Comm. on Pure and Applied. Math. 27 (1974).

[6] G. Eskin : A parametrix for mixed problems for strictly hyperbolic equations of arbitrary order. Comm. in Partial Diff. Eq. 1 (6) 521-560 (1976).

[7] G. Eskin : A parametrix for mixed problems for strictly hyperbolic equations. Journal. Anal. Math. (1977).

[8] F. G. Friedlander : The wave front set of the solution of a simple initial boundary value problem with glancing rays. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79-145 (1976).

[9] L. Hörmander : Fourier Integral operators. Acta Math. 127 (1971) 79-183.

[10] L. Hörmander : The Cauchy problem for differential equations with double characteristics. Journal. Anal. Math. (1977).

[11] V. J. Ivrii : Wave front of solutions of some hyperbolic equations and conical refraction. Sov. Math. Dokl. (1976) T.226, n^{o}6.

[12] V. J. Ivrii : Wave front sets of solutions of some microlocally hyp. pseudo-diff. equ. Sov. Math. Dokl. (1976) T.226, n^o 5 .

[13] V. J. Ivrii : Wave fronts of solutions of some hyperbolic pseudo diff. equations. Sov. Math. Dokl. (1976) T.229 n^o 2

[14] V. J. Ivrii, V. Petkov : Necessary cond. for the correctness of the Cauchy problem for non strictly hyp. eq. USp. Math. Nauk. n^{o}5 (1974).

[15] R. Lascar : Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles quasi-homogènes. Ann. Inst. Fourier. Tome 27 Fas. 2 (1977).

[16] R. Lascar : Propagation des singularités pour des opérateurs pseudo-différentiels à multiplicité variable. A paraître (Note C.R.A.S. (1976) T.283).

[17] R. Lascar : Propagation des singularités et hypoellipticité pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques doubles. Comm. in Partial. Diff. Eq. 3 201-247 (1978).

[18] R. Lascar : Distributions intégrales de Fourier et classes de Denjoy Carleman . A paraître (Note C.R.A.S. (1977) T.284).

[19] R. Lascar : Parametrices pour des opérateurs pseudo-différentiels hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable. A paraître (Note C.R.A.S. (1978) t. 287).

[20] R. Lascar : Propagation des singularités pour des opérateurs pseudo-différentiels hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable. A paraître.

[21] R. Lascar : Paramétrices microlocales de problèmes aux limites pour une classe d'équations pseudo-différentielles à caractéristique de multiplicité variable. A paraître (Note C. R. A. S. (1978) T.287).

[22] R. Melrose : Local Fourier Airy integrals operators. Duke Math. J. 42, 1975.

[23] R. Melrose : Microlocal parametrices for diffractive boundary values problems. Duke Math. J. 42 (1975).

[24] J. Sjöstrand : Operators of principal type with interior boundary conditions. Acta Math. 130 p.1-51 (1973).

[25] J. Sjöstrand, A. Melin : Fourier integral operators with complex phase. Proceed. Congrès Nice (1974) Springer-Verlag.

[26] M. Taylor : Grazing Rays and reflection of singularities of solutions to wave equations. Comm. Pure Appl. Math. Vol. 29 n° 1 1-38 (1976).