

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

H. BREZIS

## **Cordes vibrantes non linéaires**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1978-1979), exp. n° 16,  
p. 1-8

<[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1978-1979\\_\\_\\_\\_A16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A16_0)>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).  
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

CORDES VIBRANTES NON LINEAIRES

par H. BREZIS



On considère l'équation

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + g(u) = f(x,t) & \text{dans } (0,\pi) \times \mathbb{R} \\ u(x,t) = 0 & \text{pour } x=0, x=\pi \\ u \text{ est } 2\pi\text{-périodique en } t, \end{cases}$$

où  $g$  est une fonction continue croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $f(x,t)$  est une fonction donnée  $2\pi$ -périodique en  $t$ .

On cherche à déterminer les fonctions  $f$  pour lesquelles (1) admet une solution. On notera qu'en général (1) n'a pas nécessairement de solution pour tout  $f$ . Par exemple si  $g \equiv 0$ , alors (1) admet une solution si et seulement si  $f$  est orthogonal au noyau  $N$  de  $\square u = u_{tt} - u_{xx}$  qui consiste en toutes les fonctions de la forme  $p(t+x) - p(t-x)$  avec  $p$  fonction  $2\pi$ -périodique arbitraire.

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 1 : On suppose que :

$$(2) \quad |g(u)| \leq \gamma |u| + C, \forall u \in \mathbb{R}, \text{ avec } \gamma < 3$$

$$(3) \quad f \in L^\infty(\Omega), \text{ où } \Omega = (0,\pi) \times (0,2\pi), \text{ admet une décomposition :}$$

$$f(x,t) = f'(x,t) + f''(x,t) \quad \text{avec}$$

$$f' \in N^\perp \quad \text{et} \quad g(-\infty) < \inf_{\Omega} f'' \leq \sup_{\Omega} f'' < g(+\infty).$$

Alors il existe  $u \in L^\infty$  solution (généralisée) de (1).

Remarques :

1) Notons que l'hypothèse (3) est "presque" nécessaire et suffisante pour résoudre (1). En effet si (1) admet une solution on écrit  $f = f' + f''$  avec  $f' = \square u$ ,  $f'' = g(u)$ , de sorte que  $g(-\infty) \leq f'' \leq g(+\infty)$ . Lorsque  $g$  est strictement croissante on a en plus  $g(-\infty) < \inf_{\Omega} f'' \leq \sup_{\Omega} f'' < g(+\infty)$ , et dans ce cas (3) est nécessaire et suffisant.

2) Lorsque  $g(-\infty) = -\infty$  et  $g(+\infty) = +\infty$ , le Théorème 1 montre qu'il existe une solution  $u$  pour tout  $f \in L^\infty$ . Ce cas avait été traité dans H. Brézis-L. Nirenberg [3]. La démonstration du Théorème 1 (dû à A. Bahri-H. Brézis [1]) repose de manière cruciale sur les techniques introduites dans [2] et [3].

3) La conclusion du Théorème 1 tombe en défaut si on suppose seulement  $\gamma \leq 3$  dans (2). Par exemple, l'équation  $\square u + 3u = f$  n'admet pas de solution pour tout  $f$  car  $-3$  est une valeur propre de  $\square$ .

4) Si  $g$  est strictement croissante et si  $g'(u) \leq \gamma < 3$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$  alors la solution de (1) est unique (cf. [2] [3]). Par ailleurs si  $g$  est strictement croissante et si  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$   $f \in C^\infty([0, \pi] \times \mathbb{R})$ , alors toute solution  $u \in L^\infty$  de (1) est en fait  $C^\infty$  (cf. [3]).

5) L'hypothèse (3) peut encore s'écrire :

$$g(+\infty) \int_{\Omega} \psi^+ - g(-\infty) \int_{\Omega} \psi^- \geq \delta \|\psi\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} f \psi, \quad \forall \psi \in N$$

avec  $\delta > 0$  (appliquer Hahn-Banach).

Sous cette forme, l'hypothèse (3) est à rapprocher de la condition introduite par Landesman-Lazer [5] dans l'étude d'équations non linéaires elliptiques à la résonance. La difficulté majeure qui s'introduit ici provient du fait que le noyau de  $\square$  est de dimension infinie.

6) Des questions analogues pour l'équation

$$u_{tt} - u_{xx} + g(u_t) = f(x, t)$$

sont considérées par Haraux [4].

7) La démonstration du Théorème 1 fait appel à un mélange de techniques de monotonie et de compacité. La monotonie de  $g$  joue un rôle essentiel (on peut aussi considérer le cas où  $g$  est décroissante et obtenir une variante du Théorème 1). Par exemple nous ne savons pas s'il existe pour tout  $f$  une solution de l'équation  $\square u + u + 36 \sin u = f$  (bien que l'on ait des estimations a priori  $L^\infty$  pour toutes les solutions).

Principe de la démonstration du théorème 1

Soit  $H = L^2(\Omega)$ . Pour tout  $u \in H$ , on écrira systématiquement  $u = u_1 + u_2$  avec  $u_1 \in N^\perp$ ,  $u_2 \in N$ . On considère le problème approché

$$(4) \quad \varepsilon u_{2\varepsilon} + \square u_\varepsilon + g(u_\varepsilon) = f \quad \varepsilon > 0.$$

Les étapes de la démonstration sont les suivantes :

Etape 1 : Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $f$ , (4) admet une solution

$$\text{Etape 2} : \|\square u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C$$

$$\text{Etape 3} : \|u_\varepsilon\|_{L^1} \leq C$$

$$\text{Etape 4} : \|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C$$

Etape 5 : Passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Dans toute la suite  $C$  désigne diverses constantes indépendantes de  $\varepsilon$ .

Etape 1 : On utilise une décomposition du type Lyapunov-Schmidt.

Pour simplifier on supprime l'indice  $\varepsilon$  et on écrit (4) sous la forme projetée sur  $N^\perp$  et  $N$  :

$$(5_1) \quad \square u_1 + g_1(u_1 + u_2) = f_1$$

$$(5_2) \quad \varepsilon u_2 + g_2(u_1 + u_2) = f_2$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $u_1 \in N^\perp$ , l'équation (5<sub>2</sub>) admet une solution unique  $u_2(u_1)$  qui dépend continûment de  $u_1$  ; ceci résulte d'un théorème classique de Minty-Browder. On applique ensuite le théorème de point fixe de Schauder à l'équation (5<sub>1</sub>) i.e. :

$$u_1 = \square^{-1}(f_1 - g_1(u_1 + u_2(u_1))) ;$$

l'opérateur  $\square^{-1}$  envoie  $N^\perp$  dans  $H^1$  (ceci se vérifie à l'aide des séries de Fourier) et est donc compact de  $N^\perp$  dans  $N^\perp$ .

$$\text{Etape 2} : \|\square u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C.$$

On utilisera l'inégalité

$$(5) \quad (\square v, v)_{L^2} \geq -\frac{1}{3} \|\square v\|_{L^2}^2, \quad \forall v \in D(\square)$$

(facile à vérifier sur les séries de Fourier). Grâce à l'hypothèse (3) on peut écrire  $f = \square v + g(w)$  pour un certain  $v \in L^2$  et un certain  $w \in L^\infty$ .

On a alors

$$(6) \quad \varepsilon u_{2\varepsilon} + \square(u_\varepsilon - v) + g(u_\varepsilon) - g(w) = 0.$$

Prenant le produit scalaire  $L^2$  de (6) avec  $(u_\varepsilon - v)$  et appliquant (5) on obtient :

$$(7) \quad \begin{aligned} \varepsilon \int_{\Omega} u_{2\varepsilon} (u_\varepsilon - v) + \int_{\Omega} (g(u_\varepsilon) - g(w)) (u_\varepsilon - v) &\leq \frac{1}{3} \int_{\Omega} |\square(u_\varepsilon - v)|^2 \\ &= \frac{1}{3} \int_{\Omega} |g(u_\varepsilon) - g(w) + \varepsilon u_{2\varepsilon}|^2 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} (g(u_\varepsilon) - g(w))(u_\varepsilon - v) &= (g(u_\varepsilon) - g(w))(u_\varepsilon - w + w - v) \\ &\geq |g(u_\varepsilon) - g(w)| |u_\varepsilon - w| - |g(u_\varepsilon) - g(w)| |w - v| \\ &\geq |g(u_\varepsilon) - g(w)| \left[ \frac{1}{Y} (|g(u_\varepsilon)| - C) - |w| \right] - |g(u_\varepsilon) - g(w)| |w - v|, \end{aligned}$$

on a donc

$$\int_{\Omega} (g(u_\varepsilon) - g(w))(u_\varepsilon - v) \geq \frac{1}{Y} \|g(u_\varepsilon)\|_{L^2}^2 - C \|g(u_\varepsilon)\|_{L^2} - C.$$

On déduit alors de (7) que  $\sqrt{\varepsilon} \|u_{2\varepsilon}\|_{L^2} \leq C$  et  $\|g(u_\varepsilon)\|_{L^2} \leq C$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On conclut avec (4) que  $\|\square u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C$ .

Etape 3 :  $\|u_\varepsilon\|_{L^1} \leq C$ .

On fixe  $r < \min \{g(+\infty) - \sup f'', \inf f'' - g(-\infty)\}$ . Alors pour tout  $h \in L^\infty$  avec  $\|h\|_{L^\infty} \leq r$ , on a  $f + h = \square v + g(w_h)$  pour un certain  $w_h \in L^\infty$ , tel que  $\|w_h\|_{L^\infty} \leq C$  (indépendant de  $h$ ) puisque  $g(-\infty) < f'' + h < g(+\infty)$ . On obtient

alors :

$$\varepsilon u_{2\varepsilon} + \square(u_\varepsilon - v) + g(u_\varepsilon) - g(w_h) = -h.$$

Multipliant par  $(u_\varepsilon - v)$  et raisonnement comme à l'étape 2 on voit que :

$$\int u_\varepsilon \cdot h \leq C, \quad C \text{ indépendant de } \varepsilon \text{ et } h,$$

pour tout  $h \in L^\infty$  tel que  $\|h\|_{L^\infty} < \delta$ . On conclut que  $\|u_\varepsilon\|_{L^1} \leq C$ .

Etape 4 :  $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C$ . On utilise d'abord l'inégalité

$$\|u_1\|_{L^\infty} \leq C \|\square u\|_{L^2}, \quad \forall u \in D(\square)$$

(qui peut se vérifier à l'aide des séries de Fourier) pour conclure que  $\|u_{1\varepsilon}\|_{L^\infty} \leq C$ . Il reste donc à montrer que  $\|u_{2\varepsilon}\|_{L^\infty} \leq C$ . On introduit l'opérateur  $Q$  qui à toute fonction  $\varphi(x, t)$  fait correspondre

$$(Q_\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\varphi(x, t-x) - \varphi(x, t+x)] dx.$$

On vérifie aisément que :

(i) Si  $\varphi \in N$  et si l'on pose  $p = (Q_\varphi)$ , alors  $\varphi(x, t) = p(t+x) - p(t-x)$

(ii) Si  $\varphi \in N^\perp$ , alors  $Q_\varphi = 0$ . On écrit alors :

$$u_\varepsilon(x, t) = u_{1\varepsilon}(x, t) + p_\varepsilon(t+x) - p_\varepsilon(t-x)$$

avec  $p_\varepsilon = Qu_\varepsilon$ . Il résulte de la définition de  $Q$  et de l'étape 3 que

$\|p_\varepsilon\|_{L^1(0, 2\pi)} \leq C$ . Il nous reste donc à montrer que  $\|p_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C$ . Appliquant

$Q$  à (4) on obtient :

$$\begin{aligned} & \varepsilon p_\varepsilon(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [g(u_{1\varepsilon}(x, t-x) + p_\varepsilon(t) - p_\varepsilon(t-2x)) - g(u_{1\varepsilon}(x, t+x) + p_\varepsilon(t+2x) - p_\varepsilon(t))] dx \\ (8) \quad & = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f''(x, t-x) - f''(x, t+x)] dx \quad \forall t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Soit  $\mu_\varepsilon = \sup_{[0, 2\pi]} p_\varepsilon$ ; en choisissant pour  $t$  une suite  $t_n$  tel que  $p_\varepsilon(t_n) \rightarrow \mu_\varepsilon$

on voit que

$$(9) \quad \varepsilon \mu_\varepsilon + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [g(-C + \mu_\varepsilon - p_\varepsilon(t_0 - 2x)) - g(C + p_\varepsilon(t_0 + 2x) - \mu_\varepsilon)] dx \\ \leq \frac{1}{2} (g(+\infty) - g(-\infty) - \delta)$$

avec  $\delta > 0$  (on a utilisé (3), la monotonie de  $g$  et l'estimation  $\|u_{1\varepsilon}\|_{L^\infty} \leq C$ ).

Posons  $G(u) = \frac{1}{2}[g(u) - g(-u)]$ ; on déduit immédiatement de (9) que

$$(10) \quad \varepsilon \mu_\varepsilon + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(-C + \mu_\varepsilon - p_\varepsilon(s)) ds \leq G(+\infty) - \delta$$

On introduit enfin les ensembles :

$$\Sigma_\varepsilon = \{s \in [0, 2\pi] \quad ; \quad p_\varepsilon(s) \geq \frac{\mu_\varepsilon}{2}\}$$

$${}^c\Sigma_\varepsilon = \{s \in [0, 2\pi] \quad ; \quad p_\varepsilon(s) < \frac{\mu_\varepsilon}{2}\}$$

(noter que  $\mu_\varepsilon \geq 0$  car  $\int_0^{2\pi} p_\varepsilon(s) ds = 0$ ).

On a alors

$$\frac{\mu_\varepsilon}{2} |\Sigma_\varepsilon| \leq \|p_\varepsilon\|_{L^1(0, 2\pi)} \leq C$$

et donc

$$|{}^c\Sigma_\varepsilon| \geq 2\pi - \frac{2C}{\mu_\varepsilon}$$

D'autre part on a

$$(11) \quad \int_{\Sigma_\varepsilon} G(-C + \mu_\varepsilon - p_\varepsilon(s)) ds \geq -|G(-C)| |\Sigma_\varepsilon| \\ \geq -|G(-C)| \frac{2C}{\mu_\varepsilon},$$

et

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \int_{c_{\Sigma_\varepsilon}} G(-C + \mu_\varepsilon - p_\varepsilon(s)) ds &\geq G(-C + \frac{\mu_\varepsilon}{2}) |c_{\Sigma_\varepsilon}| \\
 &\geq G(-C + \frac{\mu_\varepsilon}{2}) (2\pi - \frac{2C}{\mu_\varepsilon})
 \end{aligned}$$

(pourvu que  $\mu_\varepsilon$  soit assez grand).

Combinant (10), (11) et (12) on voit que

$$G(-C + \frac{\mu_\varepsilon}{2})(2\pi - \frac{2C}{\mu_\varepsilon}) - |G(-C)| \frac{2C}{\mu_\varepsilon} \leq G(+\infty) - \delta ;$$

ceci fournit une borne supérieure pour  $\mu_\varepsilon$  (car le membre de gauche tend vers  $G(+\infty)$  quand  $\mu_\varepsilon \rightarrow \infty$ ). Le même argument montre que  $\inf p_\varepsilon$  reste borné quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Etape 5 : Passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

La monotonie de  $g$  et la compacité de  $\Lambda^{-1}$  interviennent ici de façon essentielle.

On peut extraire une suite  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  telle que

$$\begin{aligned}
 u_{\varepsilon_n} &\rightarrow u \quad \text{faiblement dans } L^2 \\
 \square u_{\varepsilon_n} &\rightarrow \square u \quad \text{faiblement dans } L^2 \\
 (\square u_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n}) &\rightarrow (\square u, u)
 \end{aligned}$$

Cette dernière propriété se déduit du fait que

$(\square u_\varepsilon, u_\varepsilon) = (\square u_\varepsilon, u_{1\varepsilon}) \rightarrow (\square u, u_1) = (\square u, u)$  ( $\{u_{1\varepsilon}\}$  est compact dans  $L^2$  car  $\square^{-1}$  est un opérateur compact de  $N^\perp$  dans  $N^\perp$ ).

Appliquant la monotonie de  $g$  on a

$$\int_{\Omega} (g(u_\varepsilon) - g(\varphi))(u_\varepsilon - \varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \in L^2$$

i.e.

$$\int_{\Omega} (f - \square u_\varepsilon - \varepsilon u_{2\varepsilon} - g(\varphi))(u_\varepsilon - \varphi) \geq 0$$

Passant à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , il vient

$$\int_{\Omega} (f - \square u - g(\varphi))(u - \varphi) \geq 0, \quad \forall \varphi \in L^2$$

On conclut alors avec l'artifice de Minty, en choisissant  $\varphi = u + t\psi$ , et en faisant  $t \rightarrow 0$  que  $\square u + g(u) = f$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Bahri, H. Brézis : Periodic solutions of a nonlinear wave equation, A paraître.
  - [2] H. Brézis, L. Nirenberg : Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems, Ann. Sc. Norm. Pisa, 5 (1978) p.225-326.
  - [3] H. Brézis, L. Nirenberg : Forced vibrations for a nonlinear wave equation, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978) p.1-30.
  - [4] A. Haraux : Oscillations forcées pour des équations d'onde nonlinéaires faiblement dissipatives, J. Roy. Soc. Edinburgh, à paraître.
  - [5] E. Landesman, A. Lazer : Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance, J. Math. Mech. 19 (1970) p.609-623.
-