

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. LICHNEWSKY

**Un problème modèle en théorie de la plasticité ; analogie
avec le problème des surfaces minimales**

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 15,
p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A15_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 P

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 8 - 1 9 7 9

UN PROBLEME MODELE EN THEORIE DE LA PLASTICITE ;
=====;
ANALOGIE AVEC LE PROBLEME DES SURFACES MINIMALES
=====

par A. LICHNEWSKY

§ 0. INTRODUCTION

Le problème que nous étudions est lié à ceux de la détermination des charges limites pour un cisaillement longitudinal d'un matériau plastique, introduits par J. R. Rice [1] et G. Strang [2]

(1) Trouver u minimisant $\int_{\Omega} |\nabla u| dx$ sous les contraintes

$$\int_{\Omega} f u dx = 1 \quad \text{et} \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

Le comportement asymptotique de la fonctionnelle minimisée évoque le problème non paramétrique des surfaces minimales. Ceci permet de définir des solutions faibles pour (1) et d'en prouver l'existence, cf. R. Temam [3]. Il n'y a pas a priori unicité pour la solution de ce problème qui est, en outre, simplement astreinte à satisfaire une condition aux limites "relaxée" similaire à celle intervenant dans l'étude du problème des surfaces minimales. ■

L'objet de ce travail est d'étudier de façon plus systématique le comportement au bord des solutions faibles d'un problème voisin qui nous est apparu plus simple :

(2) Trouver u minimisant $\int_{\Omega} |\nabla u| dx$ sous la contrainte $u|_{\partial\Omega} = g$

Après avoir défini des solutions faibles pour ce problème par un procédé analogue à celui de R. Temam [3] nous étudierons le comportement au bord des solutions faibles appartenant à un ensemble (non vide) particulier $\mathcal{S}$. Ceci nous permettra de montrer l'existence de solutions régulières du problème (2) lorsque $\partial\Omega$ est de courbure moyenne positive. Lorsque $\partial\Omega$ ne vérifie pas cette dernière hypothèse, nous montrerons l'existence de solutions faibles présentant un "saut" sur certaines positions de $\partial\Omega$. Alors que ce phénomène admet une interprétation géométrique simple dans le cas du problème non paramétrique des surfaces minimales, il conduit ici à envisager le "glissement" du matériau plastique (cf. H. Matthies, G. S. Strang et R. Temam [4]). Alors que les résultats que nous obtiendrons seront vrais dans le cas d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), leur interprétation mécanique n'est valable que dans le cadre bidimensionnel ($n=2$). L'étude du problème tridimensionnel correspondant a été entreprise par P. Suquet [5], R. Temam [3], G. Strang [2].

§ 2. FORMULATION DU PROBLEME, SOLUTIONS FAIBLES

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\Omega$ est une variété $\mathcal{C}^1$, Ω étant localement situé d'un même côté de $\partial\Omega$. Soit g une fonction donnée dans $L^1(\partial\Omega)$.

Par analogie avec le problème des surfaces minimales nous étendons à $L^1(\Omega)$ la fonctionnelle à minimiser en (2). Plus précisément, nous posons, pour $\varepsilon \in [0,1]$ et $g \in L^1(\partial\Omega)$:

$$(3) \quad e(\varepsilon, g; u) = \sup_{\substack{\theta \in \mathcal{C}_\infty(\bar{\Omega}) \\ \sum_{i=0}^n \theta_i^2 \leq 1}} \left\{ \int_{\Omega} \left[\sqrt{\varepsilon} \theta_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} u \right] dx - \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n \theta_i \nu_i g \, dS \right\}$$

où on a noté $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ le vecteur unitaire porté par la normale à $\partial\Omega$ orienté vers l'extérieur de Ω . En intégrant par parties, il vient le

Lemme 1 : La fonctionnelle $e(\varepsilon, g; \cdot)$ (à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) est convexe, semi-continue inférieurement et propre dans $L^1(\Omega)$. Son domaine est $BV(\Omega)$ et de plus pour tout $u \in W^{1,1}(\Omega)$:

$$(4) \quad e(\varepsilon, g; u) = \int_{\Omega} (\varepsilon + |\nabla u|^2)^{1/2} dx + \int_{\partial\Omega} |u - g| \, dS$$

Nous étudierons donc la formulation faible de (2) suivante :

(5) Trouver $u \in L^1(\Omega)$ minimisant $e(0, g; u)$.

La manière dont nous avons affaibli ♦ la condition aux limites sera justifiée a posteriori par les théorèmes 2 et 3 ci-après. L'existence de solution de (5) dans $BV(\Omega)$ se démontre aisément. ■

♦ "relaxé" dans la terminologie employée par R. Temam [3] .

§ 2. RAPPELS SUR LE PROBLEME DES SURFACES MINIMALES

Ce paragraphe a pour seul but de rendre cette exposition autonome, nous renvoyons à G. Gilbarg et N. S. Trudinger [6] pour une bibliographie extensive.

L'équation des surfaces minimales s'écrit :

$$(6) \quad \operatorname{div} \frac{\nabla u}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

il s'agit d'une équation non uniformément elliptique la dégénérescence apparaissant pour $|\nabla u| \rightarrow +\infty$ et portant sur la dérivation " dans la direction $\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ " .

Nous utiliserons les deux résultats suivants :

Lemme 2 : Soient $u \in L^1(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ une solution faible de (6) dans Ω et $B(X, R')$ une boule contenue dans Ω . Pour tout R tel que $0 < R < R'$ on a :

$$\|u\|_{L^\infty(B(X, R))} \leq K(n) \max(1, (R' - R)^{-1}) \cdot \left\{ \|u\|_{L^1(B(X, R'))} + (R')^{n+1/2} \right\}$$

Le résultat ci-dessus est prouvé dans A. Lichniewsky [7], le théorème ci-dessous, dû à O. A. Ladyzenskaya et N. N. Uralceva, figure dans D. Gilbarg et N. S. Trudinger [6, th. 14.2].

Théorème A : Soit $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ une solution de (6). On a alors la majoration :

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 + C_2 \cdot \|\nabla u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \quad . \quad \blacksquare$$

Nous utiliserons aussi les solutions généralisées du problème des surfaces minimales et ferons un large usage des résultats de R. Temam [8], A. Lichniewsky [7, 9]. Les principales propriétés de ces solutions généralisées sont résumées dans le théorème ci-dessous ; le lien avec les solutions généralisées que l'on peut obtenir par les méthodes de E. de Giorgi, M. Miranda et E. Giusti est précisé dans I. Ekeland et R. Temam [10] .

Théorème B : Supposons Ω et g comme ci-dessus. Il existe une solution généralisée $\tilde{u}$ du problème des surfaces minimales :

(7) Trouver u minimisant $\int_{\Omega} (1 + |\nabla u|^2)^{1/2} dx$ sous la contrainte
 $u = g$ sur $\partial\Omega$.

qui possède les propriétés suivantes :

- (a) $\tilde{u}$ est unique à une constante additive près
- (b) $\tilde{u} \in C^{\infty}(\Omega)$ et vérifie l'équation (6)
- (c) toute suite minimisante dans $W^{1,1}(\Omega)$ de (7) :
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{u}$ au sens suivant :

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow \tilde{u} \quad \text{dans } L^1(\Omega)/\mathbb{R} \\ \nabla u_n &\rightarrow \nabla \tilde{u} \quad \text{dans } (L^1_{\text{loc}}(\Omega))^n \end{aligned}$$

(d) Si Γ est une portion de $\partial\Omega$ de classe C^3 , de courbure moyenne positive ou nulle sur laquelle g est continue alors

$$\tilde{u} = g \quad \text{sur } \Gamma \quad . \quad \blacksquare$$

§ 3. UN ENSEMBLE PARTICULIER DE SOLUTIONS ; PREMIERES PROPRIETES

Supposons $\varepsilon > 0$; le problème :

(8) Trouver u minimisant $e(\varepsilon, g; u)$

se ramène, en posant $v = u\varepsilon^{-1/2}$ et $h = g\varepsilon^{-1/2}$, à une formulation faible de (7) [cf. [10]]. On obtient donc une solution généralisée $\tilde{u}_{\varepsilon}$ à l'aide du Théorème B. Ceci étant nous définissons un ensemble de solutions de (5) par :

Définition : On désigne par $\mathcal{J}$ l'ensemble des points d'adhérence dans $L^1(\Omega)$ des suites $\tilde{u}_{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Théorème 1 : $\mathcal{J}$ est un ensemble non vide et fermé dans $BV(\Omega)$ de solutions de (5). De plus les éléments de $\mathcal{J}$ appartiennent à $L^{\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$. $\blacksquare$

Preuve : Il résulte de (3) que

$$e(0, g; u) \leq e(\varepsilon, g; u) \leq e(0, g; u) + \varepsilon$$

ceci entraîne que les suites $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \searrow 0}$ sont des suites minimisantes de (5) bornées dans $BV(\Omega)$. La semi-continuité inférieure de $e(0, g; \cdot)$ implique la première partie du résultat.

Posons $v_\varepsilon = \varepsilon^{-1/2} u_\varepsilon$; v_ε est une solution faible de (6) à laquelle on peut appliquer le lemme 2. Il vient : si $B(X, R') \subset \Omega$, $0 < R < R'$

$$\|\varepsilon^{-1/2} u_\varepsilon\|_{L^\infty(B(X, R))} \leq K(n) \max(1, (R' - R)^{-1}) \{ \varepsilon^{-1/2} \|u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} + (R')^{n+1/2} \}$$

en multipliant par $\varepsilon^{1/2}$ on obtient une estimation a priori qui fournit le reste du théorème . ■

Remarque : 1) L'estimation a priori dans L_{loc}^∞ ci-dessus n'est pas conséquence directe des "injections de Sobolev".

2) Il n'y a pas a priori d'unicité pour la solution de (5) c'est ce fait qui nous a conduit à n'étudier qu'une famille particulière de solutions : $\mathcal{S}$. ■

§ 4. ETUDE DU COMPORTEMENT AU BORD

Nous commençons par construire une famille de fonctions barrières pour les problèmes (8) qui soit indépendante de ε

Il nous suffit de faire cette construction de façon globale lorsque $\partial\Omega$ est $\mathcal{C}^3$ et de courbure moyenne partout strictement positive. Les techniques de localisation déjà utilisées dans A. Lichniewsky [9] s'appliquent ici aussi et permettront d'en déduire les autres résultats. La méthode de construction que l'on utilise s'inspire fortement de J. Serrin [11] et D. Gilbarg- N.S. Trudinger [6].

Lemme 3 : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\Omega$ est une variété $\mathcal{C}^3$; Ω étant, localement , situé d'un même côté de $\partial\Omega$. Supposons la courbure moyenne de $\partial\Omega$ strictement positive. Soit g une donnée au bord $g \in \mathcal{C}^2(\partial\Omega)$. Pour tout $M > 0$ il est possible de construire un voisinage $\mathcal{O}$ de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\mathcal{O} \cap \Omega})$ tels que

(a) $\mathcal{O}$ et φ sont indépendants de $\varepsilon \in]0, 1]$

(b) φ est une sur-solution de l'équation d'Euler associée à (8) :

$$(9) \quad \operatorname{div} \frac{\varphi}{(\varepsilon + |\varphi|^2)^{1/2}} \leq 0 \quad \text{dans } \Omega \cap \mathcal{O} \quad \text{pour } \varepsilon \in]0, 1]$$

$$(c) \quad \varphi = g \text{ sur } \partial\Omega ; \quad \varphi \sim M \text{ sur } \partial\mathcal{O} \cap \Omega . \quad \blacksquare$$

Remarque : Ce résultat n'est pas valable si l'on suppose simplement la courbure moyenne positive ou nulle. Ceci peut être montré à l'aide d'un contre-exemple au théorème 2. Dans le cas du problème des surfaces minimales la courbure moyenne de $\partial\Omega$ peut être prise positive ou nulle. $\blacksquare$

Preuve : (a) La variété $\partial\Omega$ étant $\mathcal{C}^3$ et compacte on peut paramétrer un voisinage "tubulaire" V de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ par l'application

$$(10) \quad x \in V : x \mapsto (d(x), y(x)) \in]-\alpha, \alpha[\times \partial\Omega$$

où on a noté :

$$\begin{cases} d(x) = \text{distance}(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in \overline{V \cap \Omega} \\ d(x) = -\text{distance}(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in V - \Omega \\ y(x) = \text{projection de } x \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

L'application définie en (10) étant un difféomorphisme $\mathcal{C}^2$; nous utiliserons le calcul des dérivées de cette application explicité dans J. Serrin [11], D. Gilbarg et N. S. Trudinger [6]. Soit $\bar{g}$ le relèvement de g dans $\mathcal{C}^2(\bar{V})$: $\bar{g}(x) = g(y(x))$.

(b) Nous cherchons maintenant la sur-solution $\varphi(x)$ sous la forme $\varphi(x) = \bar{g}(x) + \psi(d(x))$ où ψ est une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de dérivée $\psi' > 0$. On doit avoir (9) pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, soit de manière équivalente :

$$(11) \quad (\varepsilon + |\nabla \varphi|^2) \Delta \varphi - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0$$

Pour calculer les divers termes de (11) nous explicitons les dérivées de d ; en notant $(\kappa_i)_{i=1}^{n-1}$ les courbures principales de $\partial\Omega$ en $y(x)$ ♦ il vient :

♦ Nous orientons ici la normale à $\partial\Omega$ vers l'intérieur de Ω , ce qui permet d'obtenir le signe usuel pour les courbures.

$$\Delta \varphi = \Delta \bar{g} + \psi' \Delta(d(x)) + \psi'' |\nabla d|^2$$

$$(12) \quad \Delta \varphi = \Delta \bar{g} + \psi' \left(- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\kappa_i(y(x))}{1 - \kappa_i(y(x)) \cdot d(x)} \right) + \psi''$$

en utilisant le fait que $|\nabla d| = 1$.

Pour le second terme de (11) nous avons

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla \varphi|^2).$$

On observe que $\nabla d \cdot \nabla \bar{g} = 0$ si bien que

$$|\nabla \varphi|^2 = |\nabla \bar{g}|^2 + 2\psi' \nabla d \cdot \nabla \bar{g} + \psi'^2 |\nabla d|^2 = |\nabla \bar{g}|^2 + \psi'^2.$$

Finalement :

$$(13) \quad \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i} \frac{\partial |\nabla \bar{g}|^2}{\partial x_i} + \frac{\psi'}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial d(x)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla \bar{g}|^2 + \psi'^2 \psi'')$$

nous venons d'utiliser le fait que :

$$\sum_{i=1}^n \psi'^2 \psi'' \left(\frac{\partial d(x)}{\partial x_i} \right)^2 = \psi'^2 \psi'' |\nabla d|^2 = \psi'^2 \psi''$$

En regroupant les divers termes de (12) et (13) et en utilisant le fait que $\nabla \bar{g} \cdot \nabla d = 0$ on met (11) sous la forme équivalente :

$$(14) \quad (\varepsilon + |\nabla \bar{g}|^2) \left(\Delta \bar{g} - \psi' \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\kappa_i}{1 - \kappa_i d} \right) + \psi'' \right) + (\psi')^2 \left(\Delta \bar{g} - \psi' \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\kappa_i}{1 - \kappa_i d} \right) \right) \\ - 1/2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla \bar{g}|^2) - \frac{\psi'}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla \bar{g}|^2) \leq 0$$

(d) Nous choisissons d'abord $\mathcal{O}$. Pour cela on remarque que la fonction : $x \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\kappa_i(y(x))}{1 - \kappa_i(y(x)) \cdot d(x)}$ est continue, et que du fait des hypothèses et de la compacité de $\partial \Omega$:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} u_i(x) > \gamma > 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Ceci fait qu'il est loisible de choisir α_1 , $0 < \alpha_1 < \alpha$ tel que sur $\mathcal{O} = \{x \mid 0 \leq d(x) \leq \alpha_1\}$ on ait

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i}{1 - u_i d} \geq \beta > 0.$$

Les quantités $|\Delta \bar{g}|$, $|\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} |\nabla \bar{g}|^2|$ et $\sum_{i=1}^n |\frac{\partial}{\partial x_i} |\nabla \bar{g}|^2|$ sont

majorées par des constantes C_1, C_2, C_3 qui ne dépendent que de $\|g\|_{\mathcal{C}^2(\partial\Omega)}$

et de la géométrie. On remarque enfin que $|\frac{\partial d}{\partial x_i}| \leq |\nabla d| \leq 1$.

L'inégalité (14) sera donc vérifiée si

$$(\varepsilon + |\nabla \bar{g}|^2)(C_1 - \psi' \beta + \psi'') + \psi'^2(C_1 - \psi' \beta) + C_2 + C_3 \psi' \leq 0.$$

Nous choisissons ψ tel que $\psi'' \equiv 0$, $\psi' \geq \max(\frac{2C_1}{\beta}, \rho)$ où ρ est la racine positive du polynôme $-C_1 X^2 + C_3 X + C_2$. Ceci garantit que l'inégalité (14) est vérifiée.

(e) On modifie encore la constante ψ' de façon à vérifier les autres propriétés requises. En prenant $\psi' \geq \max(\frac{2C_1}{\beta}, \rho, \frac{M + |g|_\infty}{\alpha_1})$ on obtient une fonction

$$\varphi(x) = \bar{g}(x) + \psi(d(x))$$

qui vérifie $\varphi|_{\{x \mid d(x) = \alpha_1\}} = \varphi|_{\partial\mathcal{O} \cap \Omega} \geq M$.

Ceci achève la démonstration du lemme 3. On remarque que toutes les constantes ont été déterminées indépendamment de ε .

En utilisant les techniques de localisation développées dans [9] le théorème 1 et le lemme 3 ci-dessus permettent d'obtenir le

Théorème 2 : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que Γ soit une portion de $\partial\Omega$ de courbure moyenne strictement positive et de classe $\mathcal{C}^3$. Pour toute donnée $g \in L^1(\partial\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Gamma)$ les solutions de (5) appartenant à $\mathcal{J}$ sont continues en tout point de Γ et

vérifient $u = g$ sur Γ .

Remarque : (a) Lorsque $\partial\Omega$ est partout de courbure moyenne strictement positive et lorsque g est continue on a ainsi obtenu l'existence de solutions faibles de (2) satisfaisant à la condition aux limites.

(b) Ce résultat peut être étendu au cas d'un bord $\partial\Omega$ moins régulier suivant la démarche employée en [9].

§ 5. EXISTENCE DE SOLUTIONS REGULIERES

En employant conjointement le théorème A et le lemme 3 nous obtenons l'existence de solutions fortes pour le problème initial [2].

Théorème 3 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^3$. Supposons la courbure moyenne de $\partial\Omega$ strictement positive. Pour toute donnée $g \in \mathcal{C}^{2+\mu}(\partial\Omega)$ ($\mu > 0$), toute solution $\tilde{u}$ dans $\mathcal{S}$ du problème (5) appartient à $W^{1,\infty}(\Omega)$ et satisfait la condition aux limites $u = g$ en tout point de $\partial\Omega$.

Preuve : On construit, à l'aide du lemme 3 un voisinage $\mathcal{O}$ de $\partial\Omega$ et deux fonctions $\varphi^\pm$ telles que

(a) φ^+ (resp. φ^-) est une sur-solution (resp. sous-solution) des équations d'Euler associées à (8) pour $\varepsilon \in]0,1]$ dans $\Omega \cap \mathcal{O}$.

(b) $\varphi^+ = \varphi^- = g$ sur $\partial\Omega$

(c) sur $\partial(\mathcal{O} \cap \Omega) - \partial\Omega$: $\varphi^+ \geq \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + 1$

et $\varphi^- \leq -\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} - 1$

(d) $\varphi^\pm \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega \cap \mathcal{V}})$.

Nous appliquons à la suite $\tilde{u}_\varepsilon$ approchant $\tilde{u}$ le principe du maximum ; il vient $\varphi^- \leq \tilde{u}_\varepsilon \leq \varphi^+$. Ceci entraîne que

$\|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \text{Sup} \|\nabla \varphi^\pm\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$. Du fait de la régularité supposée de

$\partial\Omega$ et de $g, \tilde{u}_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ et on peut appliquer le Théorème A à $u_\varepsilon = \varepsilon^{-1/2} \tilde{u}_\varepsilon$ qui est solution de (6). Il vient :

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 + C_2 \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

d'où

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sqrt{\varepsilon} C_1 + C_2 \sup \|\nabla \varphi^\pm\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

Le résultat est maintenant conséquence de cette estimation, le passage à la limite s'effectuant comme vu plus haut. $\square$

Remarque : Le théorème d'injection compacte de Sobolev entraîne que sous les hypothèses du théorème 3 la suite u_ε convergeant vers $\tilde{u}$ converge uniformément vers $\tilde{u}$ au sens de la norme $C^0(\bar{\Omega})$. Cette propriété semble intéressante si l'on désire un procédé d'approximation numérique de $\tilde{u} \in \mathcal{J}$.

§ 6. NECESSITE DES HYPOTHESES

Le résultat suivant, dont la démonstration reprend les idées utilisées pour l'étude du problème des surfaces minimales (cf. J. Serrin [11]), montre la nécessité des hypothèses. D'un point de vue mécanique ce résultat suggère la possibilité d'un "glissement" du matériau plastique.

Théorème 4 : Supposons que Ω soit un ouvert borné de R^n de bord $\partial\Omega$ de classe C^3 . Soit x un point de $\partial\Omega$ où la courbure moyenne de $\partial\Omega$ est strictement négative. Il est possible de construire un voisinage V de x dans R^n et une fonction $g \in C^3(\partial\Omega)$ tels que pour toute solution u de (5) appartenant à $\mathcal{J}$:

$$u \leq \min_{x \in V \cap \partial\Omega} g(x) - 1 \quad \text{dans } V \cap \Omega. \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. R. Rice : Int. J. Fract. Mech., 2, 1966, p.426-447.
- [2] G. Strang : A family of model problems in plasticity, Proceedings Third International Symposium on Computing methods, I.R.I.A, Versailles, 1977.
- [3] R. Temam : Mathematical problems in plasticity theory, Proc. Int. School Math., Erice 1978, (A paraître).

- [4] H. Matthies, G. Strang, R. Temam : Mathematical and computational methods in plasticity, Proc. IUTAM Conf. on variationnal methods in the mechanics of solids, Evanston (Ill. U.S.A.). 1978.
 - [5] P. Suquet : C. R. Acad. Sc. Paris 286, (1978). p.1201-1204 et p.1129-1132.
 - [6] D. Gilbarg et V. S. Trudinger : Elliptic partial differential equations of second order, Springer 1977.
 - [7] A. Lichnewsky : Bull. Soc. Math. France. 102, 1974, p.417-434.
 - [8] R. Temam : Arch. Rat. Mech. Anal., 44, 1971, p.121-156.
 - [9] A. Lichnewsky : J. Math. Pures et Appl., 53, 1974, p.397-425 et 57, 1978, p.231-254.
 - [10] I. Ekeland et R. Temam : Convex analysis and variational problems. North Holland. Amsterdam 1976.
 - [11] J. Serrin : Phil. Trans. Royal. Soc. London, A, 264, 1969, p.413-496.
-