Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. Langlais

Solutions fortes pour des problèmes aux limites du second ordre dégénérés

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. nº 7, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A8_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 7 - 1 9 7 8

SOLUTIONS FORTES POUR DES PROBLEMES AUX LIMITES DU SECOND ORDRE DEGENERES

par M. LANGLAIS

Exposé n° VII

17 Janvier 1978

Dans un ouvert Q de $\mathbb{R}^{n+m}$, on considère un opérateur différentiel du type suivant :

$$E = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} + \sum_{j=n+1}^{n+m} b_j \frac{\partial}{\partial z_j} + b_o \ ;$$

à cet opérateur sont associées de façon canonique (voir Fichera [4] et aussi Oleinik-Radkevic [7]) des conditions aux limites sur la partie ∂Q_e de la fontière de Q (notée ∂Q) qui est non caractéristique et sur la partie ∂Q_- de $\partial Q \backslash \partial Q_e$ où le champ de vecteurs définissant l'opérateur du premier ordre est rentrant.

Pour résoudre l'équation $Eu = f$, f étant donné dans $L^2(Q)$ (avec des conditions aux limites nulles) on utilise usuellement la méthode suivante (voir [4], [7] et sa bibliographie) : on introduit la notion de solution faible, c'est-à-dire trouver $u \in L^2(Q)$ et vérifiant $\int_Q u\, E^* \varphi dz = \int_Q f\varphi dz$, pour toute fonction φ, régulière nulle sur ∂Q_e et ∂Q_-, E^* étant l'adjoint formel de E. On montre l'existence de solutions faibles ; pour l'unicité, on fait une hypothèse du type (A_2) ci-après. En général, ces solutions faibles ne sont pas régulières, à moins de supposer que les adhérences de ∂Q_e, ∂Q_- et $\partial Q \backslash \partial Q_e \cup \partial Q_-$ ne soient disjointes (voir [7]), ou bien que les adhérences de $\partial Q_e \cup \partial Q_-$ et $\partial Q \backslash \partial Q_e \cup \partial Q_-$ soient aussi disjointes ([5],[7]).

On peut aussi associer à la partie principale de E un espace de Hilbert V (noté $\mathcal{H}$ dans [4]) et chercher des solutions faibles dans cet espace (voir [4], [7] et [8]).

La motivation de ce qui suit est de pouvoir résoudre des problèmes non linéaires associés à l'opérateur E, en particulier des inéquations variationnelles. On est alors naturellement amener à considérer l'opérateur du premier ordre contenu dans E comme un opérateur non borné, de l'espace V ci-dessus dans son dual, dont on aimerait connaître les propriétés ainsi que celles de son adjoint. On montre (théorème 2) qu'il est maximal-monotone, et grâce à (A_2), on améliore les résultats de [6].

Ces propriétés sont bien connues lorsque, d'une part, l'opérateur E est l'opérateur de la chaleur, et d'autre part, lorsque E est un opérateur du premier ordre (voir [3]). Si les coefficients b_j sont indépendants des n premières variables on peut en fait déduire des résultats de [3] les propriétés cherchées. Le cas particulier où $E = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial t}$ est aussi étudié dans [2].

En fait le cadre fonctionnel "naturel" est d'une étude directe malaisée, à cause des conditions aux limites de type mixte et du fait que les frontières de ∂Q_e, ∂Q_- et $\partial Q \backslash \partial Q_e \cup \partial Q_-$ peuvent se toucher. On ne sait pas montrer, à priori, la densité des fonctions régulières dans les bons espaces, contrairement à ce qui se passe dans [2] (voir les commentaires suivants la définition de $W(\Lambda)$ à la fin du deuxième paragraphe). En utilisant globalement les méthodes de [1] par exemple, on obtiendrait des espaces trop gros ; on les utilise seulement une fois que l'on a su contrôler ce qui se passe au voisinage de ∂Q_e et ∂Q_- .

Le plan est le suivant :

. on commence par préciser les notations et les hypothèses ;

. au paragraphe suivant, on montre que l'équation $Eu = f$ possède des solutions ayant de bonnes propriétés;

. au dernier paragraphe, on déduit du résultat préliminaire précédent les propriétés de l'opérateur du premier ordre ; on donne ensuite des exemples d'applications.

§ 1. HYPOTHESES. NOTATIONS

Toutes les fonctions considérées dans la suite sont à valeurs réelles. Soit Q un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{n+m}$, $n \geq 0$ et $m \geq 1$, de frontière ∂Q et d'élément générique $z = (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

On désigne par $V(Q)$ le complété de $\mathcal{D}(Q)$ par la norme :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(Q), \ \|\varphi\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^2 + |\varphi|^2\right)^{1/2},$$

où $|.|$ est la norme de l'espace $L^2(Q)$.

Identifiant $L^2(Q)$ à son dual, et notant $V'(Q)$ le dual de $V(Q)$ une fois cette identification faite, on obtient la double injection continue avec image dense : $V(Q) \hookrightarrow L^2(Q) \hookrightarrow V'(Q)$. On note par $((\ , \ ))$ la dualité entre $V'(Q)$ et $V(Q)$ et par $\| \ \|_*$ la norme de $V'(Q)$.

Si $\eta = (\eta_j)_{1 \leq j \leq n+m}$ est la normale extérieure à ∂Q et ∂Q_e l'ensemble :

$$\partial Q_e = \{z \in \partial Q, \ \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 > 0\} ,$$

alors les élements de $V(Q)$ possèdent une trace dans ∂Q_e qui est nulle.

Soit $B = (B_j)_{1 \leq j \leq n+m}$ un champ de vecteur réels sur Q vérifiant :

$$(A_1) \quad \begin{cases} B_i = 0 & 1 \leq i \leq n \\ B_{p+n} = b_p \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q}), & 1 \leq p \leq m. \end{cases}$$

Si ℓ désigne le produit scalaire sur ∂Q entre le champ B et la normale η, on introduit les ensembles suivants (voir [4], [7] et [3]) :

$$\partial Q_- = \{z \in \partial Q \backslash \partial Q_e,\ \ell(z) < 0\}$$

$$\partial Q_o = \{z \in \partial Q \backslash \partial Q_e,\ \ell(z) = 0\}$$

$$\partial Q_+ = \{z \in \partial Q \backslash \partial Q_e,\ \ell(z) > 0\}$$

qui représentent respectivement les parties de $\partial Q \backslash \partial Q_e$ où le champ B est rentrant, tangent ou sortant .

On note par Λ l'opérateur différentiel associé au champ B :

$$\Lambda = \sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial}{\partial y_p} .$$

Si un élément u de V(Q) est tel que $\Lambda u \in V'(Q)$, il possède localement une trace dans $\overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_-$ et $\overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_+$. Cela résulte du fait que tout point de $\partial Q \backslash \overline{\partial Q}_e$ possède un voisinage dans lequel ∂Q admet une représentation paramétrique ne dépendant que de la variable y.

On introduit les espaces :

$$W_-(\Lambda) = \{u \in V(Q),\ \Lambda u \in V'(Q),\ u|_{\overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_-} = 0\},$$

$$W_+(\Lambda) = \{u \in V(Q), \Lambda u \in V'(Q), u|_{\overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_+} = 0\},$$

qui sont chacun des espaces de Hilbert pour la norme du graphe.

Soit Γ la réunion des frontières, dans ∂Q, des ensembles ∂Q_e, ∂Q_-, ∂Q_o et ∂Q_+. On suppose que Γ vérifie :

(A_2) il existe $(S_j)_{1\le j\le N}$, un nombre fini d'hypersurfaces régulières de $\mathbb{R}^{n+m}$, non tangentes à ∂Q, telles que $\Gamma \subset \bigcup_{j=1}^{N} (\partial Q \cap S_j)$. De plus, soit η^j la normale extérieure à S_j, $1 \le j \le N$, et :

$$S_j^+ = \{z \in \partial Q \cap S_j \cap \Gamma,\ \sum_{i=1}^{n} (\eta_i^j)^2 > 0\},\ 1 \le j \le N,$$

$$S_j^o = \{z \in \partial Q \cap S_j \cap \Gamma,\ \sum_{i=1}^{n} (\eta_i^j)^2 = 0\},\ 1 \le j \le N.$$

On suppose que pour tout j, $1 \le j \le N$, la frontière, notée Γ_j, de S_j^+ et S_j^o dans $\partial Q \cap S_j$ est contenue dans une réunion finie de sous variétés régulières de dimension $n+m-3$.

Cette condition sur Γ est usuelle pour les problèmes dégénérés (voir [7] ou [8] par exemple) ; mais on permet ici à S_j^+ et S_j^o de se toucher. Elle est en fait utilisée pour tronquer certains éléments de $W_-(\Lambda)$ et $W_+(\Lambda)$ (et de $V(Q)$) au voisinage de Γ (voir lemmes 2, 3 et 4). Lorsque $m = 1$, on a toujours $\partial Q \cap S_j = S_j^+$.

§ 2. UN RESULTAT PREMIMINAIRE

Le but de ce paragrpahe est de montrer que l'équation $Eu = f$ possède au moins une solution dans $W_-(\Lambda)$ et que cette solution peut être approchée par des fonctions régulières. Ce résultat partiel est ensuite utilisé pour démontrer le théorème 2 du paragraphe suivant.

Théorème 1 : On suppose les conditions A_1 et A_2 vérifiées. Soit $b \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ et assez grand. Alors, pour tout f donné dans $V'(Q)$, l'équation :

$$(E) : -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial u}{\partial y_p} + bu = f$$

possède au moins une solution dans $W_-(\Lambda)$. De plus, elle possède une solution $u(f)$ ayant la propriété suivante : il existe une $(\psi_\nu)_\nu$ d'éléments de $\mathcal{D}(\bar{Q}) \cap W_-(\Lambda)$, convergeant vers $u(f)$ dans $W_-(\Lambda)$ et vérifiant :

(1) $\forall \nu$, ψ_ν est nulle dans un voisinage (dans $\mathbb{R}^{n+m}$) de l'adhérence (dans ∂Q) de ∂Q_e et $\partial Q_- \cup \partial Q_o$, et de la frontière (dans ∂Q) de ∂Q_+.

Remarque : La difficulté réside dans la deuxième partie, car même si f est régulière, la solution ne l'est pas et il résultera de la suite que (E) possède une seule solution dans $W_-(\Lambda)$.

La démonstration se fait en quatre étapes : on commence par se ramener au cas où f est dans $\mathcal{D}(Q)$; puis on construit une solution ; on élimine ensuite l'ensemble Γ ; finalement, il reste à étudier ce qui se passe dans $\mathring{\partial Q}_+$.

1. Réduction du problème : Pour démontrer le théorème 1, il suffit de le démontrer lorsque $f \in \mathcal{D}(Q)$ et que l'on a l'estimation suivante : il existe une constante $\mathcal{C}$ indépendante de $f \in \mathcal{D}(Q)$ telle que $\|u(f)\| \leq \mathcal{C}\|f\|_*$

En effet, si f est dans $V'(Q)$, il existe une suite $(f_\mu)_\mu$ d'éléments de $\mathcal{D}(Q)$ et convergeant vers f dans $V'(Q)$. Pour tout μ, il existe donc une solution $u(f_\mu) = u_\mu$ de l'équation (E) dans $W_-(\Lambda)$. L'estimation précédente entraîne que les u_μ sont dans un borné de $V(Q)$, et on déduit de l'équation (E) qu'ils sont en fait dans un borné de $W_-(\Lambda)$

Il suffit donc de faire un passage à la limite.

2. Existence d'une solution de (E) pour f dans $\mathcal{D}(Q)$.

On utilise la méthode classique, pour les opérateurs dégénérées (voir [7] par exemple) de la régularisation elliptique.

Pour $\varepsilon > 0$, on note L_ε l'opérateur $-\varepsilon\Delta - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, où Δ est le laplacien dans $\mathbb{R}^{n+m}$. Si b est assez grand, on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un unique u_ε dans $H_0^1(Q)$ solution de :

$$L_\varepsilon u_\varepsilon + \Lambda u_\varepsilon + b u_\varepsilon = f \quad \text{dans } Q.$$

De plus, il existe une constante $\mathcal{C}$, indépendante de f et ε, pour ε petit, telle que :

$$\|u_\varepsilon\| + \sqrt{\varepsilon}\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(Q)} \leq \mathcal{C}\|f\|_*$$

$$|u_\varepsilon|_{L^\infty(Q)} \leq \mathcal{C}|f|_{L^\infty(Q)} \quad H_0^1(Q)$$

On peut donc extraire de la famille $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, une suite notée encore $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ et convergeant vers un élément $u(f)$ dans $V(Q)$. On déduit

de l'équation satisfaite par u_ε que le terme $-\varepsilon\Delta u_\varepsilon + \Lambda u_\varepsilon$ est borné dans $V'(Q)$; comme il converge vers $\Lambda u(f)$ dans $H^{-1}(Q)$, il s'ensuit que l'élément $u(f)$ est solution de l'équation (E), et qu'il est aussi dans $L^\infty(Q)$.

Il reste à vérifier que $u(f) \in W_-(\Lambda)$, c'est-à-dire la condition de trace sur ∂Q_-. Or en général, la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ne converge pas vers $u(f)$ dans $W_-(\Lambda)$. On est donc amener à vérifier que $\forall \chi \in \mathcal{D}(Q)$, $\operatorname{supp}\chi \cap \overset{\circ}{\widehat{\partial Q_-}}$, alors la suite $(\chi u_\varepsilon)_\varepsilon$ est borné dans $W_-(\Lambda)$; d'après ce qui précède, il suffit de vérifier que $(\varepsilon\Delta\chi u_\varepsilon)_\varepsilon$ est borné dans $L^2(Q)$, ce qui résulte du lemme suivant plus général et qui sera utilisé dans la suite :

<u>Lemme 1</u> : Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+m}$ tel que $\bar{\omega}$ soit inclus dans Q, ou tel que $\bar{\omega} \cap \partial Q$ soit contenu dans ∂Q_e ou $\overset{\circ}{\widehat{\partial Q_- \cup \partial Q_o}}$. Alors, pour ε petit, la famille $(\varepsilon u_\varepsilon|_{\omega\cap Q})_\varepsilon$ est dans un borné de $H^2(\omega\cap Q)$.

Pour démontrer ce lemme, on utilise les quotients différentiels :

- si $\bar{\omega} \subset Q$, on estime ainsi toutes les dérivées ;
- si $\bar{\omega} \cap \partial Q \subset \partial Q_e$, on estime ainsi les dérivées tangentielles ; l'estimation manquante s'obtient grâce à l'équation ;
- si $\bar{\omega} \cap \partial Q < \overset{\circ}{\widehat{\partial Q_- \cup \partial Q_o}}$, les dérivées tangentielles s'obtiennent comme précédemment ; l'estimation sur le terme $\varepsilon \dfrac{\partial^2 u\varepsilon}{\partial y m^2}$ se prouve en multipliant l'équation satisfaite par u_ε par ce terme, et en intégrant par parties.

La démonstration détaillée se trouve dans [6]; on n'utilise pas de fonctions barrières comme dans [7] grâce à la forme particulière de l'opérateur.

3. <u>Quelques lemmes de troncature</u>

La solution $u(f)$, $f \in \mathcal{D}(Q)$ ainsi construite de (E) n'étant en général pas régulière il reste à prouver la deuxième partie. Le lemme 1 précédent nous indique que l'on a une bonne convergence des u_ε au voisinage de tout compact de ∂Q_e et $\overset{\circ}{\widehat{\partial Q_- \cup \partial Q_o}}$. Il reste à voir que l'on peut tronquer $u(f)$ au voisinage de Γ. Il restera ensuite à s'occuper d'un compact de $\overset{\circ}{\widehat{\partial Q_+}}$.

Pour tronquer, on va exploiter l'hypothèse A_2 qui va nous permettre d'éliminer successivement chaque sous-variété $\partial Q \cap S_j$, $1 \le j \le N$. C'est une méthode usuelle dans ce genre de problèmes, bien que l'on suppose habituellement que S_j^+ et S_j^o ne se touchent pas. On adapte dans la

suite des fonctions tronquantes utilisées dans [7]. On commence par éliminer $\partial Q \cap S_1$ et plus précisément Γ_1 :

<u>Lemme 2</u> : Il existe une suite $(u_\eta)_\eta$ d'éléments de $W_-(\Lambda)$, nuls au voisinage de Γ_1, et convergeant vers $u(f)$ dans $W_-(\Lambda)$.

Grâce à la condition (A_2), on peut construire une suite $(\varphi_\eta)_{\eta>0}$ d'éléments de $C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ tels que :

$$\begin{cases} 0 \le \varphi_n \le 1 \\ \varphi_\eta(z) = 0 \quad \text{si} \quad d(z,\Gamma_1) < \eta, \ \varphi_\eta(z) = 1 \quad \text{si} \quad d(z,\Gamma_1) > 2\eta, \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_\eta}{\partial x_i}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \dfrac{\mathcal{A}}{\sqrt{\eta}}, \ 1 \le i \le n \ ; \ \left|\dfrac{\partial^2\varphi_\eta}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \dfrac{\mathcal{A}}{\eta}, \ 1 \le i,j \le n \ ; \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_\eta}{\partial y_p}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \dfrac{\mathcal{A}}{\eta}, \ 1 \le p \le m \ ; \ \text{mes Supp} \ |\text{grad}\,\varphi_\eta| \le \mathcal{A}\,\eta^2 \ ; \end{cases}$$

où $\mathcal{A}$ est une constante indépendante de y et $d(z,\Gamma_1)$ est la distance euclidienne de z à Γ_1.

Posant $u_\eta = \varphi_\eta \, u(f) \in W(\Lambda) \cap L^\infty(Q)$, on vérifie que $(u_\eta)_\eta$ tend vers $u(f)$ dans $V(Q)$. De plus comme :

$$\Lambda u_\eta = (f - bu)\varphi_\eta + u\Lambda\varphi_\eta - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\frac{\partial\varphi_\eta}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi_\eta}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \ \forall \eta > 0$$

il reste à vérifier que le dernier terme de cette égalité tend vers 0 dans $V'(Q)$. Or cela résulte du fait que :

$$\forall V \in V(Q), \ \int_Q \frac{\partial\varphi_\eta}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} V\,dt = -\int u \frac{\partial^2\varphi_\eta}{\partial x_i} V\,dt - \int u \frac{\partial\varphi_\eta}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}\,dt, \ \forall\, i = 1,\dots,u$$

On va maintenant tronquer u_η au voisinage de S_1^o :

<u>Lemme 3</u> : A η fixé, il existe une suite $(u_\delta)_{\delta>0}$ d'éléments de $W_-(\Lambda)$, nuls au voisinage de S_1^o, et convergeant vers u_η dans $W_-(\Lambda)$.

Comme η est fixé, u_η est nul à la frontière de S_1^o ; il reste à tronquer u_η autour d'un compact K_η intérieur à S_1^o. On construit maintenant une suite $(\varphi_\delta)_{\delta>0}$ d'éléments de $C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ vérifiant :

$$\begin{cases} 0 \le \varphi_\delta \le 1 \\ \varphi_\delta(z) = 0 \quad \text{si} \quad d(z,K_\eta) < \delta \ , \ \varphi_\delta(z) = 1 \quad \text{si} \ d(z,K_\eta) > 2\delta \\ \left|\dfrac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_i}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \mathcal{A}, \ 1 \le i \le r \ ; \ \left|\dfrac{\partial \varphi_\delta}{\partial y_p}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \dfrac{\mathcal{A}}{\delta}, 1 \le p \le m \ ; \\ \text{mes supp} \ |\text{grad}\, \varphi_\delta| \le \mathcal{A}\, \delta^2 \ , \end{cases}$$

où $\mathcal{A}$ est encore une constante indépendante de δ.

La fin de la démonstration est immédiate : $u_\delta = \varphi_\delta u_\eta$.

Il reste à tronquer $u\delta$ autour d'un compact de S_1^+ :

<u>Lemme 4</u> : A δ fixé, il existe une suite $(u_\sigma)_{\sigma>0}$ d'éléments de $W_-(\Lambda)$, nuls au voisinage de S_1^+, qui converge vers u_δ dans $W_-(\Lambda)$.

δ étant fixé, on tronque maintenant u_δ autour d'un compact K_δ intérieur à S_1^+, en introduisant une suite $(\varphi_\sigma)_{\sigma>0}$ d'élements de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ vérifiant :

$$\begin{cases} 0 \le \varphi < 1 \ , \\ \varphi_\sigma(z) = 0 \quad \text{si} \quad d(z,K_\delta) < \sigma \ ; \ \varphi_\sigma(z) = 1 \quad \text{si} \quad d(z,K_\delta) > 2\sigma \\ \left|\dfrac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \dfrac{\mathcal{A}}{\sqrt{\sigma}} \ , \ 1 \le i \le n \ ; \ \left|\dfrac{\partial^2 \varphi_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \dfrac{\mathcal{A}}{\sigma}, 1 \le i,j \le n \ ; \\ \left|\dfrac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y_p}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \dfrac{\mathcal{A}}{\sigma}, \ 1 \le p \le m; \ \text{mes supp} \ |\text{grad}\, \varphi_\sigma| \le \mathcal{A}\, \sigma^{3/2} \ ; \end{cases}$$

où $\mathcal{A}$ est une constante indépendante de σ

Comme l'un des champs $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ est transverse à S_1 au voisinage de K_δ, on en déduit que tout élément de $V(Q)$ possède une trace sur S_1, et on obtient alors le résultat suivant :

$$\forall\, v \in V(Q)\ ,\ \lim_{\sigma \to 0} \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \int_{Q \cap \operatorname{supp} |\operatorname{grad} \varphi_\sigma|} v^2 dz \right] = 0$$

On vérifie ensuite que $u_\sigma = \varphi_\sigma u_\delta$ converge vers u_δ dans $W_-(\Lambda)$.

Procédant de même successivement pour les autres parties de Γ, on déduit donc qu'il existe une suite $(u_\mu)_{\mu > 0}$ d'éléments de $W_-(\Lambda)$, nuls sur un voisinage de Γ et convergeant vers $u(f)$ dans $W_-(\Lambda)$.

4. Fin de la démonstration

Pour terminer la démonstration, il suffit de vérifier que l'on peut approcher les éléments u_μ précédents par des fonctions régulières. Soit alors $\mathcal{O}_\Gamma$, $\mathcal{O}_e$, $\mathcal{O}_-$ et $\mathcal{O}_+$ un recouvrement ouvert de $\bar{Q}$ tel que :

$$\Gamma \subset \mathcal{O}_\Gamma : \partial Q \cap \bar{\mathcal{O}}_+ \subset \overset{\circ}{\widehat{\partial Q_+}} \quad ;$$

$$\partial Q \cap \bar{\mathcal{O}}_e \subset \partial Q_e \ ;\ \partial Q \cap \bar{\mathcal{O}}_- \subset \overset{\circ}{\widehat{\partial Q_- \cup \partial Q_o}}\ ,$$

et θ_Γ, θ_e, θ_- et θ_+ une partition de l'unité associée.

Il suffit de montrer que $\theta_\Gamma u_\mu$, $\theta_e u_\mu$, $\theta_- u_\mu$ et $\theta_+ u_\mu$ sont limites de fonctions régulières. Or, μ étant fixé quelconque, si $\mathcal{O}_\Gamma$ est assez petit, on aura $\theta_\Gamma u_\mu = 0$; les deux termes $\theta_e u_\mu$ et $\theta_- u_\mu$ se traitent en utilisant le lemme 1 précédent.

Il reste donc le dernier terme ; si on note $\tilde{v}$ le prolongement de $\theta + u_\mu$ par 0 en dehors de Q, en utilisant que $\operatorname{supp} \tilde{v} \cap \partial Q \subset \overset{\circ}{\widehat{\partial Q_+}}$ et que $\theta_+ u_\mu \in W_-(\Lambda)$, par translation et régularisation on obtient le résultat cherché en adaptant les méthodes de [1] par exemple.

§ 3. PROPRIETES DE L'OPERATEUR Λ DANS V(Q) ET APPLICATIONS

1. Résultat principal

On désigne par Λ_- l'opérateur non borné de V(Q) dans V'(Q) de domaine $D(\Lambda_-)$ égal à l'adhérence dans $W_-(\Lambda)$ des fonctions de $\mathcal{D}(\bar{Q}) \cap W_-(\Lambda)$ vérifiant (1) (voir théorème 1) et défini par :

$$\forall\, u \in D(\Lambda_-),\ \Lambda_- u = \sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial u}{\partial y_p}\ .$$

Soit Λ_-^* son adjoint en tant qu'opérateur non borné de $V(Q)$ dans $V'(Q)$. On remarque que :

$$\forall\, v \in D(\Lambda_-^*),\ \Lambda_-^* v = -\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial v}{\partial y_p} - \operatorname{div} B.\, v \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(Q),$$

et que Λ_-^* prolonge l'opérateur Λ_+ de domaine $D(\Lambda_+)$ égal à l'adhérence dans $W_+(\Lambda)$ des fonctions $\psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}) \cap W_+(\Lambda)$ vérifiant :

(1) $\begin{cases} \psi \text{ est nulle dans un voisinage (dans } \mathbb{R}^{n+m}) \text{ de } \partial Q_e,\ \partial Q_+ \cup \partial Q_o \text{ et de} \\ \text{la frontière (dans } \partial Q) \text{ de } \partial Q_-, \end{cases}$

et défini par :

$$\forall\, v \in D(\Lambda_+),\ \Lambda_+ v = -\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial v}{\partial y_p} - \operatorname{div} B.v.$$

<u>Proposition</u> : On suppose que les conditions A_1 et A_2 sont vérifiées. Les opérateurs Λ_- et Λ_+ sont alors adjoints l'un de l'autre.

Il suffit de vérifier que $D(\Lambda_-^*) \subset D(\Lambda_+)$. Soit $w \in D(\Lambda_-^*)$, et f l'élément de $V'(Q)$ défini par $f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + \Lambda_-^* w + bw$, b comme au théorème 1

On déduit de ce même théorème que l'équation :

$$v \in D(\Lambda_-^*),\ -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \Lambda_-^* v + bv = f\ ,$$

possède au plus une solution dans $D(\Lambda_-^*)$. De plus, elle en possède au moins une dans $D(\Lambda_+)$ car elle s'écrit alors :

$$v \in D(\Lambda_+),\ -\sum_{i=1}^{u} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial v}{\partial y_p} + (b - \operatorname{div} B).v = f\ ,$$

et cela résulte encore du théorème 1. Par suite, $w \in D(\Lambda_+)$.

On obtient finalement le résultat suivant qui caractérise les opérateurs Λ_-, et Λ_+ ainsi que leurs domaines et qui est le résultat fondamental de cette étude :

<u>Théorème 2</u> : On suppose que les conditions A_1, A_2 sont vérifiées. Dans ce cas $D(\Lambda_-) = W_-(\Lambda)$ et $D(\Lambda_+) = W_+(\Lambda)$. De plus, l'opérateur $\Lambda_- + \frac{1}{2}$ div. B et son adjoint sont positifs, et sont donc maximaux monotones.

Il suffit de montrer que $W_+(\Lambda) \subset D(\Lambda_-^*)$; il suffit donc de montrer que :

$$\forall\, v \in W_+(\Lambda),\ \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}) \cap W_-(\Lambda) \text{ vérifiant } (1)$$

$$\left(\left(\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial \psi}{\partial y_p}, v\right)\right) = \left(\left(\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial v}{\partial y_p} - \operatorname{div} B\, v, \psi\right)\right)$$

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\bar{Q})$ telle que $\operatorname{Supp} \chi \cap \partial Q \subset \overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_+$, $\chi|_{\operatorname{supp} \psi} = 1$. On obtient :

$$\left(\left(\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial \psi}{\partial y_p}, v\right)\right) = \int_Q \left(\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial \psi}{\partial y_p}\right) \chi\, v\, dz .$$

Comme $\chi v \in W_-(\Lambda)$ et vérifie (1), on peut (comme à la fin du théorème 1), trouver une suite $(\varphi_\nu)_\nu$, $\varphi_\nu \in \mathcal{D}(\bar{Q}) \cap W_-(\Lambda)$ et vérifiant (1), convergeant vers χv dans $W_-(\Lambda)$. On déduit alors de la formule d'Ostrogradskique :

$$\int_Q \left(\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial \psi}{\partial y_p}\right) \varphi_\nu\, dt = \int_Q \left(-\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y_p} - \operatorname{div} B\, \varphi_\nu\right) \psi\, dz +$$

$$+ \int_{\overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_+} \ell(z)\, \psi\, \varphi_\nu\, d\sigma , \quad \forall\, \nu ,$$

La convergence de la suite $(\varphi_\nu)_\nu$ vers χv jointe à la continuité locale des traces dans $\overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_+$ donne le résultat par passage à la limite.
Comme l'adjoint de $\Lambda_- + \frac{1}{2}\operatorname{div} B$ est évidemment $\Lambda_+ + \frac{1}{2}\operatorname{div} B$, la positivité de ces deux opérateurs résulte de leur positivité sur les fonctions régulières de $W_-(\Lambda)$ et $W_+(\Lambda)$.

On retrouve ainsi le résultat de [3], lorsque n = 0, c'est-à-dire lorsque l'espace V(Q) est réduit à $L^2(Q)$. Si les coefficients b_p, $1 \leq p \leq m$ sont indépendants de la variable $x \in \mathbb{R}^n$, on peut déduire le théorème 2 des propriétés de l'opérateur Λ dans $L^2(Q)$ données par cet auteur.

2. Application aux problèmes homogènes

Soit $a(.,.)$ la forme bilinéaire définie et continue sur $V(Q)$ par

$$② \quad \begin{cases} \forall u,v \in V(Q) \\ a(u,v) = \int_Q \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + a_o uv \right] dt , \end{cases}$$

avec :

$$③ \quad a_{ij} \in L^\infty(Q),\ 1 \le i,j \le n \ ;\ a_i \in L^\infty(Q),\ 0 \le i \le n.$$

On désigne par L l'opérateur linéaire continu de $V(Q)$ dans $V'(Q)$ associé à la forme $a(.,.)$:

$$④ \quad \forall u \in V(Q),\ Lu = - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{u} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_o u .$$

On suppose que l'hypothèse de coercivité suivante est vérifiée : il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$⑤ \quad \forall u \in V(Q) \quad a(u,u) - \frac{1}{2} \int_Q \operatorname{div} B . u^2 dz \ge \alpha \|u\|^2 .$$

<u>Théorème 3</u> : On suppose les conditions A_1 et A_2 vérifiées. Soit L l'opérateur défini par ④ associé à une forme $a(.,.)$ vérifiant ② , ③ et ⑤ Alors, pour tout f dans $V'(Q)$, il existe un unique u appartenant à $W_-(\Lambda)$ et vérifiant :

$$Lu + \Lambda u = f.$$

Il suffit d'écrire que : $L + \Lambda = \left[L - \frac{1}{2} \operatorname{div} B\right] + \left[\Lambda + \frac{1}{2} \operatorname{div} B\right]$ et d'utiliser le théorème 2.

On peut remplacer ici l'opérateur L par un opérateur plus général, ce qui permet, par exemple, d'étudier les inéquations variationnelles associées à $L + \Lambda$.

3. Conditions inhomogènes sur ∂Q_-

On suit maintenant une démarche analogue à celle employée dans [3] pour le cas où $V(Q) = L^2(Q)$. On introduit les espaces :

$$L^2_e(\partial Q_-) = \{\varphi : \mathring{\partial Q}_- \to \bar{\mathbb{R}} \text{ mesurables}, \int_{\mathring{\partial Q}_-} |\ell(z)|\varphi^2 d\sigma < +\infty\},$$

$$L^2_e(\partial Q_+) = \{\varphi : \mathring{\partial Q}_+ \to \bar{\mathbb{R}} \text{ mesurables}, \int_{\mathring{\partial Q}_+} \ell(z)\,\varphi^2 d\sigma < +\infty\},$$

qui sont chacun des espaces de Hilbert pour leur norme canonique.

On peut vérifier que, par exemple, si $u \in W_-(\Lambda)$ alors $u|_{\partial Q_+} \in L^2_\rho(\partial Q_+)$.

Soit $W(\Lambda)$ l'espace défini par :

$$W(\Lambda) = \{u \in V(Q),\ \Lambda u \in V'(Q),\ u|_{\partial Q_-} \in L^2_\rho(\partial Q_-)\},$$

qui est aussi un espace de Hilbert pour la norme du graphe.

Les conditions $u \in V(Q)$ et $\Lambda u \in V'(Q)$ n'entraînent pas que $u|_{\partial Q_-} \in L^2_\rho(\partial Q_-)$; mais on a $W_-(\Lambda) \subset W(\Lambda)$ et $W_+(\Lambda) \subset W(\Lambda)$.

Les propriétés de l'espace $W(\Lambda)$ vont découler du résultat suivant sur le problème aux limites inhomogènes dans $\mathring{\partial Q}_-$:

<u>Théorème 4</u> : On suppose les conditions A_1 et A_2 vérifiées. Soit L défini comme au théorème 3 précédent.
Pour tout couple (f, u_-) donné dans $V'(Q) \times L^2_\ell(\partial Q_-)$, il existe un unique élément $u \in W(\Lambda)$ vérifiant :

$$\begin{cases} Lu + \Lambda u = f, \\ u|_{\mathring{\partial Q}_-} = u_- \ ; \end{cases}$$

de plus :

$$u|_{\partial Q_+} \in L^2_\ell(\partial Q_+) .$$

L'unicité découle du théorème 3 précédent. Pour l'existence, soit $(\psi_\nu)_\nu$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\bar{Q}) \cap W_+(\Lambda)$ tels que :

$$\psi_\nu|_{\mathring{\partial Q}_-} \to u_- \quad \text{dans } L^2_\rho(\partial Q_-),$$

et soit $v_\nu \in W_-(\Lambda)$ solution de :

$$Lv_\nu + \Lambda v_\nu = f - L\psi_\nu - \Lambda\psi_\nu , \quad \forall \nu .$$

On vérifie que $u_\nu = v_\nu + \psi_\nu$ converge dans $W(\Lambda)$ vers un élément u satisfaisant aux conditions du théorème 4. En effet, comme $u_\nu|_{\overset{\circ}{\partial Q}_-} = \psi_\nu|_{\overset{\circ}{\partial Q}_-}$,

multipliant l'équation $Lu_\nu + \Lambda u_\nu = f$ par u_ν et utilisant que v_ν est limite dans $W(\Lambda)$ de fonctions de $\mathcal{D}(\bar{Q}) \cap W_-(\Lambda)$, on obtient l'estimation :

$$\alpha\|u_\nu\|^2 + \frac{1}{2}\int_{\overset{\circ}{\partial Q}_+} \rho(z)\, u_\nu^2\, d\sigma = -\frac{1}{2}\int_{\overset{\circ}{\partial Q}_-} \ell(z)\, \psi_\nu^2\, d\sigma ,$$

ce qui permet de conclure.

<u>Corollaire</u> : On suppose les conditions A_1 et A_2 vérifiées. Tout élément de $W(\Lambda)$ possède une trace dans $\overset{\circ}{\partial Q}_+$ appartenant à $L^2_\rho(\partial Q_+)$. De plus, $\mathcal{D}(\bar{Q}) \cap W(\Lambda)$ est dense dans $W(\Lambda)$ et :

$$\forall u,\ v \in W(\Lambda)$$

$$((\Lambda u, v)) + ((\Lambda v, u)) + \int_Q \operatorname{div} B\, uv\, dz = \int_{\overset{\circ}{\partial Q}_-} \ell(z) uv\, d\sigma + \int_{\overset{\circ}{\partial Q}_+} \ell(z) uv\, d\sigma .$$

On déduit en effet du théorème précédent que tout élément de $W(\Lambda)$ est limite d'une suite $(v_\nu + \psi_\nu)_\nu$, où $v_\nu \in W_-(\Lambda)$ et $\psi_\nu \in W_+(\Lambda)$. Il suffit d'utiliser la densité des fonctions régulières dans ces deux derniers espaces.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Baiocchi : Définition d'opérateurs maximaux et applications. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série, t.2, 1969, p.481 à 520.

[2] M. Baouendi et P. Grisvard : Sur une équation d'évolution changeant de type. J. Funct. Anal. vol.2, 1968, p.352 à 367.

[3] C. Bardos : Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre... Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série, t.3, 1970 p.185 à 233.

[4] G. Fichera : Sulle equazione differenziali lineari ellitico-parabolicheel second ordine. Att. Acc. Nat. Lincei. Nem., Ser.8, vol.5, 1956 p.1 à 30

[5] J. J. Kohn, L. Nirenberg : Degenerate elliptic parabolique equations of second order.
Comm. Pure and Appl. Math. vol. XX, 1967, p.797 à 872.

[6] M. Langlais : Solutions fortes pour des problèmes aux limites du second ordre dégénérés, note à paraître aux C.R.A.S. et
Pub. A.A.I. n° 7703, U.E.R. Math. et Inf., Université de Bordeaux I.

[7] O. A. Oleinik, E. V. Radkevič : Second order equations with non negative characteristic form.
A M. S., Providence, Rhode Island, Plenum Press, 1973.

[8] R. S. Phillips, L. Sarason : Elliptic parabolic equations of second order, J. Math. Mech. 17, 1967-1968 p.891-917.