

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

D. ROBERT

Propriétés spectrales d'opérateurs pseudodifférentiels

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 5,
p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978___A6_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

LA TEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 7 - 1 9 7 8

PROPRIETES SPECTRALES D'OPERATEURS
PSEUDODIFFERENTIELS

par D. ROBERT

Exposé n° V

13 Décembre 1977

INTRODUCTION

Commençons par donner quelques exemples illustrant le type d'opérateur que nous allons considérer :

- a) $-\Delta + |x|^2$ (Hermite). Plus généralement : $-\Delta + V$ où $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$ est C^∞ vérifiant : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, il existe $C_\alpha > 0$ tel que :

$$|D^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \cdot V(x) \langle x \rangle^{-\delta|\alpha|} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^n.$$

On a posé : $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$; $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$ et

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

- b) $(1 + x^2) \cdot (1 - \frac{d^2}{dx^2})$

- c) $\sum_{|\alpha| + |\beta| \leq M} a_{\alpha\beta} x^\alpha \cdot D^\beta$ où $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ et $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| + |\beta| \leq M} a_{\alpha\beta} x^\alpha \cdot \xi^\beta$

est un polynôme elliptique en (x, ξ) et positif. Plus généralement $a(x, \xi)$ est un polynôme hypoelliptique en (x, ξ) prenant ses valeurs dans un cône propre de \mathbb{C} de sommet 0.

On peut remarquer que l'exemple b) n'est pas hypoelliptique en (x, ξ) .

Soit A l'unique réalisation dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ (i.e. le seul prolongement fermé comme opérateur non borné de $L^2(\mathbf{R}^n)$) de l'un des opérateurs précédents. On se propose d'étudier la résolvante $(A - \lambda)^{-1}$, les puissances complexes A^z , λ et $z \in \mathbb{C}$ ainsi que le comportement asymptotique des valeurs propres de A .

Nous suivrons le plan suivant :

- § 1. Réalisation dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ et résolvante.
- § 2. A^z et application
- § 3. Comportement des valeurs propres du problèmes de Dirichlet sur un ouvert Ω de \mathbf{R}^n .

Les démonstrations détaillées des résultats annoncés ici paraîtront ailleurs.

§ 1. REALISATION DANS $L^2(\mathbb{R}^n)$ ET RESOLVANTE

Pour décrire les propriétés des opérateurs que nous considérons nous nous plaçons dans le cadre des opérateurs pseudodifférentiels de R. Beals [1]. On se donne trois fonctions continues : ϕ (le poids en ξ), φ (le poids en x) et μ (l'ordre) : $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_+$. On introduit la classe de symboles :

$$S_{\phi, \varphi}^{\mu} = \{p \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n}) : \sup_{\mathbb{R}^{2n}} [e^{-\mu \cdot \phi^{|\alpha|} \cdot \varphi^{|\beta|}} |\partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} p|] < +\infty \text{ pour tout } \alpha \text{ et } \beta\}$$

Sous des hypothèses techniques convenables ([1]) on obtient une bonne théorie pour les opérateurs pseudodifférentiels associés à p par la formule habituelle :

$$(1) \quad p(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} \cdot p(x, \xi) \cdot \hat{u}(\xi) d\xi \quad \text{pour } u \in \mathcal{S},$$

espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide où \hat{u} désigne la transformée de Fourier de u .

En particulier on peut prendre :

$$\phi(x, \xi) = \langle \xi \rangle^{\delta_1}, \quad \varphi(x, \xi) = \langle x \rangle^{\delta_2}; \quad \delta_1, \delta_2 > 0 \text{ et}$$

$$\mu = k \cdot \text{Log } \phi + h \cdot \text{Log } \varphi = (k, h) \text{ où } k \text{ et } h \text{ sont réels, ou encore}$$

$$\phi(x, \xi) = \varphi(x, \xi) = (1 + |x| + |\xi|)^{\delta_1}.$$

Ces exemples ne vérifient pas les propriétés imposées dans [1]. Cependant les résultats de [1] subsistent ([3]).

Dans tout ce qui suit nous supposerons que (ϕ, φ) vérifie : il existe $c, \theta > 0$ telles que :

$$\phi \cdot \varphi \geq C(1 + |x| + |\xi|)^{\theta} \quad \text{pour tout } (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

On désigne par $\mathcal{L}_{\phi, \varphi}^{\mu}$ la classe des opérateurs définis par (1) pour

$$p \in S_{\phi, \varphi}^{\mu}.$$

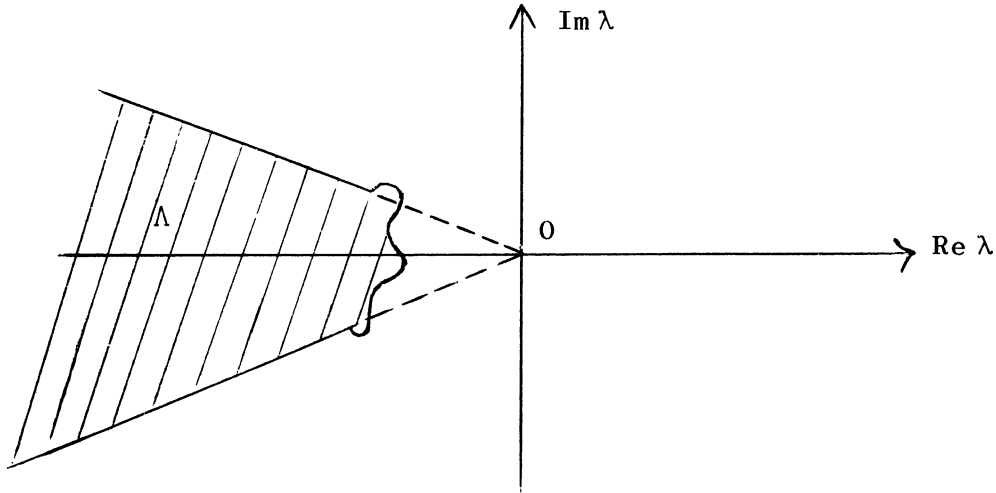
Soit $a(x, D) \in \mathcal{L}_{\phi, \varphi}^{\mu_0}$. On suppose que $a(x, D) = a_0(x, D) + a_1(x, D)$ où

$$a_0, a_1 \in \mathcal{L}_{\phi, \varphi}^{\mu_0} \text{ vérifient :}$$

$$(E_0) \quad \begin{cases} |\partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} a_0| \leq C_{(\alpha, \beta)}^{(0)} |a_0| \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|} \\ |\partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} a_1| \leq C_{(\alpha, \beta)}^{(1)} |a_0| \cdot \phi^{-|\alpha|-1} \cdot \varphi^{-|\beta|-1} \end{cases}, \text{ uniformément sur } \mathbb{R}^{2n}$$

$$(E_1) \quad C_1 \cdot e^{\mu} \leq |a_0| \quad ; \quad C_1 > 0$$

(E₂) Il existe une région ouverte Λ du plan complexe du type :



et des constantes $C, C > 0$ telles que :

$$\begin{cases} |a_0(x, \xi) - \lambda| \geq c |\lambda| \\ |a_0(x, \xi) - \lambda| \geq c \cdot |a_0(x, \xi)| \end{cases}$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $|x| + |\xi| \geq C$.

Remarques : a) (E₀) et (E₁) sont des conditions d'hypoellipticité du type Hörmander.

b) (E₂) est satisfaite si l'on suppose par exemple que $a_0(x, \xi)$ prend toutes ses valeurs dans un cône propre de \mathbb{C} ne rencontrant pas $]-\infty, 0[$.

Sous les hypothèses précédentes on a le :

Théorème 0 : a) $a(x, D)$ admet une et une seule réalisation A dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. En particulier si $a(x, D)$ est formellement autoadjoint, il est essentiellement autoadjoint.

b) Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour $\lambda \in \Lambda$ et $|\lambda| \geq \lambda_0$ $(A - \lambda)^{-1}$ existe.

c) Toute demi-droite D contenue dans Λ est un rayon de croissance minimale pour $(A - \lambda)^{-1}$ i.e. on a :

$$\|(A - \lambda)^{-1}\|_{L^2; L^2} = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \text{ pour } |\lambda| \rightarrow +\infty, \lambda \in D.$$

Indications sur la démonstration : On construit une paramétrix à gauche et à droite pour $a(x, D) - \lambda$ par approximations successives. Pour tout entier $N \geq 0$ et $\lambda \in \Lambda$; $\lambda \neq 0$ on construit des opérateurs :

$$B_{N, \lambda} = b_{0, \lambda} + \dots + b_{N, \lambda} \text{ et } C_{N, \lambda} = c_{0, \lambda} + \dots + c_{N, \lambda} \text{ avec :}$$

$$(d) \quad (a(x, D) - \lambda) \cdot B_{N, \lambda} = 1 + R_{N, \lambda} \quad .$$

$$(g) \quad C_{N, \lambda} (a(x, D) - \lambda) = 1 + S_{N, \lambda} \quad .$$

Les symboles de $b_{j, \lambda}$ et $c_{j, \lambda}$ sont donnés par les formules de récurrence :

$$b_{0, \lambda} = c_{0, \lambda} = (a_0 - \lambda)^{-1}$$

$$b_{j+1, \lambda} = -(a_0 - \lambda)^{-1} \sum_{|\alpha| + i + k = j+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha a_i \cdot D^\alpha b_{k, \lambda}$$

$$0 \leq k \leq j, i = 0, 1$$

$$c_{j+1, \lambda} = -(a_0 - \lambda)^{-1} \sum_{|\alpha| + i + k = j+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha a_i \cdot \partial^\alpha c_{k, \lambda}$$

$$0 \leq k \leq j, i = 0, 1$$

Pour N assez grand on prouve alors que :

$$\|R_{N, \lambda}\|_{L^2, L^2} = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \text{ et } \|S_{N, \lambda}\|_{L^2, L^2} = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \text{ lorsque } |\lambda| \rightarrow +\infty,$$

$\lambda \in \Lambda$. Le théorème 0 en résulte .

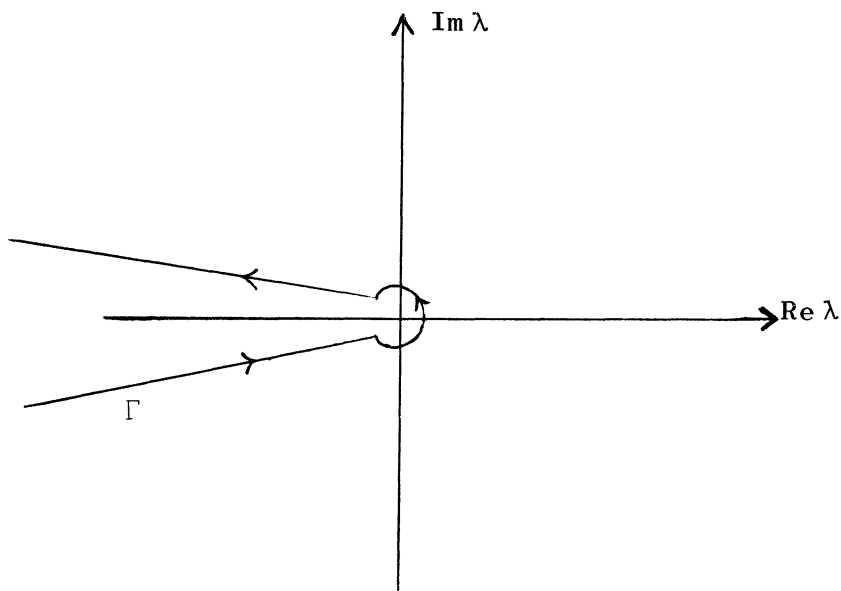
Exemples : 1) $a(x, \frac{d}{dx}) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + x^4$ est essentiellement autoadjoint autoadjoint de domaine : $D(A) = \{u \in H^2(\mathbf{R}), x^4 \cdot u \in L^2(\mathbf{R})\}$

2) Les exemples cités en introduction vérifient clairement les hypothèses du théorème 0.

§ 2. ETUDE DE A^z

On conserve les hypothèses du I. On suppose de plus que $]-\infty, 0] \subset \Lambda$. Pour $\operatorname{Re} z < 0$ on pose : $A^z = \frac{i}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} \lambda^z (A-\lambda)^{-1} d\lambda$ où Γ

est un contour du type :



Pour z quelconque on pose : $A^z = A^{z-l} \cdot A^l$ où $l \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} z < l$. A^z ne dépend ni de l ni de Γ ([5]).

Enfin posons : $a_{j,z} = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z b_{j,z}(x, \xi) d\lambda$ pour $\operatorname{Re} z < 0$. on a :

Théorème 1 : a)
$$\begin{cases} A^z \in \mathcal{L}^{\operatorname{Re} z \cdot \mu_1} & \text{si } \operatorname{Re} z \leq 0 \\ A^z \in \mathcal{L}^{\operatorname{Re} z \cdot \mu_0} & \text{si } \operatorname{Re} z \geq 0 \end{cases}$$

b)
$$\sigma(A^z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,z} \quad \text{pour } \operatorname{Re} z < 0$$

où $\sigma(A^z)$ désigne le symbole de A^z .

c) $a_{0,z} = a_0^z$ et

$$a_{j,z} = \sum_{h=1}^{2j} \frac{z(z-1)\dots(z-h+1)}{h!} \cdot \gamma_{j,h} \cdot a_0^{z-h}$$

où $\gamma_{j,h} \in \mathcal{L}^{h \cdot \mu_1 - (j,j)}$.

Théorème 2 : On suppose de plus que $|a_0(x, \xi)| \geq C_1(1 + |x| + |\xi|)^{\delta_1}$
où $C_1, \delta_1 > 0$. On a alors :

- a) Il existe $r_0 > 0$ tel que pour $\operatorname{Re} z < -r_0$, A^z est nucléaire .
b) Si $K^{(z)}$ est le noyau-distribution associé à A^z on a :

$$\operatorname{Tr} A^z = \int_{\mathbb{R}^n} K^{(z)}(x, x) dx \quad \text{et} \quad z \mapsto \operatorname{Tr} A^z$$

est holomorphe dans le demi-plan : $\{\operatorname{Re} z < -r_0\}$.

- c) Pour $x \neq y$, $z \mapsto K^{(z)}(x, y)$ se prolonge en une fonction entière.

L'intérêt de l'étude de $\operatorname{Tr} A^z$ est renforcé par la :

Proposition (Seeley [5]) : Soit A un opérateur fermé de l'espace hilbertien X de domaine $D(A)$ dense dans X . Supposons qu'il existe $r_0 > 0$ tel que $(A^* A + I)^{-r_0}$ et $(A A^* + I)^{-r_0}$ soient nucléaires. On a alors :
 $\operatorname{Ind} A = \operatorname{Tr}(A^* A + I)^z - \operatorname{Tr}(A A^* + I)^z$ pour $\operatorname{Re} z \leq -r_0$.

Nous allons poursuivre l'étude de $\operatorname{Tr} A^z$ sur le cas particulier suivant : soient $h = (h_1, \dots, h_n)$ et $k = (k_1, \dots, k_n)$ deux multiindices d'entiers ≥ 1 . On suppose que $a = \sum_{j=0}^N a_j$ où a_j est quasi-homogène ; c'est à dire :

$$a_j(\rho^{h_1} x_1, \dots, \rho^{h_n} x_n, \rho^{k_1} \xi_1, \dots, \rho^{k_n} \xi_n) = \rho^{m-j} a_j(x, \xi)$$

pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\rho > 0$. On suppose de plus que a_0 est quasi-elliptique en (x, ξ) i.e. $(x, \xi) \neq 0$ entraîne $a_0(x, \xi) \neq 0$. ($\det a_0(x, \xi) \neq 0$ pour un système).

Posons : $I(z) = \operatorname{Tr}(A^z)$. On a les résultats :

Théorème 3 : a) I est holomorphe dans le demi-plan :

$$\left\{ \operatorname{Re} z < -\frac{\sum (h_i + k_i)}{m} \right\}$$

b) I a un prolongement méromorphe à \mathbb{C} , ses pôles sont simples et appartiennent à la suite :

$$z_j = \frac{j}{m} - \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^n (h_i + k_i)$$

c)

$$\text{Res}(I, z_j) = \frac{m}{i(2\pi)^{n+1}} \cdot \int_{S_{h,k}} \int_{\Gamma} \lambda^{z_j} b_{j,\lambda}(\sigma) d\lambda d\sigma$$

$$\text{où } S_{h,k} = \left\{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \sum_{i=1}^n |x_i|^{2/h_i} + |\xi_i|^{2/k_i} = 1 \right\}$$

Théorème 4 : I est holomorphe en 0 et :

$$I(0) = \frac{1}{m \cdot (2\pi)^n} \cdot \int_{S_{h,k}} \int_0^{+\infty} b_{\Sigma(h_i+k_i), -t}(\sigma) dt \cdot d\sigma$$

Remarques : (1) les $b_{j,\lambda}$ intervenant dans les théorèmes 3 et 4 sont définis par :

$$\begin{cases} b_{0,\lambda}(x, \xi) = \chi(x, \xi) \cdot (a_0(x, \xi) - \lambda)^{-1} \\ b_{j+1,\lambda}(x, \xi) = (a_0 - \lambda)^{-1} \sum_{\substack{i+k+(\alpha|h+k)=j+1 \\ 0 \leq k \leq j}} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha a_i \cdot D^\alpha b_{k,\lambda} \end{cases}$$

$$\text{où : } \chi(x, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum |x_i|^{2/h_i} + |\xi_i|^{2/k_i} \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \dots \geq 1 ; \chi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}). \end{cases}$$

(2) Compte tenu de la proposition précédente le théorème 4 permet d'exprimer l'indice de A en fonction de son symbole. Dans le cas d'un opérateur elliptique sur une variété compacte cette remarque est à la base de l'une des démonstrations du théorème d'indice de Atiyah et Singer.

§ 3. COMPORTEMENT DES VALEURS PROPRES DU PROBLEME DE DIRICHLET

Dans ce paragraphe on suppose pour simplifier que $a(x, D)$ est différentiel d'ordre $m \geq 1$ et que les hypothèses générales (E_0) , (E_1) , (E_2) sont satisfaites. On suppose de plus :

(H₁) Il existe $c_1, \delta_1 > 0$ telles que :

$$c_1(1 + |x| + |\xi|)^{\delta_1} \leq a_0(x, \xi) \quad \text{pour tout } (x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$$

Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n . Comme dans [4] on construit la réalisation de Dirichlet A_Ω de $a(x, D)$ dans Ω de la manière suivante : A désignant l'unique réalisation dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ de $a(x, D)$, on pose : $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$.

Quitte à faire une translation sur A on peut toujours supposer que $B > 0$. On désigne alors par $V(\Omega)$ le complété de $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme du graphe de $B^{1/2}$. Posons : $\alpha(u, v) = (a(x, D)u, v)_{L_2}$ pour u et $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. On constate que α se prolonge en une forme sesquilinéaire continue et coercive sur $V(\Omega) \times V(\Omega)$. A_Ω est alors l'opérateur engendré par le triplet variationnel : $(\alpha, V(\Omega), L^2(\Omega))$ et le lemme de Lax-Milgramm.

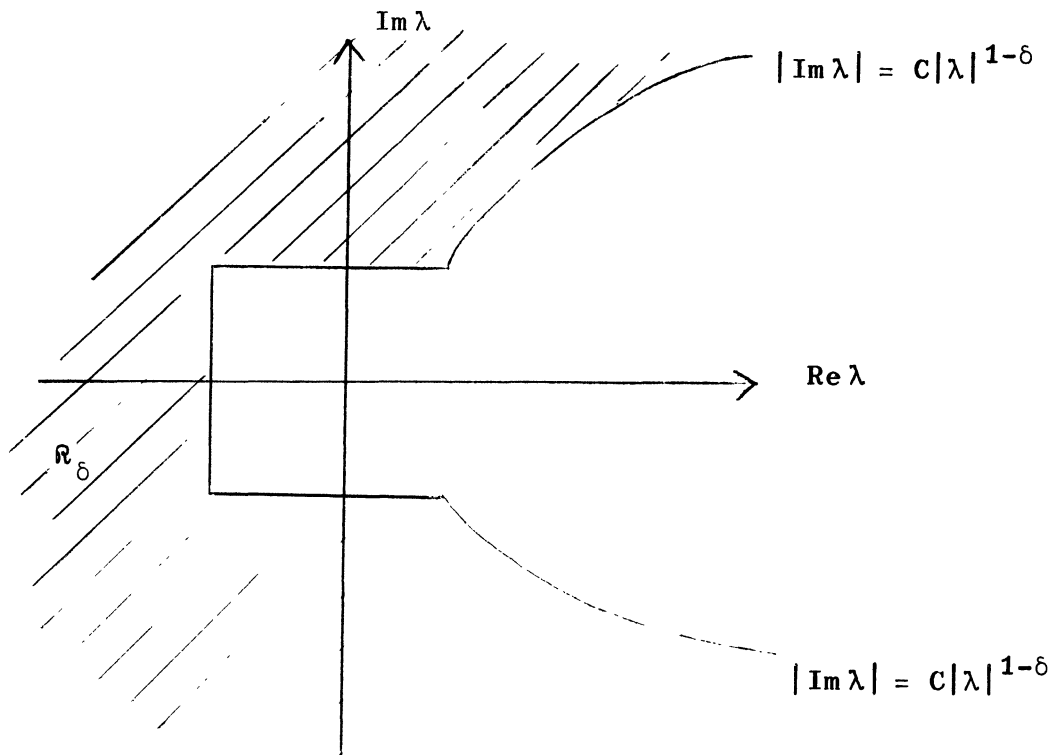
Introduisons le réel :

$$\delta = \sup \{ \rho > 0 : \text{il existe } C > 0 \text{ vérifiant } a_0^\rho \leq C \cdot \phi \cdot \varphi \text{ uniformément sur } \mathbf{R}^{2n} \}$$

Exemple : Si $a(x, \xi)$ est elliptique en (x, ξ) de degré $2m$ alors $\delta = \frac{1}{2m}$.

En général on a : $0 < \delta < \frac{1}{m}$.

Proposition : Il existe une région \mathcal{R}_δ du plan complexe du type :



telle que $(A_\Omega - \lambda)^{-1}$ existe pour tout $\lambda \in \mathcal{R}_\delta$. De plus $(A_\Omega - \lambda)^{-1}$ est compacte.

Soit alors $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ la suite des valeurs propres de A_Ω , rangées suivant les modules croissants, répétées selon leur multiplicité algébrique. Pour étudier le comportement asymptotique de la suite $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ posons : $N(t) = \sum_{\text{Re } \lambda_j \leq t} 1$. Nous allons comparer $N(t)$ à :

$$N_\Omega(t) = (2\pi)^{-n} \int_\Omega dx \int_{a_0(x, \xi) \leq t} d\xi \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Théorème : On a : $N(t) = N_\Omega(t)(1 + o(1))$ $t \rightarrow +\infty$ sous l'une des trois hypothèses suivantes :

(i) $\Omega = \mathbf{R}^n$ et il existe $C, t_0 > 0$ tels que N_Ω soit absolument continue sur $]t_0, \infty[$ et $N'_\Omega(t) \leq C \cdot \frac{N_\Omega(t)}{t}$ pour $t > t_0$.

(ii) (1) Il existe une famille croissante d'ouverts $(\Omega_r)_{r \geq 1}$, $\Omega_r \subset\subset \Omega$ et des constantes $C_1, \eta > 0$ telles que :

$$\int_{\Omega - \Omega_r} dx \int_{a_0(x, \xi) \leq t} d\xi \leq C_1 \cdot r^{-\eta} \cdot N_\Omega(t) \quad \text{pour } t \geq 1 \quad \text{et } r \geq 1$$

(2) Il existe $\alpha \in]0, 1[$; $\gamma, C > 0$ tels que :

$$t'^{-\alpha} N_\Omega(t') \leq \gamma \cdot t^{-\alpha} \cdot N_\Omega(t) \quad \text{pour } t' \geq t \geq C$$

(iii) (1) $\Omega = \mathbf{R}^n - K$, K compact et il existe un voisinage ouvert Ω_1 de K , des constantes $C_1, \eta > 0$ tels que :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{a_0(x, \xi) \leq t} d\xi \leq C_1 \cdot t^{-\eta} \cdot N_\Omega(t) \quad \text{pour } t \geq 1$$

(2) = (2) de (ii).

Remarque : Sous l'hypothèse (i) on a le résultat plus précis : $N(t) = N_\Omega(t)(1 + o(t^{-\theta\delta}))$ pour tout $\theta \in]0, 1/2[$.

Exemples : 1) Si Ω est borné régulier et a_0 uniformément elliptique on retrouve la formule de Garding.

2) Ω borné régulier et a_0 formellement hypoelliptique de

force constante $P(\xi)$ avec $P(\xi) \geq C|\xi|^d$, $d > n$ alors (ii) est vérifiée.

3) Pour $\Omega = \mathbf{R}^n$ (i) est vérifiée dès que $a_0(x, \xi)$ est polynomiale en (x, ξ) . Cela résulte du fait qu'il existe γ réel > 0 , h rationnel > 0 et k entier $0 \leq k \leq 2n-1$ tels que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[t^{-h} \cdot (\text{Log } t)^{-k} \cdot \int_{a_0(x, \xi) \leq t} dx d\xi \right] = \gamma$$

Ce dernier point étant un corollaire du théorème de résolution des singularités de Hironaka.

4) $\Omega = \mathbf{R}^n - K$; $a_0(x, \xi) = P(\xi) + V(x)$ où V vérifie les propriétés de l'exemple a) de l'introduction et P est hypoelliptique à coefficients constants.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Beals : A general calculus of pseudodifferential operators. Duke Math. J. 42 (1975) 1-42.
 - [2] R. Beals : A characterization of pseudodifferential operators and applications. Duke Math. J. 44 (1977).
 - [3] R. Beals : Communication personnelle .
 - [4] H. Kumano-Go and C. Tsutsumi : Complex powers of hypoelliptic pseudodifferential operators with applications. Osaka J. Math. 10 (1973) 147-174.
 - [5] R. T. Seeley : Complex power of an elliptic operator . Singular Intégral Proc. Symposia Pure Math. 10 A.M.S. (1967) 288-307.
 - [6] S. A. Smagin : Fractional powers of an hypoelliptic operator in \mathbf{R}^n . Soviet Math. Dokl. 14 (1973) n° 2. 585-588.
 - [7] V. N. Tulovskii and M. A. Šubin : On asymptotic distribution of eigenvalues of pseudodifferential operators in \mathbf{R}^n . Math. USSR Sbornik 21- (1973) n°4 , 565-583.
-