Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. MÉTIVIER

Une caractérisation des opérateurs elliptiques autoadjoints

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. nº 2, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 7 - 1 9 7 8

UNE CARACTERISATION DES OPERATEURS ELLIPTIQUES AUTOADJOINTS

par G. METIVIER

Exposé n° II

15 Novembre 1977

§ 1. INTRODUCTION

I.1 Notations : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{A}(x,D_x)$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques sur Ω. On introduit des espaces de vecteurs analytiques ♦ de $\mathcal{A}$: on désigne par $a(\bar{\Omega};\mathcal{A})$ l'espace des $u \in L^2(\Omega)$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}^k u \in L^2(\Omega)$ et en outre tels que pour des constantes C et L (dépendant de u), on ait :

$$(1) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \|\mathcal{A}^k u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(mk)!L^k$$

$a(\bar{\Omega};\mathcal{A})$ est muni de sa topologie naturelle d'espace $\mathcal{L}-\mathcal{F}$. On introduit aussi l'espace $a(\Omega;\mathcal{A})$ des distributions u telles que pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω on ait $u_{|\Omega'} \in a(\bar{\Omega}';\mathcal{A})$.

De même si A est une réalisation dans $L^2(\Omega)$ de domaine D(A) de l'opérateur $\mathcal{A}$, on introduit pour $L > 0$ l'espace $D_L(A^\omega)$ des $u \in D(A^\infty) = \bigcap_{k \geq 0} D(A^k)$ tels que

$$\|u\|_{D_L(A^\omega)} = \operatorname{Sup} \frac{\|A^k u\|}{(mk)!L^k} L^2(\Omega) < +\infty$$

On note alors $D(A^\omega)$ la réunion (limite inductive) des $D_L(A^\omega)$ pour $L > 0$.

Enfin on désigne par $a(\Omega)$ [resp. $a(\bar{\Omega})$] les espaces de fonctions analytiques sur Ω [resp. $\bar{\Omega}$].

I.2 Le problème : Utilisant les notations précédentes, il est classique que $a(\Omega) \subset a(\Omega;\mathcal{A})$ quel que soit l'opérateur $\mathcal{A}$. Inversement le théorème des itérés elliptiques ([7]) affirme que si $\mathcal{A}$ est elliptique alors $a(\Omega;\mathcal{A}) \subset a(\Omega)$.

Suivant Baouendi-Goulaouic ([1][5]), on dira que l'opérateur $\mathcal{A}$ a la propriété des itérés dans Ω si et seulement si $a(\Omega;\mathcal{A}) \subset a(\Omega)$ (auquel cas on a en fait $a(\Omega) = a(\Omega;\mathcal{A})$). Le problème que l'on aborde ici est de savoir dans quelle mesure la propriété des itérés caractérise les opérateurs elliptiques. On donne ici une réponse partielle à ce problème :

♦ Pour des raisons qui seront claires par la suite, on prend la liberté d'appeler "vecteurs analytiques" les éléments des espaces définis ici, bien que, plus usuellement, pour un opérateur "abstrait" les vecteurs analytiques soient ceux qui vérifient des estimations du type de (1) avec k! à la place de (mk)!

<u>Théorème 1</u> : Soit $\mathcal{a}$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques sur Ω, formellement autoadjoint. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\mathcal{a}$ est elliptique dans Ω.

ii) $\mathcal{a}$ possède la propriété des itérés dans Ω.

En fait seule l'implication ii) $\Rightarrow$ i) est à prouver.

Le plan de l'exposé est le suivant : au paragraphe 2 nous démontrons le théorème 1 ; au paragraphe 3 nous établissons deux lemmes donnant des inégalités de type Sobolev dans des espaces de fonctions analytiques ; ces lemmes nous sont utiles pour le théorème 1 et aussi pour le théorème 2, énoncé au paragraphe 4, et qui donne une condition nécessaire à la propriété des itérés "jusqu'au bord".

Avant de poursuivre notons le corollaire suivant du théorème 1, qui en ajoutant comme en [2] une variable, donne des exemples non triviaux d'opérateurs non-hypoelliptiques-analytiques :

<u>Corollaire</u> : Soit $\mathcal{a}(x,D_x)$ un opérateur d'ordre m, formellement autoadjoint, non elliptique en un point $x_0 \in \Omega$. Alors l'opérateur $D_t^m + \mathcal{a}(x,D_x)$, dans $\mathbb{R}^{n+1}$ n'est pas hypoelliptique-analytique.

§ 2. PROPRIETE DES ITERES ET FONCTION SPECTRALE

2.1 <u>Une réduction</u> : Montrons d'abord que l'implication ii) $\Rightarrow$ i) du théorème résulte du cas particulier suivant :

<u>Proposition 1</u> : Supposons que l'opérateur $\mathcal{a}$ admette une réalisation positive autoadjointe dans $L^2(\Omega)$, notée $(A,D(A))$. Alors si $D(A^\omega) \subset a(\Omega)$, $\mathcal{a}$ est elliptique dans Ω.

En effet, dans le cas général, on considère l'opérateur $\mathcal{B} = \mathcal{a}^*\mathcal{a} = \mathcal{a}^2$ et $(B,D(B))$ l'extension de Friedrichs de $\mathcal{B}$. Pour $u \in D(B^\infty)$ on a :

$$\|\mathcal{a}^{2k}u\|_{L^2(\Omega)} = \|B^k u\|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\|\mathcal{A}^{2k+1}u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\mathcal{A}\, B^k u\|^2_{L^2(\Omega)} = (B\,B^k u,\ B^k u)_{L^2(\Omega)}$$

et encore :

$$\|A^{2k+1}u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|B^{k+1}u\|_{L^2(\Omega)}\ \|B^k u\|_{L^2(\Omega)}$$

Il en résulte que $D(B^{\omega}) \subset a(\bar{\Omega};\mathcal{A})$ et l'inclusion $a(\Omega\,;\mathcal{A}) \subset a(\Omega)$ implique alors, via la proposition 1, l'ellipticité de $\mathcal{B}$ et donc de $\mathcal{A}$.

Nous nous plaçons dorénavant sous les hypothèses de la proposition 1 et nous notons $E(\lambda)$ la résolution de l'identité de $(A,D(A))$ et $e(\lambda)$ le noyau (distribution) de $E(\lambda)$. On notera $e(\lambda;x,y)$ la valeur en (x,y) de $e(\lambda)$ (lorsque cela aura un sens) et on écrira aussi pour α et $\beta \in \mathbb{N}^n$.

$$e^{\alpha,\beta}(\lambda;x,y) = D^{\alpha}_{x}\, D^{\beta}_{y}\, e(\lambda;x,y)$$

La démonstration de la proposition 1 se fait en deux étapes : on montre d'abord que l'inclusion $D(A^{\omega}) \subset a(\Omega)$ nécessite que la fonction spectrale satisfasse à certaines majorations asymptotiques ; on établit ensuite que ces majorations ne peuvent avoir lieu que si $\mathcal{A}$ est elliptique.

2.2 <u>Première étape</u> : Pour tout $u \in L^2(\Omega)$, $E(\lambda)u \in D(A^{\omega})$ et :

$$\|A^k E(\lambda)u\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda^k \|E(\lambda)u\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{\lambda^{1/m}}.(mk)!\,\|E(\lambda)u\|_{L^2(\Omega)}$$

Autrement dit on a $E(\lambda)u \in D_1(A^{\omega})$ et :

$$\|E(\lambda)u\|_{D_1(A^{\omega})} \leq e^{\lambda^{1/m}}.\,\|E(\lambda)u\|_{L^2(\Omega)} \tag{2}$$

On utilise alors le :

<u>Lemme 1</u> : Soit B un espace de Banach de fonctions de $L^2(\Omega) \cap a(\Omega)$, l'injection de B dans $L^2(\Omega)$ étant continue. Alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes C_o, C_1 et L telles que pour tout $u \in B$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(K)} \leq C_o \|u\|_{L^2(\Omega)} \cdot L^{|\alpha|} \left\{ |\alpha| + C_1 + \mathrm{Log} \frac{\|u\|_B}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right\}^{|\alpha| + \frac{n}{2}}$$

La démonstration de ce lemme est renvoyée au paragraphe 3.

Si l'on a l'inclusion $D(A^\omega) \subset a(\Omega)$, on peut appliquer ce lemme au Banach $D_1(A^\omega)$ et aux fonctions $E(\lambda)u$ de $D_1(A^\omega)$. Compte tenu de (2), on en déduit que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe C_o, C_1 et L tels que pour tout $\lambda > 0$, tout $u \in L^2(\Omega)$, et tout α :

$$\|D^\alpha E(\lambda)u\|_{L^\infty(K)} \leq C_o \|u\|_{L^2(\Omega)} \cdot L^{|\alpha|} \{ |\alpha| + C_1 + \lambda^{1/m} \}^{|\alpha| + n/2}.$$

On en déduit aussitôt une majoration de $\|e^{\alpha,o}(\lambda;x,.)\|_{L^2(\Omega)}$ pour $x \in K$, et compte tenu du fait que $E(\lambda)$ est autoadjoint et que

$$e(\lambda;x,y) = \int_\Omega e(\lambda;x,z)\overline{e(\lambda;y,z)}\,dz$$

on obtient la

<u>Proposition 2</u> : Sous les hypothèses de la proposition 1 $e(\lambda) \in a(\Omega \times \Omega)$ et pour tout compact $K \subset \Omega \times \Omega$, il existe C_o, C_1 et L tels que :

$$\forall \lambda > 0, \quad \forall (x,y) \in K \times K, \quad \forall \alpha, \forall \beta :$$

(3) $$|e^{\alpha,\beta}(\lambda;x,y)| \leq C_o \{ |\alpha + \beta|! + C_1 + \lambda^{(n+|\alpha|+|\beta|)/m} \} L^{|\alpha|+|\beta|}$$

(Bien sûr C_o, C_1 et L ne sont pas nécessairement les mêmes que précédemment !).

2.3 <u>Deuxième étape</u> : Fixons $x_o \in \Omega$; pour $t > 0$ on désigne par h_t l'homothétie dans $\mathbb{R}^n$ de centre x_o et de rapport t ; on note $\Omega_t = h_t(\Omega)$ et H_t désigne l'isométrie de $L^2(\Omega_t)$ sur $L^2(\Omega)$:

$$H_t u = t^{n/2} u \circ h_t$$

Désignant par $\mathcal{A}'(x,D_x)$ la partie principale de $\mathcal{A}$, on note $\hat{\mathcal{A}}$

l'opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$: $\hat{\mathcal{a}}(D_x) = \mathcal{a}'(x_o;D_x)$. On définit aussi les opérateurs $\mathcal{a}_t = t^{-m} h_{t*}\mathcal{a}$ sur Ω_t :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_t) \qquad \mathcal{a}_t\varphi = t^{-m}\{\mathcal{a}(\varphi \circ h_t)\} \circ h_t^{-1} .$$

On a introduit le facteur t^{-m} pour la raison suivante : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_t$ pour t grand et :

$$(4) \qquad \|\mathcal{a}_t\varphi - \hat{\mathcal{a}}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

On transporte aussi A par H_t en posant $D(A_t) = H_t^{-1}D(A)$ et $A_t = t^{-m}H_t^{-1}A\,H_t$. A_t est une réalisation positive autoadjointe de $\mathcal{a}_t$ et sa résolution de l'identité est $E_t(\lambda) = H_t^{-1}E(t^m\lambda)H_t$. Le noyau $e_t(\lambda)$ de $E_t(\lambda)$ est alors :

$$e_t(\lambda;x,y) = t^{-n}\, e(t^m\lambda \,;\, h_t^{-1}x \,,\, h_t^{-1}y) \in a(\Omega_t \times \Omega_t)$$

On tire alors de (3) que pour tout compact $K \subset \Omega$ on a :

$$(5) \qquad \|e_t^{\alpha,\beta}(\lambda)\|_{L^\infty(h_t(K)\times h_t(K))} \leq C_o\{(C_1 + |\alpha+\beta|!)t^{-n-|\alpha|-|\beta|} + \lambda^{(n+|\alpha|+|\beta|)/m}\}\, L^{|\alpha|+|\beta|}$$

D'autre part l'opérateur $\hat{\mathcal{a}}$ est formellement autoadjoint positif (on peut par exemple utiliser (4) pour le voir) ; de plus par transformation de Fourier, on voit que $\hat{\mathcal{a}}$ est essentiellement autoadjoint ; notons alors $\hat{A}$ l'extension positive autoadjointe de $\hat{\mathcal{a}}$ de domaine $D(\hat{A}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) / \hat{\mathcal{a}}u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Utilisant un résultat de perturbation de Kato [6] on montre que pour $\lambda > 0$:

$$(6) \qquad \forall\, f \in L^2_{comp}(\mathbb{R}^n) \qquad \|E_t(\lambda)f - \hat{E}(\lambda)f\|_{L^2(\Omega_t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

$\hat{E}(\lambda)$ désignant la résolution de l'identité de $\hat{A}$; Remarquons que pour $f \in L^2_{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} f \subset \Omega_t$ pour t grand de sorte que (6) a bien un sens.

On tire alors de (6) et du théorème des noyaux de Schwartz que pour tout ouvert ω borné :

$$e_t(\lambda)|_{\omega\times\omega} \xrightarrow[t\mapsto+\infty]{} e(\lambda)|_{\omega\times\omega} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\omega\times\omega)$$

On en déduit alors avec (5) que $\hat{e}(\lambda) \in a(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ et, plus précisément, choisissant dans (5) K voisinage de x_o les $h_t(K)$ contiennent tout borné pour t assez grand, et on obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \qquad |\hat{e}^{\alpha,\beta}(1;x,y)| \leq C_o L^{|\alpha|+|\beta|}$$

Or $\hat{E}(1)$ est l'opérateur de convolution par la distribution T dont la transformée de Fourier est la fonction caractéristique h de l'ensemble $\{\xi \in \mathbb{R}^n / \mathcal{a}'(x_o,\xi) \leq 1\}$. Puisque le noyau de $\hat{E}(1)$ est C^∞ (et même analytique), T est C^∞ (et analytique). Puisque h est ≥ 0 et bornée T est une distribution de type positif (Cf. par exemple L. Schwartz, Théorie des distributions, chap. 7). Par suite on a :

$$\forall \alpha \quad \int_{\mathcal{a}'(x_o,\xi)\leq 1} \xi^{2\alpha}\, d\xi = \hat{e}^{\alpha,\alpha}(1;x_o,x_o) \leq C_o . L^{2|\alpha|} . (2\pi)^n$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \{\int_{\mathcal{a}'(x_o,\xi)\leq 1} |\xi|^{2p} d\xi\}^{1/2p} \leq n L\, (C_o(2\pi)^n)^{1/2p}$$

d'où l'on tire que

$$\sup_{\mathcal{a}'(x_o,\xi)\leq 1} |\xi| \leq n L$$

et l'ellipticité de $\mathcal{a}$ en résulte.

On achèvera donc la démonstration de la proposition 1 (et du théorème 1) en établissant le lemme 1.

§ 3. THEOREMES DE SOBOLEV POUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES

3.1 Avant de démontrer le lemme 1, établissons quelques préliminaires.

Lemme 2 : Soit π un pavé de $\mathbb{R}^n$ et soit B un borné de $a(\bar{\pi})$. Alors il existe $\varepsilon > 0$, C et L tels que pour tout $u \in B$, tout entier $\nu \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_ν de degré $\leq \nu$ pour lequel :

i) $\|P_\nu\|_{L^2(\pi)} \leq \|u\|_{L^2(\pi)}$

ii) $\forall \alpha \quad \|D^\alpha u - D^\alpha P_\nu\|_{L^\infty(\pi)} \leq C\,|\alpha|!\,L^{|\alpha|}\,e^{-\varepsilon\nu}$

Démonstration : On peut supposer que $\pi = (]-1,+1[)^n$. Soit alors

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i^2 - 1)\frac{\partial}{\partial x_i} + 1$$

et soit A la réalisation de $\mathcal{A}$ de domaine

$$D(A) = \{u \in H^1(\pi) \,/\, \mathcal{A}\,u \in L^2(\pi)\} .$$

On suit maintenant [3] [4] et l'on sait que $a(\bar{\pi}) = D(A^{\omega})$, algébriquement et topologiquement. Notant $E(\lambda)$ la résolution de l'identité de A, on voit donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ et C tels que :

$$\forall\, u \in B \qquad \int_0^\infty e^{2\varepsilon\sqrt{\lambda}}\, d(E(\lambda)u, u) \leq C$$

D'où l'on tire :

$$\forall u \in B ,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\|A^k u - A^k E(\lambda)u\|_{L^2(\pi)} \leq C(2k)!\left(\frac{4}{\varepsilon^2}\right)^k e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\lambda}}$$

Utilisant à nouveau l'égalité $D(A^{\omega}) = a(\bar{\pi})$ on obtient ii) en remarquant que $E(\lambda)u$ est un polynôme de degré inférieur à Cte. $\sqrt{\lambda}$

i) résulte trivialement du choix $P_\nu = E(\lambda)u$.

Lemme 3 : Soit π un pavé de $\mathbb{R}^n$ de centre x_0. Il existe des constantes C_0 et L_0 telles que pour tout polynôme P_ν de degré ν on ait :

$$\forall \alpha \qquad |D^\alpha P_\nu(x_0)| \leq C_0 (L_0 \nu)^{|\alpha| + \frac{n}{2}} \|P_\nu\|_{L^2(\pi)}$$

Démonstration : Soit $\pi' \subset\subset \pi$ un pavé de centre x_o. Il résulte de Timam [9] que l'on a les estimations :

(9) $$|D^\alpha P_\nu(x_o)| \leq C(L\nu)^{|\alpha|} \|P_\nu\|_{L^\infty(\pi')} .$$

Considérant à nouveau le cas où $\pi = (]-1, +1[)^n$ et l'opérateur A, on tire de l'injection $D(A^n) \hookrightarrow H^{2n}_{loc}$ et de l'inégalité de Sobolev :

$$\|P_\nu\|_{L^\infty(\pi')} \leq C' \|A^n P_\nu\|^{1/4}_{L^2(\pi)} \cdot \|P_\nu\|^{3/4}_{L^2(\pi)} .$$

Or P_ν étant un polynôme de degré $\leq \nu$ on a :

$$\|A^n P_\nu\|_{L^2(\pi)} \leq C'' \nu^{2n} \|P_\nu\|_{L^2(\pi)}$$

et le lemme 3 suit.

3.2 Démonstration du lemme 1.

Soit B un espace de Banach de fonctions de $L^2(\Omega) \cap a(\Omega)$. Soit K un compact inclus dans Ω ; fixons Ω_1 ouvert relativement compact dans Ω, Ω_1 contenant K, et $\delta > 0$ tel que pour tout $a \in K$ le pavé π_a de centre a et de côté δ soit inclus dans Ω_1. L'injection de B dans $L^2(\Omega)$ étant continue, on tire du théorème du graphe fermé que l'injection de B dans $a(\Omega)$ est continue. Par suite, il existe C et L tels que :

(7) $$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \forall u \in B \quad \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C|\alpha|!\, L^{|\alpha|} \|u\|_B$$

On applique les lemmes 2 et 3 sur les pavés π_a, en remarquant que les constantes qui y apparaissent peuvent être choisies par translation et grâce à (7) et aux inclusions $\pi_a \subset \Omega_1$, indépendantes de $a \in K$. On obtient alors que pour des constantes C_1, L_1 et $\varepsilon > 0$ on a :

$$\forall u \in B,\ \forall \nu \in \mathbb{N},\ \forall a \in K,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n :$$

(8) $$|D^\alpha u(a)| \leq C_1 L_1^{|\alpha|} \{ |\alpha|!\, e^{-\varepsilon\nu} \|u\|_B + \nu^{|\alpha| + \frac{n}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)} \} .$$

On choisit alors $\nu = \left[\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Log} C_2 \frac{\|u\|_B}{\|u\|_{L^2(\Omega)}}\right] + 1$ (où $[\xi]$ désigne la partie entière du réel ξ, et où C_2 est choisie de sorte que $C_2\|u\|_B \geq \|u\|_{L^2(\Omega)}$). On a alors

$$e^{-\varepsilon\nu}\|u\|_B \leq \frac{1}{C_2}\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

et le lemme 1 découle aussitôt de (8).

§ 3. UNE INEGALITE JUSQU'AU BORD

On établit d'abord quelques lemmes préliminaires.

Lemme 4 : Soient $T > T' > 0$; il existe C_o et L_o telles que pour tout polynôme P d'une variable t, de degré $\leq \nu$ on ait :

$$\forall t \in \left]0,T'\right], \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

$$|D_t^p P(t)| \leq C_o L_o^p \|P\|_{L^2(0,T)} . \operatorname{Inf}\left\{\left(\frac{\nu}{\sqrt{t}}\right)^{p+\frac{1}{2}}, \frac{\nu^{2p+1}}{p!}\right\}$$

Démonstration : Dans Timam [9] est établie l'inégalité :

$$\|D^p P\|_{L^\infty(0,T)} \leq C_o L_o^p \frac{\nu^{2p+1}}{p!} \|P\|_{L^2(0,T)} .$$

Il nous suffit donc de montrer que pour $t < T'$:

$$(10) \qquad |D_t^p P(t)| \leq C_o L_o^p \left(\frac{\nu}{\sqrt{t}}\right)^{p+1/2} \|P\|_{L^2(0,T)} .$$

Pour cela on reprend l'idée de [4] et on introduit le polynôme $Q(x,y)$ de deux variables : $Q(x,y) = P(x^2 + y^2)$. Q est de degré $\leq 2\nu$ et

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) Q(x,y) = 4(\mathcal{L}P)(x^2+y^2)$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}\, t \frac{\partial}{\partial t}$.

On tire des estimations "à l'intérieur" pour Q ([9], cf. aussi (9)) que l'on a :

(11) $\quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \|\mathcal{L}^k P\|_{L^\infty(0,T')} \leq C_1 L_1^k \ \nu^{2k} \|P\|_{L^\infty(0,T)}$

Notons A_p l'opérateur $t^p(\frac{d}{dt})^{2p}$. On a :

$$A_{p+1} = A_p[\mathcal{L} - (2p+1)\frac{d}{dt}] .$$

Utilisant le fait que

$$(\mathcal{L}^k \frac{du}{dt})(t) = \frac{1}{t^{k+1}} \int_o^t s^k(\mathcal{L}^{k+1}u)(s)ds$$

et que :

$$\|\mathcal{L}^k \frac{du}{dt}\|_{L^\infty(0,T')} \leq \frac{1}{k+1} \| \mathcal{L}^{k+1}u \|_{L^\infty(0,T')}$$

on vérifie par récurrence sur k que

$$\|A_k u\|_{L^\infty(0,T')} \leq 3^k \| \mathcal{L}^k u\|_{L^\infty(0,T')}$$

On en tire alors avec (11) que :

$$\|t^k D^{2k} p\|_{L^\infty(0,T')} \leq C_2 L_2^k \ \nu^{2k} \|P\|_{L^\infty(0,T)}$$

et encore, que pour $T' < T'' < T$, il existe $a_o > 0$, C_3 et L_3 tels que pour tout $a < a_o$, tout polynôme P de degré $\leq \nu$ et tout entier k :

(12) $\qquad a^{k/2} \|D^k P\|_{L^\infty(2a,T')} \leq C_3 L_3^p \nu^k \|P\|_{L^\infty(a,T'')}$

Considérant à nouveau l'opérateur de Legendre $\mathcal{a}$:

$$\mathcal{a} = - \frac{d}{dt} t \ (T-t) \frac{d}{dt} + 1$$

on sait que pour $u \in D(A) = \{u \in H^1(0,T) / \mathcal{A}u \in L^2(0,T)\}$

$$\| tD^2 u\|_{L^2(0,T)} \leq C_4 \|\mathcal{A} u\|_{L^2(0,T)}$$

et

$$\|u\|_{H^2(a,T'')} \leq C_5 \cdot a^{-1} \|\mathcal{A} u\|_{L^2(0,T)}$$

On en déduit que

$$\|P\|_{L^\infty(a,T'')} \leq C_6 \|P\|^{1/4}_{H^2(a,T'')} \|P\|^{3/4}_{L^2(0,T)} \leq$$

$$\leq C_7\, a^{-1/4} . (\nu^2)^{1/4} \|P\|_{L^2(0,T)}$$

ce qui avec (12) donne (10) pour $t < a_0/2$. Pour $t > a_0/2$, il suffit d'appliquer le lemme 3, et on a ainsi obtenu (10) dans tous les cas, et le lemme 4 est démontré.

On déduit immédiatement des lemmes 3 et 4

<u>Lemme 5</u> : Soit π' un pavé de $\mathbb{R}^{n-1}$ de centre y_0 ; soient $T > T' > 0$. On note π le pavé $]0,T[\times \pi'$ de $\mathbb{R}^n$.

Il existe des constantes C et L telles que pour tout polynôme P_ν de degré ν, tout $\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$, tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0,T']$ on ait :

$$|D_t^p D_y^{\alpha'} P(t,y_0)| \leq C. \|P\|_{L^2(\pi)} .(L\nu)^{|\alpha'|+p+\frac{n}{2}} . \mathrm{Inf}\,\{(\sqrt{t})^{-p-\frac{1}{2}}, \frac{\nu^{p+\frac{1}{2}}}{p!}\}$$

Pour énoncer notre théorème de Sobolev "jusqu'au bord" nous prenons maintenant quelques notations :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, qui soit une variété à bord analytique. On suppose donnée une carte locale au voisinage d'un point $x_0 \in \partial\Omega$, c'est à dire, un ouvert $\mathcal{O}$ contenant x_0, un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ contenant 0, et un difféomorphisme analytique θ de U sur $\mathcal{O}$ tel que $\theta(0) = x_0$ et $\theta(U_+) = \mathcal{O} \cap \Omega$ si U_+ désigne l'ensemble $\{(t,y) \in U / t > 0\}$.

Notons T_j $(j = 1,\dots,n-1)$ et N les opérateurs images par θ de D_{y_j} $(j = 1,\dots,n-1)$ et D_t. Avec une notation évidente, on a alors :

$$D_t^p . D_y^{\alpha'} (u \circ \theta) = (N^p T^{\alpha'} . u) \circ \theta .$$

Enfin on notera $a(\bar{\Omega} \cap \mathcal{O})$ les fonctions de $a(\Omega \cap \mathcal{O})$ analytiques jusqu'à $\partial\Omega \cap \mathcal{O}$, i.e. l'espace des fonctions u de $a(\Omega \cap \mathcal{O})$ telles que pour tout $0_1 \subset\subset \mathcal{O}$, on ait $u_{|\Omega \cap 0_1} \in a(\overline{\Omega \cap 0_1})$. On peut alors énoncer :

<u>Lemme 6</u> : Soit $B \hookrightarrow L^2(\Omega)$ un espace de Banach, tel que pour tout $u \in B$, $u_{|\Omega\cap\mathcal{O}} \in a(\bar{\Omega} \cap \mathcal{O})$. Soit $0_1 \subset\subset \mathcal{O}$. Alors il existe C_o, C_1 et L telles que pour tous $u \in B$, $\alpha = (p,\alpha') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{n-1}$ et $x \in 0_1 \cap \Omega$, on ait :

$$(13) \qquad |N^p T^{\alpha'} u(x)| \leq C_o \|u\|_{L^2(\Omega)} \cdot L^{|\alpha|} . \{ |\alpha|! + \rho^{|\alpha| + n/2} . \operatorname{Inf} \{ (\sqrt{t})^{-p+\frac{1}{2}}, \frac{\rho^{p+\frac{1}{2}}}{p!} \} \}$$

où $\rho = \operatorname{Log} C_1 \dfrac{\|u\|_B}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \geq 0$ et où $t = t(x)$ est la première composante de $\theta^{-1}(x) \in U_+$.

<u>Démonstration</u> : Fixons 0_2 tel que $0_1 \subset\subset 0_2 \subset\subset \mathcal{O}$; notant $U_i = \theta^{-1}(0_i)$ $(i = 1,2)$ soit δ tel que pour tout $a \in U_1$ le pavé π_a de centre a et de côté δ soit inclus dans U_2.

Lorsque $t(a) \geq \delta$ (13) résulte du lemme 1. Notant $v = u \circ \theta$, il nous suffit de majorer $|D^\alpha u(a)|$ par le membre de droite de (13), lorsque $t(a) \leq \delta$.

Lorsque $t(a) \leq \delta$, on peut appliquer les lemmes 2 et 5 sur les pavés $\pi'_a = \pi_a \cap \{t > 0\}$. On obtient alors, comme pour le lemme 1 les estimations :

$$|D^\alpha u(a)| \leq C L^{|\alpha|} \{ |\alpha|! \, \|u\|_B \, e^{-\varepsilon\nu} + \frac{\nu^{|\alpha| + p + \frac{n+1}{2}}}{p!} \|u\|_{L^2(\Omega)} \}$$

$$|D^\alpha u(a)| \leq C L^{|\alpha|} \{ |\alpha|! \, \|u\|_B \, e^{-\varepsilon\nu} + \frac{\nu^{|\alpha| + \frac{n}{2}}}{(\sqrt{t})^{p+1/2}} \|u\|_{L^2(\Omega)} \}$$

Choisissant $\nu = [\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Log} C_2 \dfrac{\|u\|_B}{\|u\|_{L^2(\Omega)}}] + 1$, on obtient le lemme 6.

§ 4. PROPRIETE DES ITERES JUSQU'AU BORD

Il est connu que les bonnes réalisations d'opérateurs elliptiques, et aussi de certains opérateurs elliptiques dégénérés, possèdent une propriété des itérés jusqu'au bord (cf. [8], [1?]) i.e. :

$$D(A^{\omega}) \subset a(\bar{\Omega}) \tag{14}$$

Toujours dans le cadre des opérateurs autoadjoints, nous donnons maintenant une condition nécessaire à l'inclusion (14), indiquant (pour la partie principale) le type maximum de dégénérescence que l'on peut avoir sur $\partial\Omega$.

Reprenons les notations de la fin du paragraphe III : Ω est une variété à bord analytique, θ un difféomorphisme de $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ (U contenant 0) sur l'ouvert $\mathcal{O}$, tel que $\theta(0) = x_0 \in \partial\Omega$, et $\theta(U_+) = \Omega \cap \mathcal{O}$, si $U_+ = \{(t,y) \in U / t > 0\}$.

On se donne une réalisation $(A, D(A))$ positive autoadjointe d'un opérateur $\mathcal{A}$, d'ordre m, à coefficients analytiques. On notera $(t,y) = \theta^{-1}(x)$ les coordonnées locales de $x \in \mathcal{O}$, et $(\tau,\eta) = {}^t d\theta(t,y).\xi$ les coordonnées locales de $\xi \in T_x\mathcal{O}$.

<u>Théorème 2</u> : Sous les hypothèses précédentes, on suppose que :

$$\forall\, u \in D(A^{\omega}) \qquad u_{|\mathcal{O}\cap\Omega} \in a(\bar{\Omega} \cap \mathcal{O})$$

Alors $\mathcal{A}$ est elliptique sur $\Omega \cap \mathcal{O}$ et de plus pour tout compact $K \subset \mathcal{O}$, il existe $\varepsilon > 0$, tel que dans la carte θ on ait :

$$\forall\, x \in K \cap \Omega \quad \forall\, \xi \in T_x\mathcal{O} \qquad \mathcal{A}'(x,\xi) \geq \varepsilon(\sqrt{t}\,|\tau| + |\eta|)^m$$

$\mathcal{A}'(x,\xi)$ étant le symbole principal de $\mathcal{A}$.

<u>Démonstration</u> : On modifie légèrement les notations du paragraphe 3 en notant, pour $\alpha = (p,\alpha') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{n-1}$, $\tau^{\alpha} = \theta_*(D_t^p\, D_y^{\alpha'})$.

Soit $e(\lambda)$ la fonction spectrale de A. Fixons $O_1 \subset\subset \mathcal{O}$ tel que $O_1 \supset K$. On déduit alors du lemme 6 que pour $(x,y) \in (O_1 \cap \Omega) \times (O_1 \cap \Omega)$, pour $\alpha = (p,\alpha')$ et $\beta = (q,\beta')$, on a des estimations du type :

$$|e^{\alpha,\beta}(\lambda;x,y)| \leq C.L^{|\alpha|+|\beta|}.\{(|\alpha|+|\beta|)! + \lambda^{(n+|\alpha|+|\beta|)/m}.\sqrt{t(x,y)}^{-(p+q+1)}\}$$

où $\quad t(x,y) = \mathrm{Inf}(t(x),t(y)) \quad$ et $\quad e^{\alpha,\beta}(\lambda) = \tau_x^{\alpha}\tau_y^{\beta}\,e(\lambda)$.

Fixons $x_o \in K$ et faisons agir les homothéties h_ρ de centre x_o et de rapport ρ ; soit $A_\rho = \rho^{-m} H_\rho^{-1} A\, H_\rho$, comme pour le théorème 1. Notons $e_\rho(\lambda)$ la fonction spectrale de A_ρ. Notons enfin $\tau_\rho^{\alpha} = \rho^{-|\alpha|}(h_\rho)_* \tau^{\alpha}$. On tire alors de (15)

$$(16) \qquad |e_\rho^{\alpha,\beta}(\lambda;x,y)| \leq C\,L^{|\alpha|+|\beta|}.\{(|\alpha|+|\beta|)!\,\rho^{-(n+|\alpha|+|\beta|)} + \lambda^{(n+|\alpha|+|\beta|)/m}.\sqrt{t_\rho(x,y)}^{-(p+q+1)}\}$$

où $t_\rho(x,y) = t(h_\rho^{-1}x\,,\,h_\rho^{-1}x)$, où $e_\rho^{\alpha,\beta} = (\tau_\rho^{\alpha} \otimes \tau_\rho^{\beta})(e_\rho)$ et où ρ est choisi assez grand pour que $h_\rho^{-1}x$ et $h_\rho^{-1}y$ soient dans Ω_1.

Comme pour le théorème 1, on montre la convergence de $e_\rho(\lambda)$ vers $\hat{e}(\lambda)$, dans $\mathcal{D}'$, $\hat{e}(\lambda)$ étant la fonction spectrale de l'opérateur $\hat{\mathcal{A}}(D_x) = \mathcal{A}'(x_o,D_x)$. Avec (16), on en déduit alors la convergence de $e_\rho(\lambda)$ vers $\hat{e}(\lambda)$ dans C^∞.

Notant enfin $\hat{\tau}^{\alpha}(D_x) = (\tau^{\alpha})'(x_o,D_x)$ $\;(\tau^{\alpha})'$ étant la partie principale (d'ordre $|\alpha|$) de τ^{α}, on a aussi la convergence de $e_\rho^{\alpha,\beta}(\lambda)$ vers $\hat{e}^{\alpha,\beta}(\lambda) = \hat{\tau}_x^{\alpha}\,\hat{\tau}_y^{\beta}\,\hat{e}(\lambda)$ et remarquant que $t_\rho(x,y) \mapsto t(x_o)$, on tire finalement de (16) :

$$|\hat{e}^{\alpha,\beta}(1;x,y)| \leq C.L^{|\alpha|+|\beta|}\; t(x_o)^{-(p+q+1)/2}\,.$$

On en déduit alors, comme au théorème 1 :

$$\int_{\mathcal{A}'(x_o;\xi)\leq 1} \hat{\tau}^{\alpha}(\xi)^2\, d\xi \leq C\, L^{2|\alpha|}\; t(x_o)^{-(p+1/2)}$$

Notant $a(t,y;\tau,\eta)$ le symbole principal de $\mathcal{A}$ dans la carte θ on arrive alors aux estimations :

$$\int_{a(t,y,\tau,\eta} \tau^{2p}|\eta|^{2q}\, d\tau\, d\eta \leq C\,L_1^{p+q}\,.\,t^{-(p+1/2)}$$

Posant $\tau = \tau'/\sqrt{t}$ on a aussi :

$$\{\int_{a(t,y,\frac{\tau}{\sqrt{t}},\eta)\leq 1} (\tau^2+|\eta|^2)^p\, d\tau\, d\eta\}^{1/2\,p} \leq C^{1/2p}\, L_2$$

D'où il vient que :

$$\sup_{a(t,y;\frac{\tau}{\sqrt{t}},\eta)\leq 1} \{|\tau|^2+|\eta|^2\}^{1/2} \leq L_2$$

et enfin, par homogénéité de $a(t,y;.,.)$:

$$a(t,y;\frac{\tau}{\sqrt{t}};\eta) \geq \frac{1}{L_2}(|\tau|+|\eta|)^m$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; J. of Funct. Anal. 9 (1972) pp.208-248.

[2] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Non analytic hypoellipticity for some degenerate operators ; Bull. Amer. Math. Soc., 78 (1972), pp.483.

[3] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Approximation of analytic functions ; Trans. Amer. Math. Soc., 1973.

[4] M. S. Baouendi, C. Goulaouic et B. Hanouzet : Caractérisations de classes de fonctions C^∞ et analytiques...; J. Math. pures et appl., 52 (1973) p.115-144.

[5] C. Goulaouic : Valeurs propres de problèmes aux limites irréguliers ; C. I. M. E. , 1973.

[6] T. Kato : Perturbation theory for linear operators ; Springer Verlag, 1966.

[7] T. Kotake et M. S. Narasinham : Fractional powers of a linear elliptic operator; Bull. Soc. Math. France, 90 (1962), p.449-471.

[8] J. L. Lions et E. Magenes : Problèmes aux limites non homogènes, t.3; Dunod, 1968.

[9] A. F. Timam : Theory of approximation of function of a real variable ; Pergamon Press, 1963.
