

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. LASCAR

Le noyau de l'équation des ondes sur une variété riemannienne compacte comme intégrale de chemins

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 1,
p. 1-12*

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978___A2_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 7 - 1 9 7 8

LE NOYAU DE L'EQUATION DES ONDES SUR UNE VARIETE
RIEMANNIENNE COMPACTE COMME INTEGRALE DE CHEMINS

par B. LASCAR

Exposé n° I

15 Novembre 1977

Soit M une variété riemannienne compacte, la solution du problème de Cauchy pour la demi-équation des ondes :

$$\begin{cases} (1/i \partial/\partial t + \Delta^{1/2})u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

est donnée par un noyau $e(t,x,y)$ que la théorie d'Hörmander-Duistermaat (voir également [3]) permet de décrire comme un élément de $I^{-1/4}(M \times M \times \mathbb{R}, \Lambda)$ où Λ est la variété Lagrangienne associée au flot géodésique.

Le problème est d'obtenir une représentation aussi géométrique que possible de $e(t,x,y)$ liée aux géodésiques de M . Pour ce faire Y. Colin de Verdière dans [2] propose la fonction phase $\varphi(\theta, \gamma, t) = \theta(E^{1/2}(\gamma) - t)$ définie sur $\mathbb{R}_*^+ \times \Omega(M) \times \mathbb{R}_*^+$; où $\Omega(M)$ est l'espace des chemins de classe H^1 sur M , $E(\gamma)$ étant l'énergie; qui est non dégénérée à un sens raisonnable qu'il propose. Le calcul des variations montre facilement que $\Lambda_\varphi \cong \Lambda_{\mathbb{R}_*^+}$.

L'ennui est qu'alors on est sur un fibré de dimension infinie; et Colin de Verdière montre comment on peut se réduire à la dimension finie en étudiant $e(t,x,y)|_{]0,T[}$ où $T < +\infty$ est arbitraire. L'objet de notre travail est ainsi de donner un sens précis à une formule :

$$e(t,x,y)|_{]0,+\infty[} = \int_0^{+\infty} d\theta \int_{\Omega_{x,y}(M)} e^{i\theta(E^{1/2}(\gamma)-t)} a(\theta,t,d\gamma)$$

$\Omega_{x,y}(M)$ est l'espace des chemins d'origine $x \in M$ et d'extrémité $y \in M$; on verra que $\Psi(\theta,t) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$ $a(\theta,t,d\gamma)$ est une mesure bornée sur $\Omega_{x,y}(M)$ que nous décrivons plus précisément.

Un problème du même genre est posé par l'équation de Schrödinger avec un terme de potentiel en physique théorique et des formules comme celle ci-dessus s'appellent des intégrales de Feynmann; on pourra trouver dans S. Albeverio et R. Höegh-Krohn [1] une approche rigoureuse de ce problème au moins dans le cas où $M = \mathbb{R}^d$ et où $V(x)$ est un potentiel qui s'exprime comme la transformée de Fourier d'une mesure à décroissance exponentielle.

On peut noter que notre approche est radicalement différente de celle de [1]. Nous aurons besoin d'un théorème de phase stationnaire en dimension infinie, ceci fait ainsi l'objet de la 1ere partie. Nous appliquons ensuite ce résultat à la construction du noyau de l'équation des ondes.

§ 1. UN THEOREME DE PHASE STATIONNAIRE SUR UN ESPACE DE HILBERT.

Soit $E' \xrightarrow{i'} X' \simeq X \xrightarrow{i} E$ (i, X, E) un triplet d'espaces hilbertiens réels séparables, i injective, de Hilbert-Schmidt et à image dense, X est identifié à son dual, E' est ainsi un sous-espace de E ; la dualité (x, y) entre E' et E prolonge le produit scalaire (x, y) de X . La norme de X est $|x|$, celle de E $\|x\|$, celle de E' $\|x\|'$. On note ν_t la mesure de Radon sur E image par i de la mesure cylindrique gaussienne de variance t ; on note ν'_t la mesure sur $X' \simeq X$ obtenue en radonifiant dans X' la mesure cylindrique gaussienne de E' .

Décomposant $i = \ell \circ j$ où $j : X \rightarrow X$ est de Hilbert-Schmidt symétrique positive, ℓ est isométrique $X \rightarrow E$; on obtient ainsi une base hilbertienne dans X $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteur propre de j ; $a_n > 0$;

$$j(e_n) = 1/a_n e_n; \sum_n 1/a_n^2 < +\infty; \|x\|^2 = \sum_n x_n^2/a_n^2 \text{ si } |x|^2 = \sum_n |x_n|^2. \text{ Si } E \text{ et } F \text{ sont deux espaces de Banach, si } E \text{ est réflexif et si } E' \text{ vérifie la propriété d'approximation métrique on peut identifier } E' \hat{\otimes} F \text{ avec les applications nucléaires de } E \rightarrow F.$$

On notera $C_b^\infty(E, F)$ l'espace des fonctions indéfiniment Fréchet différentiables dont les dérivées d'ordre quelconque sont uniformément bornées.

Le but de ce paragraphe est d'étudier le comportement asymptotique d'intégrales de la forme

$$I(\theta) = \int_E e^{-i\theta/2(A\alpha, \alpha)} a(\alpha, \theta) d\nu(\alpha)$$

où A est une forme quadratique définie positive sur E , ou encore $A : E \rightarrow E'$; $a(\alpha, \theta)$ devant vérifier des hypothèses appropriées. On note qu'en dimension finie on sait que $I(\theta) \sim \theta^{-n/2} \sum_j a_j \theta^{-j+m}$ donc " $I(\theta)$ doit être d'ordre $-\infty$ en dimension ∞ ".

Nous voulons faire remarquer que notre résultat est tout à fait distinct de celui de Albeverio et Hoëgh-Krohn [1] puisque ceux-ci étudient des formes : $\int e^{i\theta|\alpha|^2/2} a(\alpha) d\alpha$ qui est une écriture formelle pour $\int e^{-i\theta^{-1}|\alpha|^2/2} d\mu(\alpha)$ si $\mathfrak{F}(\mu) = a$, μ est une mesure ainsi $\int e^{-i\theta^{-1}|\alpha|^2/2} d\mu(\alpha) \sim 0(1)$ qd $\theta \rightarrow \infty$ alors qu'en dimension finie on a : $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\theta|\alpha|^2/2} a(\alpha) d\alpha = (2\pi\theta/i)^{-n/2} \int e^{-i\theta^{-1}|\alpha|^2/2} \hat{a}(\alpha) d\alpha$ et il y a donc déjà $\theta^{n/2}$ de différence.

Les hypothèses sur $a(\alpha, \theta)$ sont exprimées dans la définition :

Définition 1.1 :

$$T^{m, \rho}(E \times \mathbb{R}^+) = \{ a(\alpha, \theta) \in C^\infty(E \times \mathbb{R}^+) , \sup_{\theta \in \mathbb{R}^+} \|\partial_\theta^p D_\alpha^j a(\alpha, \theta) \cdot h\|_0 \leq C \|h\|^j (1 + |\theta|)^{m-p+\rho} j/2 \\ \forall h \in E, \theta \in \mathbb{R}^+, (j, p) \in \mathbb{N}^2 \}.$$

On a noté pour $f \in C_b^0(E)$ qui est la transformée de Fourier d'une mesure cylindrique μ sur E' $\|f(\alpha)\|_0 = \sup_{i \in I} \|\mu_i\|$ où $\mu_i = \mathcal{F}^{-1}(f(\alpha)|_{E_i})$ μ_i est une mesure bornée sur $E'/E_i^0 \simeq E_i'$, E_i décrit les sous-espaces de dimension finie de E .

Dans ces conditions l'image par i' de la mesure $\mu(\theta, d\eta)$ est une mesure de Radon bornée sur X qui a des moments d'ordre quelconque.

Remarque : 1) Lorsque $\dim E < +\infty$, si $a(\alpha, \theta)$ est à support compact en α et $a \in S_{1, \rho/2}^m \Rightarrow a \in T^{m, \rho}$.

2) Lorsque $\dim E = +\infty$, la condition $a(\alpha, \theta) \in T^{m, \rho}$ implique essentiellement que $a(\alpha, \theta)$ n'est pas à support borné ; il est prouvé dans [9] que $a(\alpha) = \varphi(\|\alpha\|^2) \|a(\alpha)\|_0 < +\infty \Rightarrow \varphi$ analytique.

Ceci va se révéler très gênant pour isoler le comportement au voisinage des points critiques mais on va étudier ce qui se passe dans $T^{m, \rho}$.

La méthode consiste à faire un Parseval dans $I(\theta)$ avec d'une part $a(\alpha, \theta)$ et d'autre part $e^{-i\theta/2(A\alpha, \alpha)} \nu$. On obtient

$$I(\theta) = (\det(I + i\theta A)^{-1/2}) \int_X \exp(-1/2((I + i\theta A)^{-1}\eta, \eta)) \mu(\theta, d\eta)$$

$\mu(\theta, d\eta) = \mathcal{F}^{-1}(a(\alpha, \theta))$, $\det(I + i\theta A)^{-1/2}$ est le déterminant de Fredholm de l'application nucléaire dans $X(I + i\theta(i'A_i))^{-1/2}$, $I + i\theta A$ est inversible dans $\mathcal{L}(X^c)$. La justification de ce point demande un peu de soin car lorsque l'on écrit

$$I(\theta) = \int_E e^{-i\frac{\theta}{2}(A\alpha, \alpha)} \left(\int_X e^{-i\eta \cdot \alpha} \mu(\theta, d\eta) \right) d\nu(\alpha) \quad \text{le } \eta \cdot \alpha \text{ de la 2ème intégrale}$$

est défini seulement comme une variable aléatoire $|\mu|(\theta, d\eta)$ mesurable obtenue en prolongeant par continuité à E l'application $X \rightarrow L^p_{|\mu|}(\theta, d\eta)(X)$ qui à $\alpha \in X$ associe la fonction $\eta \rightarrow (\alpha, \eta)$. C'est une difficulté que l'on trouve fréquemment en dimension infinie ; il faut considérer des prolongements $\nu \otimes |\mu|(\theta, d\eta)$ mesurables convenables.

De toutes façons on a vu que $I(\theta)$ est d'ordre $-\infty$ en θ et on introduit ainsi $f^{-1}(\theta) = \det(I + i\theta A)^{-1/2} = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + i\theta \lambda_j)^{-1/2}$ si $\lambda_j \in \mathbb{R}^+$ sont les valeurs propres dans X de $i'A_i$. Développant $\exp(-1/2((I + i\theta A)^{-1}\eta, \eta))$

on est amené à estimer des intégrales de la forme.

Lemme 1 : Soit L_1, \dots, L_q des opérateurs de $\mathcal{L}(X^c)$ auxquels on associe par $iL_j i' = \hat{L}_j$ des opérateurs de $E^c \hat{\otimes}_{\pi} E^c$ on a l'inégalité :

$$\int_{X'} |(L_1 \eta, \eta)| \dots |(L_q \eta, \eta)| |\mu|(\theta, d\eta) \leq C \|D_{\alpha}^{2q} a(\alpha, \theta)\|_0 \|\hat{L}_1\|_{E^c \hat{\otimes}_{\pi} E^c} \dots \|\hat{L}_q\|_{E^c \hat{\otimes}_{\pi} E^c}$$

La preuve est simple mais ce lemme est très utile en dimension infinie car il permet si μ est gaussienne par exemple d'associer aux opérateurs de Hilbert-Schmidt dans X des fonctions de $L^p_{\nu}(E, X)$.

Lemme 2 : 1) $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \|(I + i\theta A)^{-1}\|_{E \hat{\otimes}_{\pi} E} = 0$ quand $\theta \rightarrow \infty$

2) Mais si E est nucléaire on a $\|(I + i\theta A)^{-1}\|_{E \hat{\otimes}_{\pi} E} \leq C(1 + |\theta|)^{-1/2}$

Preuve : 1) Il est facile de voir que l'hypothèse sur A entraîne

$$\|(I + i\theta A)^{-1}\|_{E \hat{\otimes}_{\pi} E} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{(1 + \theta^2 \lambda_j^2)^{1/2}} \quad \text{car } (I + i\theta A)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} (1 + i\theta \lambda_j)^{-1} \varepsilon_j \otimes \varepsilon_j$$

où les ε_j sont orthonormés dans X .

2) Si $X \hookrightarrow E$ est nucléaire $\|(I + i\theta A)^{-1}\|_{E \hat{\otimes}_{\pi} E} \leq C \|(I + i\theta A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, E)}$

$$\text{et } \|(I + i\theta A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, E)} \leq \left(\sup_j \frac{\lambda_j}{1 + \theta^2 \lambda_j^2} \right)^{1/2} \quad \text{car } A \text{ est défini } \underline{\text{positif}} \text{ dans } E$$

On a donc :

Théorème 1 : On suppose que $X \xrightarrow{i} E$ est nucléaire. Soit A défini positif sur E , $a(\alpha, \theta) \in T^m(E \times \mathbb{R}^+)$. L'intégrale $I(\theta) = \int e^{-i\theta/2(A\alpha, \alpha)} a(\alpha, \theta) d\nu(\alpha) = f^{-1}(\theta) c(\theta)$ avec $c(\theta) \in S^m(\mathbb{R}^+)$ et on a le développement asymptotique

$$c(\theta) \sim \sum_{j=0}^{N-1} (-i)^j / 2^j j! D_{\alpha}^{2j} a(0, \theta) \cdot (\text{sym}_{2j} (I + i\theta A)^{-1} \otimes j) \in S^{m-N/2}(\mathbb{R}^+) \quad \forall N$$

Comme il nous faut considérer des intégrales $I(\theta)$ où on a une condition de support sur $a(\alpha, \theta)$ on étudie :

$I(\theta) = f(\theta) \int \mathcal{Z}(\alpha) a(\alpha, \theta) e^{-i\theta/2(A\alpha, \alpha)} d\nu(\alpha)$ où $\mathcal{Z}(\alpha) \in C_b^\infty(E)$ $\mathcal{Z} \equiv 1$ sur $\|\alpha\| < r$

$\text{supp } \mathcal{Z} \subset \{\alpha \mid \|\alpha\| < 2r\}$ où $r \in \mathbf{R}_*^+$ est arbitraire. On fait alors l'hypothèse :

(H) : La forme quadratique sur X induite par A s'exprime par :

$(A\alpha, \alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |\alpha_j|^2$ où les ε_j sont orthonormés dans X et on a :

$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\varepsilon < +\infty$ avec $0 < \varepsilon < 1/2$.

Sous (H) on a aisément :

$$\begin{cases} |f(\theta)| \leq \exp(1/2\varepsilon \theta^\varepsilon (\sum_j \lambda_j^\varepsilon)) \\ \|(I + i\theta A)^{-1}\|_{E \otimes E} \leq C \theta^{-1+\varepsilon} (\sum_j \lambda_j^\varepsilon) \end{cases}$$

On suppose également que $a(\alpha, \theta) \in T^{m, \rho}$ avec $1 - (\rho + \varepsilon) = s > 0$ et on prouve alors :

Lemme 3 : Sous l'hypothèse (H) si $a(\alpha, \theta) \in T^{m, \rho}$ avec $s = 1 - (\rho + \varepsilon) > 0$

$I(\theta) = \int a(\alpha, \theta) e^{-i/2(A\alpha, \alpha)} d\nu(\alpha) = c(\theta) f^{-1}(\theta)$ avec $c(\theta) \in S^m(\mathbf{R}^+)$ et on a

le développement $c(\theta) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j(\theta) \in S^{m-sN}(\mathbf{R}^+)$ $c_j(\theta)$ s'exprime comme au

théorème 1.

Posant $\psi(\alpha, \theta) = \chi(\theta) \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-\theta^\rho \|\alpha\|^2 t/2} dt$ avec

$\psi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ $\text{supp } \psi \subset]c, +\infty[$ $c > 0$ $\int_0^{+\infty} \psi(t) dt = 1$; $\chi(\theta) \equiv 0$ pour $|\theta| \leq 1$

$\chi(\theta) \equiv 1$ pour $|\theta| > 2$, on voit que $\psi(0, \theta) = \chi(\theta)$ et que $\psi(\alpha, \theta) \in T^{0, \rho}$.

Ceci permet d'obtenir la proposition qui nous sera utile dans la suite.

Proposition 1 : Supposons sous (H) satisfaite avec $\varepsilon < 1/2$. $\forall r > 0$, $\forall c(\theta) \in S^m(\mathbf{R}^+)$ $\exists a(\alpha, \theta) \in T^{m, \rho}(X, E)$ telle que

$$f(\theta) \int \mathcal{Z}(\alpha) e^{-i\theta/2(A\alpha, \alpha)} a(\alpha, \theta) d\nu(\alpha) = c(\theta) \text{ modulo } S^{-\infty}(\mathbf{R}^+)$$

où $\mathcal{Z}(\alpha) \in C_b^\infty(E)$ $\text{supp } \mathcal{Z} \subset Br$.

On aura également besoin de versions avec paramètres de ce résultat qui s'obtiennent d'une façon analogue.

§ 2. LE NOYAU DE L'EQUATION DES ONDES

On a : $\Omega(M) = \{\gamma : [0,1] \rightarrow M \text{ de classe } H^1\}$ $\pi : \Omega(M) \rightarrow M \times M$
 associe à $\gamma \rightarrow (\gamma(0), \gamma(1))$, on rappelle que $\Omega(M) \subset C(M)$ (chemins continus
 cette condition est essentielle pour que $\Omega(M)$ soit bien défini).

On a $E(\gamma) = \int_0^1 g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt$ g désigne la métrique riemannienne
 de M . On peut munir $\Omega(M)$ d'une structure de C^∞ variété différentielle que
 nous allons rappeler.

$\mathcal{E} = [0,1] \times M$ fibré sur $[0,1]$ (muni de sa structure de variété à
 bord compacte) $H^1([0,1], M) = \Omega(M)$ est l'espace de sections globales de
 classe H^1 .

$VT\mathcal{E}$ est l'espace des vecteurs tangents verticaux de \mathcal{E}
 $VT\mathcal{E} = \{(t, x, v) \in [0,1] \times TM\}$ qui est un fibré vectoriel sur \mathcal{E} .

$VT\mathcal{E}$ est muni d'une structure riemannienne par
 $(t, x, v) \cdot (t, x, v') = g_x(v, v')$. On en déduit une application $\text{Exp} : VT\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$
 $(t, x, v) \rightarrow (t, \exp_x v)$ au voisinage de la fibre nulle.

Soit $\gamma_0 \in \Omega(M)$ une section de \mathcal{E} ; $VT(\mathcal{E}, \gamma_0) = \{(t; \gamma_0(t), v)$
 $v \in T_{\gamma_0(t)} M \ t \in [0,1]\}$ est aussi un fibré vectoriel sur $[0,1]$ mais
 seulement de classe H^1 . $H^1(VT(\mathcal{E}, \gamma_0))$ est donc un espace vectoriel.

$K(\gamma_0) = \{\alpha \in H^1(VT(\mathcal{E}, \gamma_0)), \|\alpha(t)\| < \varepsilon \ t \in [0,1]\}$ est un ouvert de $H^1(VT(\mathcal{E}, \gamma_0))$.

Si $\varepsilon < \rho$ l'application $\alpha \xrightarrow{\varphi_{\gamma_0}} \text{Exp} \alpha$ réalise une bijection de K_{γ_0} sur

$S_\varepsilon(\gamma_0) = \{\gamma \in \Omega(M) \ \sup_{t \in (0,1)} \overline{\gamma(t) \gamma_0(t)} < \varepsilon\}$. Les applications φ_{γ_0} permettent

de définir la structure différentielle de $\Omega(M)$.

On peut montrer dans ces conditions que $\gamma \rightarrow E(\gamma)$ est $C^\infty \ \Omega(M) \rightarrow \mathbb{R}^+$.
 Λ est associée au flot géodésique. Si $\varphi(\theta, \gamma, t) = \theta(E^{1/2}(\gamma) - t)$, Colin de
 Verdière montre que $C_\varphi = \{(\theta, \gamma, t) \mid \gamma \text{ géodésique de longueur } t\}$ car :

$(d_\gamma E)(\gamma) \cdot \delta\gamma = 2 \int_0^1 g\left(\frac{D}{dt} \delta\gamma, \dot{\gamma}\right) dt = 0 \ \forall \ \delta\gamma \in VT_\gamma \Omega(M) \ (\delta\gamma(0) = \delta\gamma(1) = 0)$
 implique $\gamma \in C^\infty$ et $\frac{D}{dt} \dot{\gamma} = 0$ ($\frac{D}{dt}$ dérivée covariante le long de γ).

Il est facile alors de voir que $(dE)(\gamma) \cdot \delta\gamma = g(\delta\gamma(1), \dot{\gamma}(1)) -$
 $g(\delta\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$ et donc

$$[i_\varphi(\theta, \gamma, t) = (\gamma(0), -\theta E^{-1/2}(\gamma)(\dot{\gamma}(0))^\# ; \gamma(1), \theta E^{-1/2}(\gamma)(\dot{\gamma}(1))^\#, t, -\theta)]$$

soit $i_\varphi(C_\varphi) = \Lambda_{\mathbb{R}_*^+}$ (on a noté $\# : TM \rightarrow T^*M$ associé

à la métrique). On va s'inspirer pour augmenter le nombre des variables de
 l'étude chemins géodésiques par morceaux de Milnor [7] et également de
 Y. Colin de Verdière [2].

Lemme 2.1 : Soit $K_T(M) = \{\text{espace des géodésiques de longueur } \leq T \text{ sur } M\}$

$K_T(M)$ est une partie compacte de $\Omega(M)$, $\forall T > 0$.

Preuve : Soit ρ le rayon d'injectivité de M , $t_1 \in]0, 1[$ tel que $Tt_1 < \rho$.
L'application $e_{0,t_1}(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(t_1))$ est une bijection bicontinue de $K_T(M)$ sur $\{(x_0, x_1) \in M^2, \overline{x_0 x_1} \leq t_1 T\}$. On se sert du fait que $\gamma(0)$ et $\gamma(t_1)$ ne sont pas conjugués le long de γ .

On définit comme [2] :

Définition 2.1 : 1) Soit $M_0^{N+1} = \{\tilde{x} = (x, x_1, \dots, x_{N-1}, y) \in M^{N+1} \text{ tels que } \overline{x_i x_{i+1}} < \rho\}$ on fait correspondre bijectivement à \tilde{x} un chemin de $\Omega(M)$ géodésique par morceaux par : $w(\tilde{x})(i/N) = x_i$ $0 \leq i \leq N$ $w(\tilde{x})$ est sur $]i/N, (i+1)/N[$ la géodésique minimisante $\overline{x_i x_{i+1}}$ parcourue avec la vitesse $N \overline{x_i x_{i+1}}$.

2) $\tilde{\Omega}^N(M) = \{\gamma \in \Omega(M) \mid \gamma(0), \dots, \gamma(1) \in M_0^{N+1} \text{ et tels que}$

$\sup_{0 \leq t \leq 1} d(\gamma(t), w(\gamma(0), w(\gamma(0), \gamma(1/N), \dots, \gamma(1)))(t)) < \rho\}$.

Si $T/N < \rho$ $\tilde{\Omega}^N(M)$ est un voisinage dans $\Omega(M)$ de $K_T(M)$, car étant donné

deux points x_0 et x_1 $\overline{x_0 x_1} < \rho$ la géodésique $t \mapsto \exp_{x_0}^{-1}(Nt \exp_{x_0}^{-1}(x_1))$ dépend continuellement de x_0 et x_1 . On fixe maintenant $T > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $T/N < \rho$.

Soit U ouvert (supposé assez petit de M) $\tilde{\Omega}_U^N(M) = \{\gamma \in \tilde{\Omega}^N(M) \mid \gamma(0) \in U\}$

On définit dans $\tilde{\Omega}_U^N(M)$ une application α_U de la manière suivante.

Soit $w(\gamma)(t) = w(\gamma(0), \dots, \gamma(1))(t)$, $\exp_{w(\gamma)(t)}^{-1}(\gamma(t)) \in T_{w(\gamma)(t)} M$ (et

même à la boule de rayon ρ) est bien défini ; $\tau_{w(t)x}^X \in T_x M, X \in T_{w(t)} M,$

$x = \gamma(0)$, est défini par transport parallèle successifs le long de

$\overline{w(t) w(\frac{i-1}{N})}, \overline{w(\frac{i-1}{N}) w(\frac{i-2}{N})} \dots$ jusqu'à $w(0) = x$ si $t \in [\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]$. On posera

donc $\alpha_U(\gamma) = (w(\gamma), s(\gamma(0)) \cdot \tau_{w(t)\gamma(0)}^{-1}(\exp_{w(\gamma)(t)}^{-1}(\gamma(t)))$ où $s(x)$ pour $x \in U$

est une application repère orthonormée $T_x M \rightarrow \mathbb{R}^q$. On note que

$\alpha_U(\gamma) \in W_N^U \times T_0$ où $T_0 = \{\gamma' \in H^1([0, 1], \mathbb{R}^q), \gamma'(0) = \gamma'(1/N) = \dots = \gamma'(1) = 0$

$\|\gamma'(t)\| < \rho\}$ est un ouvert de l'espace hilbertien T .

Proposition 2.1 : L'application $\alpha_U : \tilde{\Omega}_U^N(M) \rightarrow W_N^U \times T_0$ est un C^∞ difféomorphisme. On notera ainsi β_U l'application réciproque.

On utilise pour ce faire les cartes sur $\Omega(M)$ définies plus haut. Ceci

permet donc d'utiliser sur $\tilde{\Omega}_U^N(M)$ la carte α_U . On étudie la fonction

$(E \circ \beta_U)(w, \gamma')$. (On note β au lieu de β_U).

Proposition 2.2 : 1) $\forall w \in W_N^U$ $d_Y, (E \circ \beta)(w, 0) = 0$

2) Soit $w_0 \in K_T(U)$, $d_{Y, \gamma}^2, (E \circ \beta)(w_0, 0)$ est définie positive sur T.

Démonstration : Pour 1) on utilise $d_Y, (E \circ \beta)(w, 0) = (d_V E)(w) \cdot (d\beta)(w, 0)(0, \cdot)$. Comme $(d\beta)(w, 0)(0, \cdot)$ réalise un isomorphisme topologique de T sur l'espace des champs de vecteurs de classes H^1 au dessus de w nuds aux points i/N , $d_Y, (E \circ \beta)(w, 0) = 0$ résulte de la formule de la variation première (voir Milnor [7]).

Pour 2) $(d_V E)(w_0) = 0$ et $w_0 \in C^\infty$. Vu ce qui précède il suffit de voir que $d_V(d_V E)(w_0)$ est un isomorphisme positif $VT_{w_0} \Omega(M) \rightarrow VT_{w_0} (\Omega(M))'$ or

$$-\frac{1}{2} d_V(d_V E)(w_0)(\delta_Y, \delta_{Y_1}) = \int_0^1 g(\delta_{Y_1}, [(\frac{D}{dt})^2 + R(\dot{w}_0, \cdot)\dot{w}_0] \delta_Y) dt$$

pour δ_Y et $\delta_{Y_1} \in C^\infty(VT(\mathcal{E}, w_0))$, le résultat se déduit alors de résultats de J. Milnor [7], et de la théorie du problème elliptique.

Proposition 8.3 : Soit $\gamma^0 \in K_T(U)$, $E(\gamma^0) \neq 0$ il existe un voisinage W_0 de γ^0 , un voisinage U_0 de 0 dans T_0 et une application C^∞ , $W_0 \times U_0 \rightarrow W_0 \times T_0$ $(w, \gamma') \xrightarrow{\tilde{\phi}} (w, \phi(w, \gamma'))$ telle que :

- (i) $\tilde{\phi}$ est un C^∞ difféomorphisme sur $W_0 \times U_0$
- (ii) $E^{1/2}_0 \beta(w, \gamma') = E^{1/2}_0 \beta(w, 0) + (A^0(w) \cdot \phi(w, \gamma'), \phi(w, \gamma'))$

Ceci se déduit du lemme de Morse.

On termine en prouvant que : pour $\lambda(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ $\text{supp } \lambda \subset]0, T[$

$$\lambda(t)e(t, x, y) = \sum_{v \in \text{ensemble fini}} \int_0^{+\infty} d\theta \int_{(W_N)_{x, y}} \lambda(t) a_v(t, w, \theta) e^{i(E^{1/2}(w) - t)\theta} dw_{x, y} + k(t, x, y) \lambda(t)$$

avec les conditions suivantes : $\left\{ \begin{array}{l} a_v(t, w, \theta) \in C^\infty(\mathbb{R} \times M^{N+1} \times \mathbb{R}_*^+) \\ \text{supp conique } a_v(t, w, \theta) \subset]0, T[\times W_v \times \mathbb{R}_*^+ \end{array} \right.$

$k(t, x, y) \in C^\infty(\mathbb{R} \times M \times M)$.

A l'aide de la proposition 1, on écrit

$$a_\nu(t, w, \theta) \equiv \int \tilde{a}_\nu(t, w, \xi, \theta) e^{i\theta/2(A_\nu P_w \xi, P_w \xi)} dv(\xi)$$

(modulo $S^{-\infty}(\mathbf{R} \times M \times M \times \mathbf{R}_*^+)$)

avec

$$\begin{cases} a_\nu \in C^\infty(\mathbf{R}^+, C_b^\infty(\mathbf{R} \times M^{N+1} \times T)) \\ \text{supp conique } a_\nu \subset]0, T[\times W_\nu \times Br/2^+ \times \mathbf{R}_*^+ \end{cases}$$

L'application $w \rightarrow P_w$ est $C^\infty W_\nu \rightarrow GL(T)$, on note $P : (w, \gamma') \rightarrow (w, P_w \gamma')$.
 Posant ainsi $\tilde{\Omega}_\nu = W_\nu \times B_{r/2}$ (ouvert de $M^{N+1} \times T$), $\lambda_\nu = P_\nu^{-1} \circ \tilde{\Phi}_\nu \circ \beta_\nu$ réalise un
 difféomorphisme d'un ouvert $\Omega_\nu(M) \rightarrow \tilde{\Omega}_\nu$. Soit T^ν la mesure sur $[\Omega_\nu(M)]_{x,y}$
 définie par $\lambda_\nu^{-1}((dw)_{x,y} \otimes \nu)$ et

$$\begin{cases} a_\nu(t, \gamma, \theta) \in C^\infty(\mathbf{R} \times \Omega(M) \times \mathbf{R}_*^+) \\ \text{supp conique } a_\nu \subset]0, T[\times \Omega_\nu(M) \times \mathbf{R}_*^+ \end{cases}$$

on a écrit :

$$\begin{aligned} \lambda(t) e(t, x, y) &= \sum_{\nu \in \text{partie finie}} \int_0^{+\infty} d\theta \int_{(\Omega(M))_{x,y}} a_\nu(t, \gamma, \theta) e^{i\theta(E^{1/2}(\gamma) - t)} dT^\nu(\gamma) \\ &+ \tilde{k}(t, x, y). \end{aligned}$$

On écrit sur $]0, +\infty[$, $1 = \sum_n \lambda_n(t)$ avec $\lambda_n(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ $\text{supp } \lambda_n \subset]0, +\infty[$
 la somme étant localement finie sur $]0, +\infty[$. On montre ensuite que l'on
 peut également écrire le noyau C^∞ sous une forme analogue.
 Pour exprimer le résultat obtenu il est nécessaire d'introduire une
 définition :

Définitions : 1) Soit (F, M, π) un fibré différentiel sur une variété
 riemannienne compacte M de dimension q . On désigne par

$$\mathcal{A} = \{(\Omega_\nu, \lambda_\nu, \tilde{\Omega}_\nu, \mu_\nu)_{\nu \in N}\}$$

où Ω_ν est une famille indexée par $\nu \in N$ d'ouverts de F , les λ_ν sont des
 C^∞ difféomorphismes $\Omega_\nu \xrightarrow{\lambda_\nu} \tilde{\Omega}_\nu$ où $\tilde{\Omega}_\nu$ est un ouvert de $M \times E_\nu$ où E_ν est
 un espace hilbertien réel séparable, λ_ν préserve les fibres ; enfin μ_ν
 est une mesure gaussienne sur E_ν .

On a alors sur chaque Ω_ν une mesure bornée $T^\nu = \lambda_\nu^{-1}(dx \otimes \mu_\nu |_{\tilde{\Omega}_\nu})$.

2) Soit X un ouvert de \mathbb{R}^n on désigne par :

$C_{(Q)}^\infty(X \times F) = \{a(x, d\gamma) : x \in X \mapsto M(F) \text{ (espace des mesures de Radon bornées sur } F) \mid a(x, d\gamma) \text{ peut s'exprimer sous la forme :}$

$$a(x, d\gamma) = \sum_{\nu \in N} a_\nu(x, \gamma) T^\nu(d\gamma)$$

où $a_\nu(x, \gamma) \in C^\infty(X \times F)$ $\text{supp } a_\nu \subset X \times \Omega_\nu$, on suppose en outre que $\forall x \in X$ les fonctions $\gamma \rightarrow a_\nu(x, \gamma)$ sont bornées et en x elles sont nulles sauf pour un nombre fini des indices } que localement

3) On fait remarquer que lorsque F est compact de dimension finie (les espaces E_ν sont alors de dimension finie) $C_{(Q)}^\infty(X, F) = \{ \text{mesures sur } F \text{ de la forme } a(x, \gamma) d\mu(\gamma) \text{ où } a(x, \gamma) \in C^\infty(X \times F) \text{ } \text{supp } a \subset X \times \cup_{\nu} \Omega_\nu \}$ μ étant une mesure lebesgienne arbitraire sur F . On peut ainsi considérer un élément de $C_{(Q)}^\infty$ comme une mesure "C[∞]" supportée par un voisinage de

$$\cup_{\nu \in N} \Omega_\nu.$$

4) $X \times F \times \mathbb{R}_*^+$ est ainsi un fibré conique au-dessus de $X \times M$. On désigne par (Q, f) le couple formé par un ensemble Q défini plus haut et d'une famille de poids sur \mathbb{R}^+ : $f_\nu^{1/2}(\theta) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + i\theta \lambda_j^\nu)^{1/2}$ avec $\lambda_j^\nu > 0$ et

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\nu < +\infty \text{ quand } \dim E_\nu = +\infty, \text{ seuls } N_\nu \text{ des } \lambda_j^\nu \text{ sont } \neq 0 \text{ lorsque}$$

$$\dim E_\nu = N_\nu.$$

L'espace des symboles de type $0 < \rho < 1$ et de degré $m + (f)/2$ est

$$S_{(Q), \rho}^{m+f/2}(X \times F \times \mathbb{R}_*^+) = \{a(x, \theta, d\gamma) \in C_{(Q)}^\infty(X \times \mathbb{R}_*^+ \times F) \mid$$

on a une écriture :

$$a(x, \theta, d\gamma) = \sum_{\nu \in N} a_\nu(x, \gamma, \theta) T^\nu(d\gamma)$$

avec des conditions sur les supports coniques cette fois et en outre si $\tilde{a}_\nu(x, \lambda_\nu^{-1}(\gamma), \theta) = a_\nu(x, \gamma, \theta)$, $\tilde{a}_\nu(x, y, \alpha, \theta) \in f_\nu^{1/2}(\theta) S_{\rho 1-\rho}^m(X \times M \times E_\nu \times \mathbb{R}_*^+) \}$.

On rappelle ainsi qu'une fonction $a(x, y, \alpha, \theta) \in S_{\rho 1-\rho}^m(X \times M \times E \times \mathbb{R}_*^+)$ si dans une carte locale quelconque de M on a une fonction qui vérifie des estimations :

$$\sup_{\substack{x \in K \subset X \\ y \in L \subset \mathcal{U}}} |D_x^\lambda D_y^\mu D_\alpha^\ell a(x, y, \alpha, \theta) \cdot h| \leq C \|h\|^\ell (1 + |\theta|)^{m - (1-\rho)\ell + \rho(|\lambda| + |\mu| + \ell)},$$

$\forall h \in E, \alpha \in E, \theta \in \mathbb{R}^+$.

Dans ces conditions lorsque F est un fibré dont la dimension des fibres est N la classe $S_{(Q), \rho}^{m + f/2}(X \times F \times \mathbb{R}_*^+)$ est effectivement $S_{1-\rho, \rho}^{m+N/2}(X \times F \times \mathbb{R}_*^+)$ (au sens de [5]) $X \times F \times \mathbb{R}_*^+$ étant un fibré conique sur $X \times M$.

La donnée d'une mesure de $C^\infty_{(Q)}(X \times F)$ détermine $\forall y \in M, \forall x \in X$ une mesure sur F_y par :

$$\varphi \in C_b^0(F_y) \rightarrow \sum_{\nu \in N} \int_{\lambda_\nu(\Omega_\nu \cap F_y)} \varphi \circ \lambda_\nu^{-1}(y, \xi) \tilde{a}_\nu(x, y, \xi) d\mu_\nu(\xi)$$

On vérifie en effet que cette expression ne dépend que de la mesure $a(x, dY) \in C^\infty_{(Q)}$.

Théorème : Soit $e(t, x, y)$ le noyau de l'équation des ondes d'une variété riemannienne M compacte de dimension q . On peut trouver une famille \mathcal{Q} d'ouverts $\Omega_\nu(M)$ de $\Omega(M)$ dont la réunion est un voisinage de l'espace des géodésiques de M ; des C^∞ difféomorphismes $\lambda_\nu : \Omega_\nu \rightarrow \tilde{\Omega}_\nu$ où $\tilde{\Omega}_\nu$ est un ouvert de $M^2 \times (\mathbb{R}^q)^{N_\nu - 1} \times E_\nu$, $E_\nu = \{\gamma \in H^1([0, 1], \mathbb{R}^q) \mid \gamma'(i/N_\nu) = 0 \ 0 \leq i \leq N_\nu\}$; des mesures gaussiennes μ_ν sur $(\mathbb{R}^q)^{N_\nu - 1} \times E_\nu$; des poids $f_\nu^{1/2}(\theta)$ sur \mathbb{R}^+ ; une mesure

$$a(t, \theta, dY) \in S_{(Q), \rho}^{-1 + q/2 + f/2}(\mathbb{R}_*^+ \times \Omega(M) \times \mathbb{R}_*^+)$$

telle que :

$$e(t, x, y) \Big|_{]0, +\infty[} = \int_0^{+\infty} d\theta \int_{(\Omega(M))_{x, y}} e^{i\theta(E^{1/2}(\gamma) - t)} a(t, \theta, dY).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Albeverio, R. J. Høegh-Krohn : Oscillatory integrals and the method of stationary phase in infinitely many dimensions, with applications to the classical limit of quantum mechanics, *Inventiones Math.* Juin 1977.
- [2] Y. Colin de Verdière : Paramétrix de l'équation des ondes. Applications à la formule de Poisson. Indices de Morse et Maslov. Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique, 1974-1975.
- [3] J. J. Duistermaat, V. W. Guillemin : The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Inventiones Math.* vol. 29 (1975).
- [4] J. J. Duistermaat, L. Hörmander : Fourier Integral Operators II. *Acta Math.* 128 (1972).
- [5] L. Hörmander : Fourier Integral operators I. *Acta Math.* 127 (1971).
- [6] B. Lascar : Operateurs pseudo-différentiels en dimension infinie. Applications à l'hypoellipticité et la résolubilité dans des classes de fonctions höldériennes et de distribution pour des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques. A paraître.
- [7] J. Milnor : Morse theory. *Annals of Math. Studies* n° 51. Princeton.
- [8] L. Schwartz : Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. Oxford University Press.
- [9] S. I. Sobolev : On a certain class of pseudo-differential operators with an infinite number of variables whose symbols depend on a quadratic form. *Vestnik Moskovskogo Universiteta Mat.* vol. 29 n°3 p.22-31 1974.
-