R. B. Melrose
J. Sjöstrand

Propagation de singularités pour des problèmes aux limites d'ordre 2

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. nº 15, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 7 - 1 9 7 8

PROPAGATION DE SINGULARITES POUR DES PROBLEMES AUX LIMITES D'ORDRE 2

par R. B. MELROSE et J. SJÖSTRAND

Exposé n° XV

14 Mars 1978

§ 0. INTRODUCTION

Soit M une variété C^∞ de dimension $n+1$ à bord, et P un opérateur différentiel d'ordre 2 sur M à coefficients C^∞. On suppose que le symbole principal p est réel et non nul sur $N^*\partial M\backslash 0$ (le fibré conormal du bord). Localement, on peut trouver des coordonnées locales (x,y), $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^n$ t.q. M soit donné par $x\geq 0$ et

$$p(x,y,\xi,\eta) = \xi^2 + r(x,y,\eta)$$

(à un facteur elliptique près que l'on pourra choisir $= \pm 1$) . On pose

$$r_o(y,\eta) = r(0,y,\eta) \in C^\infty(T^*\partial M\backslash 0)$$

(définition locale) et on suppose

$$(0.1) \qquad r_o(y,\eta) = 0 \Rightarrow dr_o,\ \sum_1^n \eta_j dy_j \text{ indépendantes.}$$

Cette condition peut se formuler d'une manière invariante :

(0.1)' Si $\rho \in (\partial T^*M)\backslash 0$, $p(\rho) = 0$, alors $dp|_{\partial T^*M}$ et $\omega|_{\partial T^*M}$ sont indépendantes en ρ. (Ici $\omega = \Sigma\eta_j dy_j + \xi dx$ est la 1-forme canonique).

La condition (0,1) implique que P est de type principal dans un voisinage de ∂M. On suppose aussi que

(0.2) P est de type principal dans $\overset{\circ}{M}$.

Soit bM l'espace topologique obtenu de $(T^*M\backslash 0)\backslash(N^*\partial M)$ en identifiant les points dans $\partial T^*M\backslash 0$ qui ont la même projection dans $T^*\partial M\backslash 0$. Bien entendu bM s'identifie à $(T^*\partial M\backslash 0)\cup(T^*\overset{\circ}{M}\backslash 0)$ et nous avons une projection naturelle $b : (T^*M\backslash 0)\backslash(N^*\partial M)\to bM$. Si $u\in\mathcal{D}'(M)$ (distribution prolongeable) et u vérifie $Qu\in C^\infty(M)$, où Q est un opérateur différentiel non caractéristique pour le bord, alors on peut définir d'une manière invariante un ensemble $WF_b(u)\subset bM$ fermé, conique qui coïncide avec $WF(u)$ dans $T^*\overset{\circ}{M}\backslash 0$. (Voir Melrose-Sjöstrand [7], Melrose [6], Andersson-Melrose [1]. Des notions semblables ont été utilisées au moins implicitement par d'autres auteurs ; Lax-Nirenberg [10], Chazarain [2], M. E. Taylor [11], Eskin [3], Ivrii [5]).

Nous allons étudier la propagation des singularités dans la situation :

(0.3) $\qquad u \in \mathcal{D}'(M)$, $Pu \in C^\infty(M)$, $u|_{\partial M} \in C^\infty(\partial M)$.

Il est en principe bien connu que $WF_b(u) \subset \Sigma_b \underset{\text{def}}{=} b(p^{-1}(0))$ dans cette situation .

Ci-dessous nous allons définir certaines courbes dans Σ_b, dites "rayons" qui sont des bicaractéristiques dans $T^*M\backslash 0$, convenablement réfléchies au-dessus de ∂M. On peut montrer l'existence d'un rayon non-trivial passant par un point donné dans Σ_b. Dans de nombreux cas ce rayon est unique si elle est maximale, par exemple quand les bicaractéristiques de p ne sont jamais tangentes à l'ordre infini à ∂T^*M, ou bien quand p et M analytiques. Un exemple de Taylor [11] montre que les rayons ne sont pas toujours uniques. Notre résultat principal est

<u>Théorème 0.1</u> : Dans la situation (0.3), si $\rho \in WF_b(u)$ alors il existe un rayon maximal passant par ρ et entièrement contenu dans $WF_b(u)$.

Notre théorème est également valable si l'on remplace la condition de Dirichlet dans (0.3) par une condition de Neumann. Dans [8] nous traiterons aussi le cas de conditions aux limites plus générales. Dans le cas du problème mixte pour l'équation des ondes le théorème implique des résultats sur la décroissance exponentielle de l'énergie dans un compact de l'espace quand le temps tend vers l'infini ("Conjecture de Lax-Phillips", voir Morawetz-Ralston-Strauss [9]).

Dans le cas où les bicaractéristiques sont tangentes au bord d'ordre fini, le théorème 0.1 a été démontré dans [7] et la partie analyse pour obtenir le résultat présent est la même que dans [7]. Nous allons donc centrer cet exposé sur la partie géométrique.

§ 1. ESQUISSE DE LA DEMONSTRATION

On choisit des coordonnées locales comme dans le paragraphe 0 et on pose $r_o(y,\eta) = r(0,y,\eta)$, $r_1(y,\eta) = \frac{\partial r}{\partial x}(0,y,\eta)$, $H_{r_o} = \Sigma \frac{\partial r_o}{\partial \eta_j} \frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{\partial r_o}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial \eta_j}$.
La condition (0,1) entraîne que

$$G = \{(y,\eta) \in T^*\partial M\backslash 0 \; ; \; r_o(y,\eta) = 0\}$$

est une hypersurface dans $T^*\partial M\backslash 0$, et que $H_{r_o} \neq 0$ sur G. On définit les sous-ensembles $\Sigma_b^k \subset \Sigma_b$, $k = 0,1,2,\ldots$ par

$$\Sigma_b^o = \Sigma_b \cap T^*\mathring{M}\backslash 0 \; , \; \Sigma_b^1 = \{(y,\eta) \in T^*\partial M\backslash 0 \; ; \; r_o(y,\eta) < 0\} \; ,$$

$$\Sigma_b^2 = \{(y,\eta) \in G \; ; \; r_1 \neq 0\}$$

$$\Sigma_b^k = \{(y,\eta) \in G \; ; \; r_1 = H_{r_o}(r_1) = \ldots = H_{r_o}^{k-3}(r_1) = 0 \; , \; H_{r_o}^{k-2}(r_1) \neq 0\}, \; k \geq 3$$

$$\Sigma_b^\infty = \{(y,\eta) \in G \; ; \; r_1 = 0, \; H_{r_o}^j(r_1) = 0 \; , \; \forall j\}$$

Alors $\Sigma_b = \bigcup_{0 \leq j \leq +\infty} \Sigma_b^j$. On pose aussi

$$\Sigma_b^{(k)} = \bigcup_{k \leq j \leq \infty} \Sigma_b^j \; , \; \Sigma_b^2 = \Sigma_b^{2,+} \cup \Sigma_b^{2,-}$$

où $\Sigma_b^{2,\pm}$ sont définis par $r_1 \gtrless 0$.

Tous ces ensembles ont une définition invariante, en effet on voit d'abord que $\Sigma_b^{(2)}$ est l'ensemble de points $\rho \in \Sigma_b \cap \partial T^*M\backslash 0$ qui admettent un point unique $\rho' \in p^{-1}(0)$ avec $b(\rho') = \rho$. Ensuite on peut montrer que pour $k \geq 2$, Σ_b^k est l'ensemble des points ρ tel que la bicaractéristique de ρ a un contact d'ordre k avec $\partial T^*M\backslash 0$ dans le point correspondant $\rho' \in p^{-1}(0)$. (Pour $\rho \in \Sigma_b^1$ nous avons deux pré-images dans $p^{-1}(0)$, c'est la région hyperbolique).

Définition 1.1 : Un rayon est une courbe $I \ni t \mapsto \gamma(t) \in \Sigma_b$ ($I \subset \mathbb{R}$ intervalle) telle que si $t_o \in I$ et

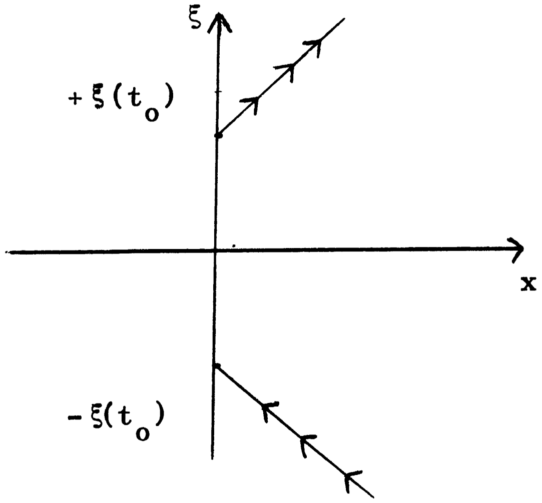
1) si $\gamma(t_o) \in \Sigma_b^o$, alors γ est dérivable en t_o et $\gamma'(t_o) = H_p(\gamma(t_o))$. ($H_p$ = champ hamiltonien de p),

2) si $\gamma(t_o) \in \Sigma_b^1 \cup \Sigma_b^{2,-}$, alors $\gamma(t) \in \Sigma_b^o$ pour $t \neq t_o$ dans un voisinage de t_o ,

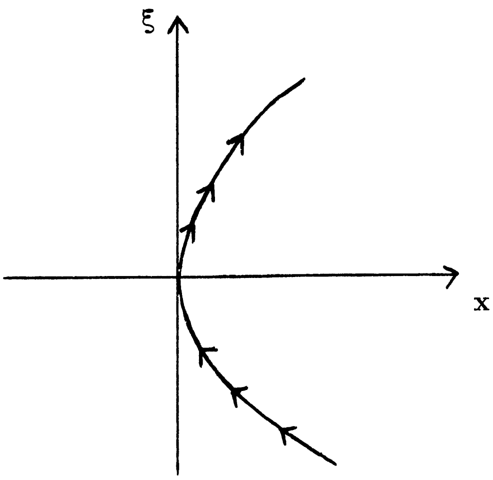
3) si $\gamma(t_o) \in \Sigma_b^{2,+} \cup \Sigma_b^{(3)}$ et l'on écrit $\gamma(t) = (x(t),\xi(t),y(t),\eta(t))$ (où $\xi(t)$ est défini seulement a un facteur ± 1 près pour $x(t) = 0$) alors $(x(t), y(t), \eta(t))$ est dérivable en $t = t_o$ de dérivée $(0,H_{r_o})$.

A part la paramétrisation (que l'on peut aussi fixer définitivement si l'on veut) la définition ci-dessus est invariante et globale. Avec les méthodes de [7] on peut montrer que dans $\Sigma_b \setminus \Sigma_b^\infty$, il existe un rayon non-trivial maximal, unique passant par un point donné de $\Sigma_b \setminus \Sigma_b^\infty$ .Voici le comportement dans l'espace (x,ξ) dans trois cas :

I : $\gamma(t_o) \in \Sigma_b^1$:



II : $\gamma(t_o) \in \Sigma_b^{2,-}$:



III : $\gamma(t_o) \in \Sigma_b^{2,+}$ dans ce cas le rayon coïncide avec une bicaractéristique de r_o (dans $T^*\partial M\backslash 0$) dans un voisinage $v(t_o)$ ("Gliding ray").

On travaille maintenant dans un petit voisinage dans Σ_b d'un point $\rho_o \in G$ et dans un intervalle de temps : $[0,T[$ petit. Pour les rayons on montre facilement une propriété de vitesse finie qui nous permet de travailler localement. Soit $\rho \in \Sigma_b^o \cup \Sigma_b^1 \cup \Sigma_b^{2,-}$. Pour $0 < \delta \leq T$ suffisamment petit, il existe alors un rayon unique $\gamma : [0,\delta[\to \Sigma_b^o \cup \Sigma_b^1 \cup \Sigma_b^{2,-}$. Si δ est maximal, on montre facilement que $\lim_{t\to\delta} \gamma(t)$ existe, et que $\gamma(\delta) \in \Sigma_b^{2,+} \cup \Sigma_b^{(3)}$ si $\delta < T$. Pour $\rho_1 = (y_1,\eta_1) \in G$ et $\sigma > 0$ (petit) on pose

$$B(\rho_1,\sigma) = \{(\eta,\xi,y,\eta) \in \Sigma_b \; ; \; 0 \leq x \leq \sigma, \; |(y,\eta) - (y_1,\eta_1)| \leq \sigma\} .$$

Nous allons définir une relation $D_\varepsilon : \Sigma_b \to \Sigma_b$ (dans un petit voisinage de ρ_o).

<u>Définition 1.2</u> : Pour $\rho \in \Sigma_b$ dans un petit voisinage de ρ_o et $0 < \varepsilon < T$, soit $[0,\delta] \ni t \mapsto \gamma(t)$ le rayon maximal avec $\delta \leq \varepsilon$, $\gamma(0) = \rho$, $\gamma(t) \in \Sigma_b^o \cup \Sigma_b^1 \cup \Sigma_b^{2,-}$, $0 \leq t < \delta$. Si $\delta = \varepsilon$ on pose $D_\varepsilon\rho = \{\gamma(\varepsilon)\}$ et si $\delta < \varepsilon$ on pose

$$D_\varepsilon\rho = B(\exp(\varepsilon-\delta)H_{r_o}(\gamma(\delta)),\, A_o^2(\varepsilon-\delta)^2)$$

Ici A_o est une certaine constante qui apparaît dans certaines estimations tout à fait élémentaires, mais que l'on ne pourra pas décrire en détail ici.

<u>Lemme 1.3</u> : Si $\gamma : [0,\varepsilon] \to \Sigma_b$ est un rayon, alors $\gamma(\varepsilon) \in D_\varepsilon\gamma(0)$.

On montre aussi

<u>Lemme 1.4</u> : $D_{\varepsilon_1} \circ D_{\varepsilon_2} \subset D_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$ et $D_\varepsilon(K)$ est compact pour tout compact K (contenu dans un petit voisinage de ρ_o).

Pour $0 < t \leq T$ on pose

$$C_t^N = (D_{2^{-N}t})^{2^N}$$

Les C_t^N forment alors une suite décroissante et la limite : C_t possède la propriété : $C_t \rho \neq \emptyset$ pour tout $\rho \in \Sigma_b$ (suffisamment voisin de ρ_o). On peut montrer que

$$C_t = \{(\gamma(t), \gamma(0)) \ ; \ \gamma : [0,t] \to \Sigma_b \text{ est un rayon}\}$$

Il est donc clair qu'il existe un rayon non trivial

$\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \Sigma_b$ avec $\gamma(0) = \rho$ pour tout $\rho \in \Sigma_b$ donné

(et ε suffisamment petit).

<u>Proposition 1.5</u> : Dans la situation (0.3), si $\rho \in WF_b(u)$, alors $D_\varepsilon \rho \cap WF_b(u) \neq \emptyset$, $0 < \varepsilon \leq T$.

Soit $\delta \leq \varepsilon$ comme dans la définition de D_ε. Si $\rho \in WF_b(a)$ on sait alors que $\gamma(\delta) \in WF_b(u)$. En effet, Hörmander a démontré la propagation de $WF_b(u)$ le long du rayon dans Σ_b^o, Lax-Nirenberg [11] et Chazarain [2] ont établis le résultat pour les réflexions transversales et Melrose [6] et Taylor [11] ont traité les points diffractifs. Pour démontrer la proposition 1.5 il suffit alors d'appliquer le théorème suivant (essentiellement theorème 2.4.4 de [7]) :

<u>Théorème 1.6</u> : Dans la situation (0.3), si $\rho' \in WF_b(u) \cap G$, alors pour tout ε', $0 < \varepsilon' \leq T$, on a

$$B(\exp \varepsilon' H_{r_o}(\rho'), A_o^2(\varepsilon')^2) \cap WF_b(u) \neq 0$$

On se place maintenant dans la situation du théorème 0.1 . Pour démontrer ce théorème il suffit de trouver un rayon $\gamma : [0,T] \to \Sigma_b \cap WF_b(u)$ avec $T > 0$ petit et $\gamma(0) = \rho$. Soit $\varepsilon_N = 2^{-N}T$. A l'aide de la proposition 1.5 on choisit des points

$$\rho_{0,N}, \ldots, \rho_{2^N,N} \quad \text{avec} \quad \rho_{o,N} = \rho, \ldots, \rho_{k+1,N} \in D_{\varepsilon_N} \rho_{k,N} \cap WF_b(u),$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ et prenant une suite extraite convenable on peut alors obtenir le rayon voulu à la limite.

Pour finir, rappelons brièvement la démonstration du théorème 1.6 dont nous avons eu l'idée en étudiant l'article de Morawetz-Ralston-Strauss [9]. Rappelons aussi que Hörmander [4] a utilisé une méthode semblable pour étudier la propagation de singularités sur des variétés sans bord.

On travaille en coordonnées locales comme ci-dessus. Après conjugaison de l'opérateur avec un facteur C^∞ non nul on peut supposer que $P = D_x^2 + R(x,y,D_y)$ où le symbole principal de $R(x,y,D_y)$ est $r(x,y,z)$. Soit $Q(x,y,D_y)$ un opérateur pseudo-différentiel dont le noyeau distribution est à support compact. Si Q est formellement auto-adjoint d'ordre suffisamment grand négatif, on a

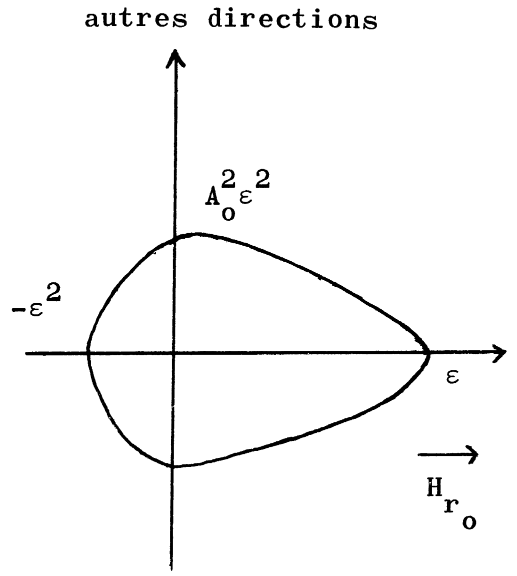
$$(1.1) \qquad 2\,\mathcal{I}m(Qu,Pu)_{L^2} = \frac{1}{i}(([P,Q] + (R^* - R)Q)u,u)_{L^2} \quad ,$$

si $Pu \in C^\infty(M)$, $u|_{\partial M} = 0$. Si g est le symbole principal de Q et k le symbole principal (d'ordre 1) de $i(R^* - R)$, alors le symbole principal de $\frac{1}{i}([P,Q] + [R^* - R)Q)$ est

$$-(H_p + k)q = -(H_r q + kq + 2\,\frac{\partial q}{\partial x}\,\xi)$$

Il s'agit maintenant de choisir q tel que $-(H_r + k)q > 0$ dans la région, où l'on veut montrer que u n'a pas de singularités et tel que $-(H_r + k)q < 0$ seulement là où l'on sait déjà que u n'a pas de singularités. Avec un tel choix convenable de Q on peut ensuite appliquer essentiellement l'inégalité de Gårding sur $\frac{1}{i}(([R,Q] + (R - R)Q)u,u)$ et on peut aussi montrer que cette expression domine sur $\frac{1}{i}([D_x^2,Q]u,u)$. A l'aide de (1.1) on obtient alors une inégalité a priori sur u qui permet de conclure.

Des symboles convenables q peuvent être construits avec support "parabolique" de "longueur" ε dans la direction H_{r_o} et de "largeur" $A_o^2\,\varepsilon^2$ dans les autres directions :



BIBLIOGRAPHIE

[1] K. G. Andersson, R. B. Melrose : The propagation of singularities along gliding rays , Inv. Math. 41 (1977), 197-232.

[2] J. Chazarain : Construction de la paramétrix du problème mixte hyperbolique pour l'équation des ondes, C. R. Acad. Sc. Paris, 276 (1973) 1213-1215.

[3] G. Eskin : Propagation of singularities for the interior mixed hyperbolic problem, Sem. Goulaouic-Schwartz, 1976-77, exposé n° XII.

[4] L. Hörmander : On the existence and regularity of solutions of linear pseudo-differential equations, Enseignement Math. 17 (1971) 99-163.

[5] V. Ja. Ivrĭi : Dokl. Acad. Nauk CCCP, 235 (1977), 1013-1016.

[6] R. B. Melrose : Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems, Duke Math. J. 42 (1975), 605-635.

[7] R. B. Melrose, J. Sjöstrand : Singularities of boundary value problems I, Comm. P. A. Math., à paraître.

[8] R. B. Melrose, J. Sjöstrand : Singularities of boundary value problems II, en préparation.

[9] C. S. Morawetz, J. V. Ralston, W. A. Strauss : Decay of solutions of the wave equation outside non-trapping obstacles, Comm. P. A. Math., 30 (1977), 447-508.

[10] L. Nirenberg : Lecture on linear partial differential equations, A.M.S. Regional Conference series, 17 (1973).

[11] M. E. Taylor, Grazing rays and reflection of singularities of solutions to wave equations, Comm. P. A. Math. 29 (1976), 1-38.