

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Y. MEYER

Nouvelles estimations pour les opérateurs pseudo-différentiels

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 10,
p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978___A11_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 7 - 1 9 7 8

NOUVELLES ESTIMATIONS POUR LES OPERATEURS
PSEUDO-DIFFERENTIELS

par Y. MEYER

Exposé n° X

21 Février 1978

Nous allons d'abord rappeler quelques résultats classiques puis indiquer, sans démonstration, comment ces résultats peuvent être améliorés. Les démonstrations paraîtront dans un prochain volume d'Astérisque.

On rappelle que $S_{1,0}^m$, $m \in \mathbb{R}$, est l'ensemble des fonctions $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telles que, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ on puisse trouver une constante $C_{\alpha, \beta}$ pour laquelle on ait

$$(1) \quad \left| \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} \sigma(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|} .$$

A l'aide d'un symbole $\sigma(x, \xi) \in S_{1,0}^m$, on définit un opérateur $\sigma(x, D) : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ par

$$(2) \quad [\sigma(x, D)f](x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi .$$

Les deux problèmes principaux sont

(3) à quoi servent les opérateurs $\sigma(x, D)$?

(4) sur quels espaces sont-ils continus ?

La réponse à la question (3) est bien connue : les opérateurs pseudo-différentiels classiques servent à inverser les opérateurs elliptiques inversibles. Mais comme les pionniers (Calderón, Zygmund, Hörmander...) l'ont observé, il n'est pas nécessaire d'employer la classe $S_{1,0}^m$ pour cela : les symboles admettant des développements asymptotiques suffisent.

Une très belle justification de la classe générale $S_{1,0}^m$ est fournie par le théorème suivant de R. Beals.

Théorème 1 : Soient V une variété C^∞ compacte, s_1 et s_2 deux nombres réels, $H^{(s_1)}$ et $H^{(s_2)}$ les espaces de Sobolev correspondants sur V et $T : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$ un opérateur linéaire continu.

Alors les deux propriétés suivantes de T sont équivalentes

(a) T est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre $s = s_1 - s_2$.

(b) $T : H^{(s_1)} \rightarrow H^{(s_2)}$ est continu et, pour toute suite X_1, X_2, \dots de champs de vecteurs à coefficients C^∞ sur V , les commutateurs

$T_1 = [T, X_1], T_2 = [T_1, X_2], \dots, T_j = [T_{j-1}, X_j], \dots$ sont continus de $H^{(s_1)}$ dans $H^{(s_2)}$.

Un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre m sur V est défini par un noyau $K(x,y)$, C^∞ hors de la diagonale de $V \times V$ et la condition que $Tf(x) = \int_V K(x,y)f(y)dy$ quand $x \notin \text{Support } f$. Si, au contraire x appartient à un voisinage assez petit du support de f pour que l'on puisse utiliser des coordonnées locales, on demande que T soit défini par un symbole de $S_{1,0}^m$.

Pour répondre à la question n° (4), on appelle Λ_m l'opérateur d'intégration (ou dérivation) fractionnaire dont le symbole est $(1 + |\xi|^2)^{m/2}$. De sorte que $\sigma(x,D) \in S_{1,0}^m$ équivaut à $\sigma(x,D) \cdot \Lambda_{-m} \in S_{1,0}^0$.

L'opérateur Λ_m agit de façon très simple sur les espaces fonctionnels classiques (Lipschitz, Sobolev, Besov, ...) . Il suffit donc d'étudier l'action des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0.

C'est ce que nous allons faire après avoir introduit quelques définitions.

Définition 1 : Un noyau de Calderón-Zygmund est une fonction $K(x,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ possédant les quatre propriétés suivantes

(5) $K(x,y)$ est continue sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ défini par $y \neq x$ et il existe une constante C telle que $|K(x,y)| \leq C|y-x|^{-n}$.

(6) les gradients $\nabla_x K(x,y)$ et $\nabla_y K(x,y)$, pris au sens des distributions, sont, en fait, des fonctions localement bornées dans Ω et il existe une constante $C > 0$ telle que $|\nabla_x K(x,y)| \leq C|y-x|^{-n-1}$ et $|\nabla_y K(x,y)| \leq C|y-x|^{-n-1}$.

(7) pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\psi(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} K(x,y)\varphi(y)dy$$

existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(8) en posant $\psi = T(\varphi)$, il existe une constante C telle que $\|T(\varphi)\|_2 \leq C\|\varphi\|_2$ pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

La norme L^2 est définie de façon usuelle. La plus petite constante C telle que (5), (6), (7) et (8) aient lieu sera notée $\|K\|_*$ et appelée la norme de Calderón-Zygmund du noyau K .

Pour les applications, il est nécessaire de "compléter" l'ensemble des opérateurs définis par les noyaux de Calderón-Zygmund de la façon suivante.

Définition 2 : Un opérateur linéaire $T: C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est appelé un opérateur de Calderón-Zygmund s'il existe une constante $C > 0$ et une suite K_j de noyaux de Calderón-Zygmund telles que $\|K_j\|_* \leq C$ et que, pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|T_j(f) - T(f)\|_2 \rightarrow 0$ ($j \rightarrow +\infty$) ; on a appelé T_j l'opérateur associé à K_j par (8).

Calderón et Zygmund ont démontré les résultats suivants, complétés par E. Stein et C. Fefferman.

Théorème 1 : Soit T un opérateur de Calderón-Zygmund. Alors T est borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 < p < +\infty$ et envoie L^∞ dans BMO.

Par ailleurs le lien entre opérateurs pseudo-différentiels classiques et opérateurs de Calderón-Zygmund est le suivant.

Théorème 2 : Tout opérateur pseudo différentiel classique d'ordre 0 est un opérateur de Calderón-Zygmund.

Nous allons maintenant montrer que les opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0 sont bornés sur l'espace Λ_δ des fonctions hölderiennes d'exposant δ quand $\delta \notin \mathbb{N}$. Nous nous limiterons au cas où $0 < \delta < 1$; le cas général s'en déduit immédiatement.

On utilise les trois lemmes suivants :

Lemme 1 : Soit $F(x,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ fixé, $x \rightarrow F(x,y)$ appartienne à Λ_δ et que l'application ainsi définie de \mathbb{R}^n dans $\Lambda_\delta(\mathbb{R}^n)$ appartienne elle-même à $\Lambda_\delta(\mathbb{R}^n, \Lambda_\delta(\mathbb{R}^n))$.

Alors $F(x,y)$ appartient à $\Lambda_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et, en particulier $F(x,x)$ appartient à $\Lambda_\delta(\mathbb{R}^n)$.

C'est évident et laissé au lecteur.

Lemme 2 : Toute fonction $f \in \Lambda_\delta(\mathbf{R}^n)$ peut s'écrire $f = b(x) + \sum_0^\infty f_j(x)$ où

(9) le support de $\hat{b}(\xi)$ est contenu dans $|\xi| \leq 1$

(10) le support de $\hat{f}_j(\xi)$ est contenu dans $\frac{1}{3} 2^j \leq |\xi| \leq 3 \cdot 2^j$

(11) $\|b\|_\infty \leq C$ et $\|f_j\|_\infty \leq C 2^{-j\delta}$.

Réciproquement une telle série où (9), (10) et (11) sont satisfaites
définit toujours une fonction de $\Lambda_\delta(\mathbf{R}^n)$.

Lemme 3 : Soit $m \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction telle que $|\partial^\alpha m(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-|\alpha|}$
pour $|\alpha| \leq n$. Alors si $f \in \Lambda_\delta$ et si $\hat{g}(\xi) = m(\xi) \hat{f}(\xi)$, on a $g \in \Lambda_\delta$.

En d'autres termes, l'opérateur pseudo-différentiel $m(D)$ est borné sur $\Lambda_\delta(\mathbf{R}^n)$.

La preuve du lemme 3 repose sur le lemme 2 (classique) et sur la remarque suivante : pour tout $j \geq 0$ il existe une fonction $\lambda_j \in L^1(\mathbf{R}^n)$ telle que

(12) $\|\lambda_j\|_1 \leq C'$ et $\hat{\lambda}_j(\xi) = m(\xi)$ si $\frac{1}{3} 2^j \leq |\xi| \leq 3 \cdot 2^j$.

(On fait le changement de variable $\xi = 2^j \eta$ et l'on applique le théorème d'injection de Sobolev à la fonction $m(2^j \eta)$ dont les dérivées sont uniformément bornées).

On appelle L_j l'opérateur dont le symbole est λ_j et M l'opérateur dont le symbole est $m(\xi)$ et l'on a

$$M(f) = M(b) + \sum_0^\infty M(b_j) = M(b) + \sum_0^\infty L_j(f_j).$$

Or $\|L_j(f_j)\|_\infty \leq C' \|f_j\|_\infty \leq CC' 2^{-j\delta}$ et la transformée de Fourier de $L_j(f_j)$ est $m(\xi) \hat{f}_j(\xi)$; son support est contenu dans $\frac{1}{3} 2^j \leq |\xi| \leq 3 \cdot 2^j$.

Donc $M(f) \in \Lambda_\delta$.

Pour terminer, on pose, pour $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$,

$$F(x, y) = \int e^{ix \cdot \xi} \sigma(y, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

de sorte que $F(x, x) = \sigma(x, D)f(x)$.

Il suffit de remarquer qu'un symbole $\sigma \in S_{1,0}^0$ définit canoniquement une application de \mathbb{R}^n dans l'algèbre des symboles ne dépendant pas de x ; cette application est indéfiniment dérivable.

Chemin faisant, on a prouvé davantage

Théorème 3 : Soit $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante C_α telle que l'on ait

$$|\partial_\xi^\alpha \sigma(x, \xi)(1 + |\xi|)^{|\alpha|}| \leq C_\alpha$$

et

$$|\partial_\xi^\alpha \sigma(x+h, \xi)(1 + |\xi|)^{|\alpha|} - \partial_\xi^\alpha \sigma(x, \xi)(1 + |\xi|)^{|\alpha|}| \leq C_\alpha |h|^\delta ; h \in \mathbb{R}^n, 0 < \delta < 1 .$$

Alors $\sigma(x, D) : \Lambda_\delta \rightarrow \Lambda_\delta$ est borné.

Nous pouvons maintenant reprendre l'énoncé du théorème 1, en y remplaçant les espaces de Sobolev par les classes de Lipschitz.

Théorème 4 : Soient V une variété C^∞ compacte, s_1 et s_2 deux nombres réels positifs n'appartenant pas à \mathbb{N} et $\Lambda_{s_1}(V)$ et $\Lambda_{s_2}(V)$ les espaces de Hölder correspondants. Alors les deux propriétés suivantes d'un opérateur linéaire continu $T : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$ sont équivalentes

(a) T est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre $s = s_1 - s_2$.

(b) $T : \Lambda_{s_1}(V) \rightarrow \Lambda_{s_2}(V)$ est continu et, pour toute suite $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots$

de champs de vecteurs à coefficients C^∞ sur V , les commutateurs

$T_1 = [T, X_1], \dots, T_j = [T_{j-1}, X_j], \dots$ sont continus de $\Lambda_{s_1}(V)$ dans $\Lambda_{s_2}(V)$.

Pour finir, désignons par $\omega : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue, croissante, concave et telle que $\omega(0) = 0$. Nous définissons une classe $\Sigma_\omega \supset S_{1,0}^0$ de symboles par les conditions

$$|\partial_\xi^\alpha \sigma(x, \xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{-|\alpha|} \quad \text{et} \quad |\partial_\xi^\alpha \sigma(x+h, \xi) - \partial_\xi^\alpha \sigma(x, \xi)| \leq C_\alpha \omega(h) (1 + |\xi|)^{-|\alpha|} ;$$

$x \in \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n .$

C'est-à-dire, par rapport à la variable ξ , on impose les conditions habituelles ; en x on ne demande presque aucune régularité.

Théorème 5 : Les trois conditions suivantes sont équivalentes

$$(13) \quad \sum_{1}^{\infty} \omega^2(2^{-k}) < +\infty$$

(14) Tout opérateur pseudo-différentiel $\sigma(x,D)$ dont le symbole
 $\sigma(x,\xi) \in \Sigma_{\omega}$ est borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$.

(15) Tout opérateur pseudo-différentiel $\sigma(x,D)$ dont le symbole
 $\sigma(x,\xi) \in \Sigma_{\omega}$ est borné sur $L^p(\mathbf{R}^n)$ si $1 < p < +\infty$.
