M. Duflo
D. Wigner

Sur la résolubilité des équations différentielles invariantes sur un groupe de Lie

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 9, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 7 - 1 9 7 8

SUR LA RESOLUBILITE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES INVARIANTES SUR UN GROUPE DE LIE.

par M. DUFLO et D. WIGNER

Exposé n° IX

17 Janvier 1978

Soit P un opérateur différentiel linéaire sur un groupe de Lie G commutant aux translations à gauche. Nous exposons ici certains résultats liés à la résolubilité de l'équation $Pf = g$.

§ 1. RESOLUBILITE LOCALE

Un opérateur différentiel invariant à gauche sur un groupe de Lie n'est pas, en général, localement résoluble [2]. On a cependant le résultat suivant [5] : un opérateur différentiel bi-invariant non nul (i.e. commutant aux translations à droite et à gauche) sur un groupe de Lie est localement résoluble. On a en fait un résultat plus précis. Supposons G simplement connexe (ce qui est suffisant lorsqu'on considère des questions locales). Dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G on considère l'ouvert V formé des $X \in \mathfrak{G}$ tels que $|\operatorname{Im} x| < \pi$ pour toute valeur propre x de $\operatorname{ad} X$. L'application exponentielle est un difféomorphisme de V sur un ouvert W de G. On note ${}^tP$ l'opérateur transposé de P agissant dans $\mathcal{D}'(G)$.

Proposition 1 [5] : Il existe une distribution $E \in \mathcal{D}'(W)$, invariante par automorphismes intérieurs, telle que l'on ait ${}^tP(E) = \delta$ (δ est la mesure de Dirac de support l'élément neutre). En particulier, pour tout $g \in G$, on a $P(C^\infty(gW)) \supset C_c^\infty(gW)$.

Indiquons comment on construit E. Le principe de la construction est dû à Raïs [15]. La formule

$$f(X) = \left[\det\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\operatorname{ad} X}{2}\right)}{\frac{\operatorname{ad} X}{2}}\right)\right]^{1/2}$$

définit dans V une fonction analytique partout non nulle invariante par automorphismes intérieurs. On définit un isomorphisme a de $\mathcal{D}'(W)$ sur $\mathcal{D}'(V)$ par la formule $\langle a(T), f\varphi \circ \exp\rangle = \langle T,\varphi\rangle$ ($\varphi \in C_c^\infty(W)$).

Il existe une unique distribution u de support $\{1\}$ telle que ${}^tP(T) = T * u$ pour tout $T \in \mathcal{D}'(G)$. Soit Q l'opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathfrak{G}$ tel que ${}^tQ(U) = U * a(u)$ pour tout $U \in \mathcal{D}'(\mathfrak{G})$. L'opérateur Q commute à l'action adjoint de G, et a donc [17] une solution élémentaire F invariante par le groupe adjoint. On pose $E = a^{-1}(F)$. La proposition 1 est donc résumée par la formule :

$$(1) \qquad a(E * u) = a(E) * a(u)$$

Cette formule est prouvée dans [5] par des méthodes d'analyse harmomique. Lorsque G est semi-simple, ou lorsque G est résoluble il existe d'autres démonstrations de (1). (Dans le cas semi-simple (1) est due à Harish-Chandra [8] et son application à la proposition 1 à Helgason [9]. Dans le cas résoluble, voir Kashiwara et Vergne [14]).

Lorsque G est résoluble simplement connexe, Rouvière [17] a démontré l'existence d'une solution élémentaire pour P dans tout ouvert relativement compact de G. La méthode de Rouvière est plus simple et donne des solutions élémentaires ayant de meilleures propriétés de régularité que celle de la proposition 1, mais elles ne sont pas invariantes par automorphismes intérieurs.

§ 2. RESOLUBILITE GLOBALE OU SEMI-GLOBALE

Soit toujours P un opérateur différentiel bi-invariant non nul sur G. Suivant les cas on a, ou n'a pas $P C^\infty(G) = C^\infty(G)$ ou $P C^\infty(G) \supset C^\infty_c(G)$ (considérer par exemple des groupes de la forme $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^g$). Sur cette question qui paraît difficile, on n'a que des résultats partiels (cf. par exemple [1], [3], [9], [10]). Citons-en deux.

Proposition 2 : *Si G est résoluble simplement connexe et si P est un opérateur bi-invariant non nul, on a* $P C^\infty(G) = C^\infty(G)$.

(L'inclusion $P C^\infty(G) \supset C^\infty_c(G)$ est due à Rouvière [17] et la P-convexité de G (cf. ci-dessous) indépendamment à Weita Chang [4] et aux auteurs [7].

Proposition 3 [16] : *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe non compact et soit P l'opérateur de Casimir. Alors* $P C^\infty(G) = C^\infty(G)$.

§ 3. QUELQUES PROBLEMES

Soit P un opérateur différentiel invariant à gauche sur G. On sait [11] que pour démontrer que $P C^\infty(G) = C^\infty(G)$

il suffit de démontrer que $P C^\infty(G) \supset C^\infty_c(G)$ et que G est

P-convexe. D'autre part, si $P\,C^\infty(G) \supset C_c^\infty(G)$, ${}^tP$ agit injectivement dans $\mathcal{E}'(G)$.

Il est donc naturel d'étudier pour commencer l'injectivité de ${}^tP$ dans $\mathcal{E}'(G)$, et puisque cela se fait sensiblement par les mêmes méthodes, la P-convexité de G.

§ 4. INJECTIVITE ET CONVEXITE ; CONDITIONS PORTANT SUR LE SYMBOLE

L'exemple $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ suggère que l'obstacle majeur à l'injectivité de ${}^tP$ dans $\mathcal{E}'(G)$ provient de l'existence dans G de sous-groupes compacts non triviaux.

On note K un sous-groupe compact maximal de G. (Il en existe, et ils sont tous deux à deux conjugués, cf. [12]). On note $\mathfrak{K}$ l'algèbre de Lie de K .

Le groupe G agissant par translations à gauche dans G, agit aussi dans le cotangent $T^*(G)$. Une fonction invariante à gauche sur $T^*(G)$ est déterminée par sa restriction au dual $\mathfrak{G}^*$ de $\mathfrak{G}$ (l'espace tangent à l'origine). Si p est une fonction sur $\mathfrak{G}^*$ nous noterons $\tilde{p}$ la fonction G-invariante à gauche sur $T^*(G)$ dont la restriction à $\mathfrak{G}^*$ est p. Rappelons que $S(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})$ (l'algèbre symétrique de $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$) s'identifie à l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{G}^*$, et $S(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})\mathfrak{K}$ à la sous-algèbre des fonctions polynomiales nulles sur $\mathfrak{K}^\perp$. Les fonctions $\tilde{p}$, où p est un élément homogène de $S(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})$, sont les symboles des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G.

Si φ est une fonction de classe C^1 dans un ouvert $\mathcal{U}$ de G, et si $p \in S(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})$, alors $\langle\tilde{p}, d\varphi\rangle$ est une fonction continue dans $\mathcal{U}$. Nous dirons que φ est non caractéristique dans $\mathcal{U}$ si $\langle\tilde{p}, d\varphi\rangle(g) \neq 0$ pour tout $g \in \mathcal{U}$.

Soit $p \in S(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})\mathfrak{K}$. Si $\mathcal{U} \supset K$ la restriction de φ à K a un point critique k, et il est facile de voir que $\langle p, d\varphi\rangle(k) = 0$, de sorte que dans tout ouvert assez grand, il n'y a pas de fonction non caractéristique. Si l'on impose à p des conditions d'invariance supplémentaires, la réciproque est vraie.

On note Ad G le groupe adjoint de G (c'est un sous-groupe du groupe des automorphismes de $\mathfrak{G}$), Ad K l'image de K dans Ad G , K_1 un sous-groupe compact maximal de Ad G contenant Ad K . Si H est un sous-groupe du groupe des endomorphismes de $\mathfrak{G}$, on note $S(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})^H$ l'ensemble des éléments de $S(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})$ invariants par H.

Proposition 4 [7] : Soit p un élément homogène de $S(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})^{K_1}$. On suppose $p \notin S(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})\mathfrak{K}$. Dans tout ouvert relativement compact de G il existe une fonction non caractéristique pour $\tilde{p}$.

Une application immédiate du théorème d'Holmgren donne :

Corollaire [7] : Soit p comme dans la proposition 4, et P un opérateur différentiel analytique sur G de symbole $\tilde{p}$. Alors ${}^tP$ est injectif dans $\mathcal{E}'(G)$.

Lorsque p est encore plus invariant, on peut dans la proposition 4 obtenir plus de précisions sur les fonctions non caractéristiques, et en déduire des résultats de convexité.

Soit G_2 la composante neutre du plus petit sous-groupe algébrique du groupe des automorphismes de $\mathfrak{G}$ contenant Ad G, et soit K_2 un sous-groupe compact maximal de G_2 contenant K_1.

Proposition 5 [7] : Soit p un élément homogène de $S(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})^{K_2}$. On suppose $p \notin S(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})\mathfrak{K}$. Soit P un opérateur différentiel analytique sur G de symbole $\tilde{p}$. Alors G est P-convexe.

Un cas particulier de la proposition 5 mérite d'être explicité :

Corollaire [7] : Soit P un opérateur différentiel analytique sur G. On suppose que son symbole est invariant par les translations à droite et à gauche sur G (c'est le cas en particulier si P est lui-même bi-invariant). Le symbole est donc de la forme $\tilde{p}$ avec $p \in S(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})^{Ad(G)}$. On suppose $p \notin S(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})\mathfrak{K}$. Alors G est P-convexe.

En effet, on a $p \in S(\mathfrak{G}_{\mathbb{C}})^{G_2}$.

Par exemple, si G est résoluble simplement convexe, ou si G est semi-simple déployé (par exemple $SL(n,\mathbb{R})$), G est P-convexe pour tout opérateur non nul analytique dont le symbole est bi-invariant. Si P est lui-même bi-invariant, on retrouve des résultats de Wigner [20], W. Chang [4] et Johnson [13]. Il y a une intéressante classe de groupes qui contient ces cas particuliers.

Si $f \in \mathfrak{G}^*$, on note G(f) le stabilisateur de f dans G et $G(f)_o$ sa composante neutre. Lorsque f parcourt un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{G}^*$, $G(f)_o$ est abélien [6].

Proposition 6 [7] : On suppose qu'il existe un ouvert (ordinaire) non vide de $f \in \mathcal{G}^*$ tels que $G(f)_0$ soit simplement connexe. Alors G est P-convexe pour tout opérateur différentiel analytique non nul P dont le symbole est bi-invariant.

§ 5. INJECTIVITE : CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES

Soit P un opérateur différentiel invariant à gauche sur un groupe de Lie connexe. Le symbole de P ne suffit pas pour étudier l'injectivité de ${}^tP$ dans $\mathcal{E}'(G)$.

Dans certains cas des conditions nécessaires et suffisantes sont connues. Si G est semi-simple linéaire, et P invariant à gauche par G et à droite par K, Johnson [13] donne une condition nécessaire et suffisante sur P pour que ${}^tP$ soit injectif dans $\mathcal{E}'(G)$. De plus, s'il en est ainsi, il montre que G est P-convexe. La condition de Johnson ne s'énonce pas très simplement. Ses résultats sont obtenus par des méthodes puissantes d'analyse harmonique.

Lorsque K est commutatif (par exemple si G est résoluble) les choses sont plus simples. Pour tout caractère χ de K, on note $C^\infty(G,\chi)$ l'ensemble des $\alpha \in C^\infty(G)$ tels que $\alpha(gk) = \chi(k)^{-1}\varphi(g)$ pour $g \in G$, $k \in K$. Si un opérateur différentiel P commute à l'action de K à droite, il laisse stable chaque sous-espace $C^\infty(G,\chi)$.

Proposition 7 [7] : On suppose que K est commutatif et que P est invariant à gauche par G, et à droite par l'image réciproque dans G du sous-groupe K_1 de Ad G (cf. prop. 4). Alors ${}^tP$ est injectif dans $\mathcal{E}'(G)$ si et seulement si pour tout caractère χ de K on a $P\,\bar{C}^\infty(G,\chi) \neq 0$.

§ 6. RESOLUBILITE DANS DES ESPACES DE DISTRIBUTIONS

Soit P un opérateur différentiel bi-invariant sur G, tel que $PC^\infty(G) = C^\infty(G)$. Identifions $C^\infty(G)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(G)$ au moyen d'une mesure de Haar sur G. Il est raisonnable de se demander si, comme dans le cas des opérateurs à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$, on a $P\mathcal{D}'(G) = \mathcal{D}'(G)$.

On ne connaît que des résultats partiels sur cette question. Rouvière [18] a démontré que si P est l'opérateur de Casimir de $SL(2,\mathbb{R})$ ou $SL(2,\mathbb{C})$, on a $P\mathcal{D}'(G) = \mathcal{D}'(G)$. Par contre, si G est simple de rang réel ≥ 2 (e.g. $SL(3,\mathbb{R})$), $P\mathcal{D}'(G) \neq \mathcal{D}'(G)$. La même méthode montre que sur le groupe résoluble simplement connexe G d'algèbre de Lie de base T,X,Y,Z avec les crochets $[T,X] = Y$, $[T,Y] = -X$, $[X,Y] = Z$, l'opérateur bi-invariant $P = 2TZ + X^2 + Y^2$ n'est pas surjectif dans $\mathcal{D}'(G)$ bien qu'il le soit dans $C^\infty(G)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Cerezo et F. Rouvière : Solution élémentaire d'un opérateur différentiel invariant sur un groupe de Lie compact. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup, 2 (1969) 561-581.

[2] A. Cérézo et F. Rouvière : Résolubilité locale d'un opérateur différentiel invariant du premier ordre. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4 (1971) 21-30.

[3] A. Cerezo et F. Rouvière : Opérateurs différentiels invariants sur un groupe de Lie. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972-1973.

[4] W. Chang : Global solvability of invariant differential operators. M. I. T. 1978, Thesis.

[5] M. Duflo : Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 10 (1977) 265-288.

[6] M. Duflo et M. Vergne : Une propriété de la réprésentation coadjointe d'une algèbre de Lie. C. R. Acad. Sci. 268 (1969) 583-585.

[7] M. Duflo et D. Wigner : en préparation.

[8] Harish-Chandra : Invariant eigen-distributions on a semi-simple Lie group. Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965) 457-508.

[9] S. Helgason : The surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces. Ann. of Math. 98 (1973) 451-479.

[10] S. Helgason : A new Paley-Wiener type theorem on symmetric spaces with an application to differential equations.

[11] L. Hörmander : On the existence and regularity of solutions of linear pseudo-differential equations. Ens.Math. 17 (1971) 99-163.

[12] G. Hochschild : The structure of Lie groups. Holden-Day Inc. San Fransisco 1965.

[13] K. Johnson : Differential equations and an analogue of the Paley-Wiener theorem for linear semi -simple Lie groups. Nagoya Math. J. 64 (1976) 17-29.

[14] M. Kashiwara et M. Vergne : The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions. Preprint (1977).

[15] M. Raïs : Solutions élémentaires des opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie nilpotent. C. R. Acad. Sc. 273 (1971) 495-498.

[16] J. Rauch et D. Wigner : Global solvability of the Casimir operators. Ann. of Math. 103 (1976) 229-236.

[17] F. Rouvière : Sur la résolubilité locale des opérateurs bi-invariants. Annali Scuola Normale Superiore Pisa 3 (1976) 231-244.

[18] F. Rouvière : Solutions distributions de l'opérateur de Casimir. C. R. Acad. Sci 282 (1976) 853-856.

[19] F. Rouvière : Invariant differential equations on certain semi-simple Lie groups. A paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.

[20] D. Wigner : Bi-invariant operators on nilpotent Lie groups. Inventiones Math.41 (1977) 259-264.