P. Schapira

Propagation au bord et réflexion des singularités analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles II

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 9, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A8_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

PROPAGATION AU BORD ET REFLEXION DES SINGULARITES ANALYTIQUES DES SOLUTIONS DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES II.

par P. SCHAPIRA

Exposé N° IX

14 Décembre 1976

§ 1. INTRODUCTION

Nous avons montré dans [8] que la propagation au bord des singularités analytiques des solutions hyperfonction d'une équation aux dérivées partielles $Pu = 0$ résultait d'une propriété micro-locale de l'opérateur P, dite de "N-régularité", et nous avions alors montré que les opérateurs micro-hyperboliques de Kashiwara-Kawai, ainsi que les opérateurs micro-localement équivalents à $(D_1 + iD_2)^p$, étaient N-réguliers, ce qui permettait d'obtenir un théorème de réflexion analogue à celui de Lax et Nirenberg (sous des hypothèses plus faibles, ceci parce que le cadre est analytique).

Nous démontrons ici la N-régularité d'une nouvelle classe d'opérateurs pseudo-différentiels : les opérateurs P pour lesquels il existe une variété involutive Z contenue dans car(P), la variété caractéristique de P, telle que l'hypersurface N ne soit pas micro-caractéristique pour P sur Z au sens de J. M. Bony [1]. Cela permet d'obtenir de nouveaux théorèmes de propagation au bord (les théorèmes de réflexion en résultent) comme par exemple dans le cas de l'équation de la chaleur.

§ 1. RAPPELS

Soit M une variété analytique réelle de dimension n+1, N une hypersurface analytique de M, X un complexifié de M, Y un complexifié de N dans X.

Soit T^*X le fibré vectoriel cotangent à X et S^*X (resp. P^*X) le fibré en sphères réelles (resp. le fibré projectif complexe) associé. Soit S^*_NX, S^*_YX, S^*_MX les fibrés en sphères conormaux à N, Y, M dans X et S^*_NY celui à N dans Y. On a des isomorphismes $S^*_MX \simeq i\,S^*M$, $S^*_NY \simeq iS^*N$.

Il nous arrivera souvent d'identifier, quand cela ne prêtera pas à confusion, un point de $T^*X - X$ et son image dans S^*X, et de même pour les autres fibrés.

Nous utiliserons la théorie des microfonctions et des opérateurs pseudo-différentiels analytiques, telle qu'elle est exposée dans [6]. Nous notons C_M (resp. C_N) le faisceau des microfonctions sur iS^*M (resp. sur iS^*N) et $\mathcal{P}_X$ (resp. $\mathcal{P}_Y$) le faisceau des opérateurs pseudo-différentiels sur P^*X (resp. sur P^*Y), ou $\mathcal{P}_M$ (resp. $\mathcal{P}_N$) sa "restriction" à iS^*M (resp. iS^*N).

Nous avons introduit dans [8] la notion d'opérateur pseudo-différentiel N-régulier en un point $x^* \in N \times_M iS^*M$, à l'aide du faisceau $C_{N|X}$ [6]. Cette définition est invariante par transformation canonique quantifiée, mais nous n'allons rappeler ici qu'une définition équivalente, dans le cas où un système de coordonnées a été choisi.

Supposons donc que M soit un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, N l'hyperplan d'équation $\{x_1 = 0\}$. Soit $x^* = (0,x';i\xi_1, i\xi')$, où $x' = (x_2,\dots,x_{n+1})$, $\xi' = (\xi_2,\dots,\xi_{n+1})$, un point de $iT^*M - M$, que l'on identifie à son image dans iS^*M, et supposons $\xi' \neq 0$ ($x^* \notin iS^*_N M$). Soit $x'^* = (x';i\xi')$ l'image de x^* par la projection canonique $\rho : iS^*M \times_M N - iS^*_N M \to iS^*N$. On pose $L = iS^*M \times_M N$.

<u>Définition 1.1</u> [8] : Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre μ, défini au voisinage de x^*. Supposons que l'équation $P_\mu(0,x';\zeta, i\xi') = 0$ ait une racine d'ordre m en $\zeta = i\xi_1$. On dit que P est N-régulier en x^* si pour tout $u \in (\Gamma_L(C))_{x^*}$ et tout $v_j \in (C_N)_{x'^*}$ $(j = 0,\dots,m-1)$ l'équation :

$$Pu + \sum_{j=o}^{m-1} v_j \otimes \delta_1^j = 0$$

entraine $u = 0$.

Nous avons montré dans [8 b,c] la N-régularité des opérateurs micro-hyperboliques de Kashiwara-Kawai [5] ainsi que des opérateurs micro-localement équivalents à $(D_1 + iD_2)^\ell$, et démontré le théorème 1.2 ci-dessous qui justifie l'intérêt de la notion de "N-régularité". Avant de l'énoncer rappelons [7] que si f est une hyperfonction sur l'ouvert $M \cap \{x_1 > 0\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, solution de l'équation $Pf = 0$, où P est un opérateur différentiel analytique d'ordre m pour lequel l'hypersurface N est non caractéristique, on définit les m traces de f en écrivant :

$$P\bar{f} = Pg + \sum_{j=o}^{m-1} h_j \otimes \delta_1^j$$

où $\bar{f}$ est un prolongement quelconque de f à support dans $\bar{M}_+$, g une hyperfonction à support dans N, et les $(h_j)_j$ des hyperfonctions de N.

<u>Théorème 1.2</u> [8] : Soit P un opérateur différentiel d'ordre m, l'hypersurface N étant non caractéristique. Soit f une hyperfonction sur M_+, solution de l'équation $Pf = 0$. Soit $(x';i\xi') = x'^*$ un point de iS^*N et

soient Z^-, Z^o, Z^+ l'ensemble des points $(0,x';\zeta,i\xi')$ de $S^*_N X$ solutions de l'équation $P_m(0,x';\zeta,i\xi') = 0$, avec $\mathrm{Re}\,\zeta < 0$, $\mathrm{Re}\,\zeta = 0$, $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$. Soit $Z^o = Z^{o,1} \cup Z^{o,2}$ une partition de Z^o. Supposons :

a) en tous points de $Z^{o,1}$ l'opérateur P est N-régulier.

b) l'adhérence dans iS^*M du support singulier de f ne rencontre pas $Z^{o,1}$.

c) il y a m-p points (comptés avec leurs multiplicités) dans $Z^+ \cup Z^{o,1}$.

d) les p premières traces $(h_{m-1},\dots,h_{m-p})$ de f sont nulles en x'^*.

Alors les m traces de f sont nulles en x'^* et l'adhérence du support singulier de f ne rencontre pas $\rho^{-1}(x'^*)$.

(Rappelons que l'on dit que f est nulle, ou micro-analytique, en $x^* \in i\,S^*M$, si x^* n'appartient pas à S.S(f), le support singulier de f).

§ 3. ENONCE DU THEOREME. EXEMPLES

On suppose à nouveau que M est une variété analytique réelle de dimension n+1. Soit Z une variété conique involutive de codimension ℓ de $i\,T^*M$. Soit $x^* = (x\,;\,i\xi)$ un point de Z et $(\delta x, \delta\xi)$ un point de $T(iT^*M)_{x^*}$. On identifie x^* et Z à leurs images dans iS^*M.

Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre μ défini au voisinage de x^*, car(P) sa variété caractéristique dans iS^*M. On suppose Z contenu dans car(P) et soit m le plus grand entier tel que P_μ s'annule ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur à m sur Z.

Définition 2.1 [1] : On dit que le vecteur $(\delta x, \delta\xi)$ est micro-caractéristique pour P sur Z si :

$$P_\mu(x + \varepsilon\delta x,\ \xi + \varepsilon\delta\xi) = o(\varepsilon^m).$$

Si L est une hypersurface de $i\,S^*M$ définie par une équation $\Phi(x,\xi) = 0$ homogène de degré 0 en ξ, on dit que L est micro-caractéristique en $x^* \in L$ si le vecteur $d\Phi(x^*) \in T^*(i\,T^*M)x^*$, considéré comme un vecteur de $T(iT^*M)x^*$ par l'isomorphisme donné par la 2-forme symplectique (c.à d. : H_φ) est micro-caractéristique.

<u>Exemples</u> : Soit $P = D_1^2 + i\, x_1 D_1 D_2$ dans $\mathbb{R}^2$, au voisinage de dx_2. Soit Z la variété $\{\xi_1 = 0\}$. Alors $Z \subset \mathrm{car}(P)$, $m = 1$, et l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$ est micro-caractéristique sur Z.

Soit $P = D_1^2 + i\, x_1 D_1 D_2$ dans $\mathbb{R}^3$, au voisinage de dx_3. Soit $Z = \{\xi_1 = \xi_2 = 0\}$. Alors $m = 2$ et l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$ n'est pas micro-caractéristique sur Z.

Soit $P = D_1^4 + D_2^2 D_3^2$ dans $\mathbb{R}^3$ au voisinage de dx_3. Soit $Z = \{\xi_1 = \xi_2 = 0\}$. L'hyperplan $\{x_1 = 0\}$ (resp. $\{x_2 = 0\}$) est (resp. n'est pas) micro-caractéristique pour P sur Z.

<u>Théorème 2.2</u> : Soit N une hypersurface analytique de M, $L = iS^*M \times_M N$, x^* un point de $L - iS^*_N M$, P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre fini défini au voisinage de x^*, car (P) sa variété caractéristique. On suppose qu'il existe une variété involutive Z contenue dans car(P) telle que l'hypersurface L ne soit pas micro-caractéristique pour P sur Z en x^*. Alors P est N-régulier en x^*.

<u>Exemples</u> : Les opérateurs étudiés par Bony-Schapira [2] sont N-réguliers pourvu qu'il existe une fonction φ nulle sur N et une fonction Ψ nulle sur car(P) tel que le crochet de Poisson $\{\varphi, \varphi\}$ soit non nul en x^*. Le théorème 2.2 contient donc en particulier le cas des opérateurs micro-localement équivalents au voisinage de dx_n à D_1^p $(n > 1)$ ou à $(D_1 + i\, D_2)^p$ $(n > 2)$. Ce théorème contient donc le théorème 2 de [8 b,c].

Soit $P(x', x'', D_{x'}, D_{x''})$ un opérateur différentiel analytique d'ordre m défini sur un ouvert M de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ dont la partie principale ne contient pas de dérivation en $x'' \in \mathbb{R}^q$, et tel que l'hyperplan d'équation $\{x_1 = 0\}$ soit non caractéristique. Soit maintenant $Q(x', x'', D_{x'}, D_{x''})$ un autre opérateur d'ordre $\leq m$ sur M, dont le symbole principal s'annule au moins à l'ordre m sur la variété $\{x'' = 0\}$. Soit Z la variété involutive $\{\xi' = 0,\ x'' = 0\}$ de iS^*M. Les conditions du théorème 2.1 sont vérifiées pour l'opérateur $P + Q$, et celui-ci est donc N-régulier en tous points de $iS^*M \times_M N \cap Z$. On peut alors appliquer le théorème 1.2 . Soit f une hyperfonction définie pour $x_1 > 0$ dans M, solution de l'équation $(P + Q)f = 0$. Soit x_o^* un point de $i\, S^*M \times_M N \cap Z$ ne rencontrant pas l'adhérence du support singulier de f dans iS^*M, et soit x'^*_o l'image de x^*_o dans $i\, S^*N$ par la projection canonique ρ. Alors x'^*_o n'appartient pas au support singulier des m traces de f.

a) Par exemple si f est une fonction analytique sur $\mathbf{R}^{n+1} \cap \{x_1 > 0\}$, solution de l'équation de la chaleur $(D_1^2 + \ldots + D_n^2 - D_{n+1})f = 0$, les traces de f sur l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$ seront micro-analytiques dans les directions $\pm\, dx_{n+1}$.

b) Soit Γ la courbe d'équation $\{x_2 = \ldots = x_{n+1} = 0\}$ de $\mathbf{R}^{n+1}$. Soit P un opérateur de la forme $D_1^m + Q$, où le symbole principal de Q, supposé d'ordre m, s'annule au moins à l'ordre m sur Γ. Soit Z le fibré conormal à Γ dans $\mathbf{R}^{n+1}$. Alors $Z \subset \mathrm{car}(P)$ et les hyperplans $\{x_1 = c\}$ ne sont pas micro-caractéristiques pour P sur Z. On en conclut que si f est une solution analytique sur $\mathbf{R}^{n+1} - \Gamma \cup \{x_1 < 0\}$ de l'équation $Pf=0$, f se prolonge analytiquement à $\mathbf{R}^{n+1}$ tout entier. Ce dernier exemple peut se généraliser. On pourrait aussi déduire du théorème 2.2 des résultats de prolongement du type de ceux de [3].

§ 3. DEMONSTRATION DU THEOREME : PREMIERES REDUCTIONS ET CHANGEMENT DE NOTATIONS.

On va commencer, en utilisant une astuce dûe à M. Kashiwara, à se ramener au cas où la variété Z est involutive et régulière, c'est-à-dire où la 1-forme fondamentale de iS*M ne s'annule pas sur Z.

Placons nous dans le cadre de la définition 1.1 : M est un ouvert de $\mathbf{R}^{n+1}$, $(x, i\xi) = x^*$ un point de $iS^*M \underset{M}{\times} N - iS^*_N M$, u une micro-fonction définie au voisinage de x^*, à support dans $L = iS^*M \underset{M}{\times} N$, solution d'une équation $Pu + \sum_{j=o}^{m-1} v_j \otimes \delta_1^j = 0$. Plongeons M dans l'ouvert $\check{M} = M \times \mathbf{R}$ de $\mathbf{R}^{n+2}$ et soit $\check{u} = u \otimes \delta_{n+2}$, $\check{Z} = \{(x, x_{n+2}; i\xi, i\xi_{n+2}) \mid (x, i\xi) \in Z\}$, $\check{x}^* = (x, 0; i\xi, i\lambda)$, pour un $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$. Les hypothèses du théorème sont encore vérifiées pour $\check{N} = \{x_1 = 0\}$, $\check{Z}$, P, et $\check{Z}$ est involutive et régulière au voisinage de $\check{x}^*$. Alors $\check{u} = u \otimes \delta_{n+2}$ est nulle au voisinage de $\check{x}^*$, et u est nulle au voisinage de x^*.

Lemme 3.1 : Soit Z une variété régulière involutive de codimension ℓ de iS*M, et L une hypersurface de iS*M. On suppose qu'il existe une fonction φ nulle sur L et une fonction Ψ nulle sur Z, telles que le crochet de Poisson $\{\varphi,\Psi\}$ soit différent de 0 en $x^* \in Z \cap L$. Il existe alors une transformation canonique au voisinage de x^* qui transforme L et Z en les variétés d'équations respectives $\{x_1 = 0\}$ et $\{\xi_1 = \ldots = \xi_\ell = 0\}$ de $\mathbb{R}^{n+1} \times iS^n$.

Soit Z la variété involutive du théorème, que l'on supposera régulière et $L = iS^*_M M \times N$. Il est facile de voir que les hypothèses du lemme 3.1 sont vérifiées. Comme on peut supposer Z de codimension maximum, soit n, une transformation canonique quantifiée permet donc de se ramener à la situation suivante.

<u>Nouvelles notations</u> : On travaille dans iS^*M, M étant un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, avec les coordonnées $(x,t\,;\,i\xi,i\theta)$. L est la variété $\{x_1 = 0\}$ et Z la variété $\{\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0,\ \theta > 0\}$. En divisant P par un opérateur elliptique d'ordre $\mu - m$ on peut supposer son symbole de la forme [2, p.108 et p.124] :

$$P(x,t,\xi,\theta) = \xi_1^m + \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha \neq (m,o\ldots o)}} A_\alpha(x,t,\xi',\theta)\xi^\alpha + \sum_{o \leq \ell < m} B_\ell(x,t,\xi',\theta)\xi_1^\ell$$

où $\xi' = (\xi_2,\ldots,\xi_n)$, les A_α sont des symboles d'ordre ≤ 0, les B_ℓ des symboles d'ordre $\leq m-\ell-1$, définis au voisinage du point $x^* \in L \cap Z$.

§ 4. <u>DEMONSTRATION DU THEOREME</u>. <u>DEUXIEME ETAPE</u>.

Soit W un voisinage ouvert de M dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$. Nous noterons $(z,t;i\zeta,i\theta)$ les coordonnées d'un point de $iS^*(W)$, avec $z = (z_1\ldots z_n)$, $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$. Sur l'ouvert $\{\theta > 0\}$ de iS^*W, considérons le faisceau C_W^h des microfonctions holomorphes en z (c'est à dire solution du système $\frac{\partial u}{\partial \bar z_i} = 0$; $i = 1,\ldots,n$). C'est un faisceau concentré sur la variété $\tilde Z$ d'équation $\{\zeta_1 = \ldots = \zeta_n = 0,\ \theta > 0\}$ et la projection $iS^*W \to W$ induit un isomorphisme $\tilde Z \to W$. Nous considèrerons donc C_W^h comme un faisceau sur W. Nous considèrerons de même $\mathcal{P}_W$, "restriction" à $\tilde Z$ du faisceau des opérateurs pseudo-différentiels sur $P^*(X)$, comme un faisceau sur W. Le faisceau $\mathcal{P}_W$ opère sur C_W^h.

Nous désignerons par C_V^h et $\mathcal{O}_V$ les faisceaux contruits de manière analogue sur $V = W \cap \{z_1 = 0\}$. D'après M. Kashiwara [4], les groupes $\mathcal{H}^i_M(W, C^h_W)$ sont nuls pour $i \neq n$, et le morphisme naturel (en identifiant $\tilde{Z}$ à W et Z à M) :

$$C_M | Z \to \mathcal{H}^n_M(W, C^h_W)$$

est injectif. Notons $\check{B}_M$ le faisceau $\mathcal{H}^n_M(W, C^h_W)$ et $\check{B}_N$ le faisceau $\mathcal{H}^{n-1}_N(V, C^h_V)$. Le théorème 2.2 résultera donc de l'unicité de la décomposition dans le lemme 4.1 ci-dessous.

<u>Lemme 4.1</u> : Pour tout $u \in \Gamma_N(M, \check{B}_M)$ il existe un unique $v \in \Gamma_N(M, \check{B}_M)$ et d'uniques $v_j \in \Gamma(N, \check{B}_N)$ $(j = 0, \ldots, m-1)$ avec

$$u = Pv + \sum_{j=o}^{m-1} v_j \otimes \delta_1^j .$$

Pour démontrer le lemme 4.1 il sera commode d'utiliser le langage des catégories dérivées, comme dans [6]. Notons encore P le complexifié en z de l'opérateur de la fin du paragraphe 3. En prenant W assez petit, on peut supposer P défini sur W. Désignons par $\mathcal{M}$ le $\mathcal{O}_W$-module à gauche $\mathcal{O}_W / \mathcal{O}_W \cdot P$ et par $\mathcal{M}_V$ le module induit par $\mathcal{M}$ sur V [6 p.4-13]. Comme P est de type Weierstrass en $\frac{\partial}{\partial z_1}$, d'ordre m, $\mathcal{M}_V$ est un $\mathcal{O}_V$-module libre de rang m.

<u>Lemme 4.2</u> : On a les deux isomorphismes canoniques :

(1) $R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_W}(\mathcal{M}, C^h_W)|V \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{M}_V, C^h_V)$

(2) $R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_W}(\mathcal{M}, C^h_W)|V \xrightarrow{\sim} R\Gamma_V\, R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_W}(\mathcal{M}, C^h_W)[+2]$.

Le lemme 4.1 résulte du lemme 4.2 par application du foncteur $R\Gamma_N[n-1]$ à l'isomorphisme

$$(C^h_V)^m \xrightarrow{\sim} R\Gamma_V\; R\mathcal{H}om(\mathcal{M}, C^h_W)[+2]$$

§ 5. THEOREME DE CAUCHY-KOWALEWSKI PRECISE DANS LES FAISCEAUX DE MICRO-FONCTIONS PARTIELLEMENT HOLOMORPHES. FIN DE LA DEMONSTRATION.

L'opérateur pseudo-différentiel P désigne, comme au paragraphe précédent, le complexifié sur W, ouvert de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, de l'opérateur de la fin du paragraphe 3.

$$P(z,t,D_z,D_t) = D_{z_1}^m + \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha\neq(m,o\ldots o)}} A_\alpha(z,t,D_{z'},D_t)D_z^\alpha$$

$$+ \sum_{o\leq \ell < m} B_\ell(z,t,D_{z'},D_t)\, D_{z_1}^\ell$$

où $D_{z'} = (D_{z_2},\ldots,D_{z_n})$, les A_α sont des opérateurs d'ordre ≤ 0 et les B_ℓ des opérateurs d'ordre $\leq m - \ell - 1$,
définis au voisinage de $\tilde{Z}$, donc définis sur W via l'isomorphisme $\tilde{Z} \simeq W$. On désignera par Σ un hyperplan réel $\{t = \sigma\}$ de W et par H un hyperplan complexe $\{z_1 = h\}$ de W.

Nous dirons [cf.2] qu'un ouvert convexe Ω de W est

$t - \delta - H$ plat (où $\delta > 0$) si

$$(z,t) \in \Omega,\ (\tilde{z},\tilde{t}) \in H$$

$|z_1 - \tilde{z}_1| \geq \delta\, |z_j - \tilde{z}_j|$, $j = 2,\ldots,n$, $t = \tilde{t}$ entraîne $(\tilde{z},\tilde{t}) \in \Omega \cap H$

et que Ω est $z_1 - k - \Sigma$-plat (où $k > 0$) si

$$(z,t) \in \Omega,\ (\tilde{z},\tilde{t}) \in \Sigma$$

$|t - t_1| \geq k\, |z_j - \tilde{z}_j|$ $j = 2,\ldots,n$, $z_1 = \tilde{z}_1$ entraîne $(\tilde{z},\tilde{t}) \in \Omega \cap \Sigma$.

<u>Théorème 5.1</u> : L'opérateur P s'écrivant comme ci-dessus, pour tout point (z_o,t_o) de W, il existe un voisinage ouvert Ω_o de ce point et des constantes $k > 0$ et $\delta > 0$ tels que :
quelque soit h et σ définissant les hyperplans H et Σ d'équation $z_1 = h$, $t = \sigma$, quelque soit Ω, ouvert convexe contenu dans Ω_o, $z_1 - k - \Sigma$ plat et $t - \delta - H$ plat, le problème de Cauchy :

$$P(f) = g\ ,\ \gamma(f) = (h)$$

où $\gamma(f) = (f|_H, \frac{\partial}{\partial z_1} f|_H, \ldots (\frac{\partial}{\partial z_1})^{m-1} f|_H)$, admet une solution unique $f \in \Gamma(\Omega, C^h_W)$ pour toute donnée $g \in \Gamma(\Omega, C^h_W)$, $(h) \in \Gamma(\Omega \cap H, C^h_V)^m$.

Ce théorème se déduit facilement du théorème 3.1.2 et du lemme 4.1.2 de [2]. L'isomorphisme (1) du lemme 4.2 résulte immédiatement du théorème 5.1. Pour démontrer l'isomorphisme (2) on vérifie d'abord, à l'aide du théorème 5.1, que l'opérateur P définit un isomorphisme du faisceau sur $S^*_V W$:

$$C^{h,\mathbb{R}}_{V|W} = \mathcal{H}^1_{S^*_V(W)}(\pi^{-1} C^h_W)$$

où π désigne la projection $W - V \cup S^*_V W \to W$. On utilise ensuite le triangle [6, chapitre 1, proposition 1.2.5] :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & F|V \arrow[dl] & \\ R\Gamma_V(F)[+2] \arrow[rr] & & R\pi_* R\Gamma_{S^*_V(W)}(\pi^{-1}F)[+2] \arrow[ul, "+1"'] \end{tikzcd}$$

avec $F = R\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_W}(\mathcal{M}, C^h_W)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony : Extension du theorème de Holmgren. Sem. Goulaouic-Schwartz, 1975-76, exposé 17.

[2] J. M. Bony, P. Schapira : Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles. Ann. Inst. Fourier Grenoble 26, 1, 81-140 (1976).

[3] A. Kaneko : Singular spectrum of boundary value of solutions of partial differential equations with real analytic coefficients. Scientific papers of the College of Gen. Ed. Univ. of Tokyo, Vol. 25, n°2, 59-68 (1975).

[4] M. Kashiwara : Exposé oral au colloque "Hyperfonctions et Physique Théorique" 1973 (Nice) et communications personnelles.

[5] M. Kashiwara, T. Kawaï : On micro hyperbolic pseudo-differential operators I. J. Math. Soc. Japan, vol. 27, 359-404 (1975).

[6] M. Sato, T. Kawaï, M. Kashiwara : Hyperfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes in Math. Springer 287, 265-529 (1973).

[7] P. Schapira : Problème de Dirichlet et solutions hyperfonction des équations elliptiques. Boll. Unione Mat. Ital. (4) n° 3 , 367-372 (1969).

[8] P. Schapira : Propagation au bord et réflexion des singularités analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles I. a) Sem. Goulaouic-Schwartz 1975-76, exposé 6, ou b) C. R. Acad. Sc. Paris, t.283, série A, 251-253 (1976), ou c) Article à paraître aux "Publ. R. I. M. S." Kyoto 1976.