G. Metivier

Fonction spectrale d'opérateurs non elliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. nº 7, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

FONCTION SPECTRALE D'OPERATEURS NON ELLIPTIQUES

par G. METIVIER

Exposé n° VII

14 Décembre 1976

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; soient $X_1,\ldots,X_p$ des champs de vecteurs réels C^∞ sur Ω et soit c une fonction C^∞ positive sur Ω. Notant X_i^* l'adjoint formel de X_i, on considère l'opérateur

(1) $$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{p} X_i^* X_i + c$$

Les opérateurs de la forme (1) sont parmi les opérateurs introduits en [3] par Hörmander, ceux qui sont formellement positifs autoadjoints. Pour l'étude de ces opérateurs, voir par exemple [3], [5], [7], [9]...

$\mathcal{A}$, étant formellement positif autoadjoint, possède au moins une extension positive autoadjointe dans $L^2(\Omega)$; on considère alors $(A,D(A))$ une telle extension ; on note $E(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) la résolution de l'identité associée à A et $e(\lambda)$ le noyau (distribution) de $E(\lambda)$. Le premier problème est un problème de régularité :

(2) "La distribution $e(\lambda)$ est-elle une fonction ?"

Il est classique que si $\mathcal{A}$ est sous elliptique, alors $e(\lambda)$ est C^∞ ; nous sommes donc amenés à supposer satisfaite la condition suffisante de sous-ellipticité de Hörmander ([3]), et pour rappeler cette condition on introduit d'abord quelques notations :

pour une suite $I = (i_1,\ldots,i_k) \in \{1,\ldots,p\}^k$, on note $|I| = k$ la longueur de la suite et X_I le champ :

$$X_I = [X_{i_1},[X_{i_2},\ldots[X_{i_{k-1}},X_{i_k}]\ldots]$$

avec la convention, si $I = (i)$ est de longueur 1 : $X_I = X_i$.

Pour $x \in \Omega$ et pour k entier ≥ 1, on désigne par $V_k(x)$ le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs $X_I(x)$ pour $|I| \leq k$. Il sera pratique de convenir que $V_0(x) = (0)$.

La condition suffisante de sous ellipticité de [3] est alors :

(C) $$\forall x \in \Omega \ , \ \exists r \ , \ V_r(x) = \mathbb{R}^n$$

et donc :

Lemme 1 : Si la condition (C) est satisfaite, alors pour tout λ réel $e(\lambda)$ est C^∞ sur $\Omega\times\Omega$.

On note $e(\lambda;x,y)$ la valeur en (x,y) de la fonction $e(\lambda)$ et le problème qui va nous intéresser par la suite est d'étudier le comportement lorsque $\lambda\mapsto+\infty$ de $e(\lambda;x,x)$.

Signalons aussi que, si l'injection de $D(A)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte (c'est le cas si Ω est borné, si (C) a lieu sur $\bar\Omega$ et si A est l'extension de Friedrichs de $\mathcal{A}$), alors le spectre de A est constitué d'une suite de valeurs propres réelles λ_j, et qu'alors se pose le problème d'étudier le comportement asymptotique des valeurs propres. Il est alors équivalent d'étudier le comportement asymptotique de la fonction :

$$N(\lambda)=\sum_{\lambda_j\leq\lambda}1=\mathrm{tr}\,E(\lambda)=\int_\Omega e(\lambda;x,x)dx\,.$$

Pour faire cette étude, on peut établir (voir [6]) :
1) un comportement asymptotique de $e(\lambda;x,x)$ uniforme en x lorsque x reste dans un compact $K\subset\Omega$,
2) des estimations des intégrales $\int_{\Omega\setminus K}e(\lambda;x,x)dx$.

Rappelant la formule : $e(\lambda;x,x)=\int_\Omega|e(\lambda;x,y)|^2dy$, on voit que les intégrales que l'on cherche à estimer sont les normes de $e(\lambda)$ dans $L^2((\Omega\setminus K)\times\Omega)$; nous retrouvons ici une version, non classique, du problème (2).

Nous nous intéressons maintenant exclusivement au comportement asymptotique de $e(\lambda;x,x)$ et nous ferons l'étude en trois temps correspondant aux trois idées suivantes :

1. Si l'opérateur $\hat{\mathcal{A}}$ est homogène sous l'action de dilatations h_t (voir ci-dessous pour des définitions précises), alors la fonction spectrale est homogène en λ.
2. Si $\mathcal{A}$ est une perturbation convenable d'un opérateur homogène $\hat{\mathcal{A}}$ au voisinage d'un point x_0, alors :

$$e(\lambda;x_0,x_0)\sim\hat{e}(\lambda;x_0,x_0)$$

3. Reprenant le problème à son début, $\mathcal{A}$ étant donné, on cherche les dilatations h_t et l'opérateur homogène $\hat{\mathcal{A}}$ tels que $\mathcal{A}$ soit une "perturbation" de $\hat{\mathcal{A}}$; on utilise ici la géométrie des opérateurs.

§ 1. HOMOGENEITE

Exemple : Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les champs :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad , \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

On remarque alors que si l'on définit pour $1 > 0$, $h_t \in GL(\mathbb{R}^n)$ par :

$$h_t(x_1,x_2,x_3) = (tx_1,tx_2,t^2x_3)$$

alors les images de X_1 et X_2 par h_t sont tX_1 et tX_2.

On généralise immédiatement cette situation de la manière suivante : on se donne pour toute la suite du paragraphe une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^{r} W_k$$

et pour $t > 0$ on définit $h_t \in GL(\mathbb{R}^n)$ en posant :

$$\forall\, k = 1,\dots,r \qquad h_t|_{W_k} = t^k \, Id_{W_k} \ .$$

Suivant [1] on dira qu'un opérateur différentiel défini sur $\mathbb{R}^n$ est homogène de degré ρ si :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad h_{t_*}(T)\varphi = \{T(\varphi \circ h_t)\} \circ h_t^{-1} = t^{\rho}\, T\varphi$$

Nous regroupons les résultat dans le

Théorème 1 : Soient $X_1,\dots,X_p$ des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, homogènes de degré 1 et vérifiant la condition (C). Soit $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{p} X_i^* X_i$. Alors :

i) La réalisation A de $\mathcal{A}$ de domaine

$$D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) / \mathcal{A}u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

est positive autoadjointe dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $D(A)$; A n'a pas de valeurs propres.

ii) La fonction spectrale $e(\lambda)$ de A est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et :

$$\forall \lambda > 0 \ , \quad \forall\, t > 0 \qquad e(t^2\lambda;0,0) = t^\nu e(\lambda;0,0)$$

où $\nu = \sum\limits_{k=1}^{r} k \dim W_k$ est la dimension homogène.

i) est démontré en [6] (voir aussi [1]). Indiquons rapidement comment on obtient ii). Notons H_t l'isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur lui même définie par :

$$H_t u = t^{\nu/2} u \circ h_t .$$

X_i étant homogène , X_i^* est homogène (et est égal à $-X_i$) et $\mathcal{A}$ est homogène de degré 2. On a donc :

$$H_t^{-1} \mathcal{A} H_t = t^2 \mathcal{A}$$

et il résulte de i) que D(A) est stable par H_t et que

$$H_t^{-1} A\, H_t = t^2 A$$

Prenant la résolution de l'identité de chaque membre, on en déduit que

$$H_t^{-1} E(\lambda) H_t = E(t^{-2}\lambda)$$

puis passant aux noyaux (qui sont C^∞ d'après le lemme 1) on a :

$$e(t^2\lambda \ ; \ x,y) = t^\nu \ e(\lambda; h_t x, h_t y)$$

Fixant $x = y = 0$, on en déduit ii).

<u>Remarque</u> : On déduit de l'homogénéité ii) que :

$$\forall \lambda > 0 \qquad e(\lambda;0,0) > 0$$

§ 2. PERTURBATIONS

Le problème peut se formuler de la manière suivante : quelles sont les "perturbations" $\mathcal{A}$ d'un opérateur homogène $\hat{\mathcal{A}}$ telles que :

$$(3) \qquad e(\lambda;x_0,x_0) \sim e(\lambda;x_0,x_0) \quad ?$$

Dans la démonstration du théorème 1, on a vu que le comportement pour λ tendant vers $+\infty$ de $\hat{e}(\lambda;0,0)$ apparaît en faisant agir h_t pour t tendant vers $+\infty$. Il est alors raisonnable pour avoir (3) de demander que

$$h_{t_*}(\mathcal{A}) \sim h_{t_*}(\hat{\mathcal{A}}) = t^2 \hat{\mathcal{A}}$$

ou encore, si l'on veut donner un sens plus précis à cet équivalent :

$$(4) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \lim_{t \mapsto +\infty} t^{-2} h_{t_*}(\mathcal{A})\varphi = \hat{\mathcal{A}}\varphi$$

la convergence ayant lieu au moins dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On aura donc :

$$(5) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad : \quad h_{t_*}(\mathcal{A}).\varphi = O(t^2)$$

et dans une large mesure (4) apparaît comme étant alors la définition de $\hat{\mathcal{A}}$.

La condition (5) apparaît en fait comme une restriction sur le développement limité de $\mathcal{A}$ en 0 (voir ci-dessous), mais il y a une manière simple de la formuler. Nous suivons maintenant entièrement les notations et la terminologie de [2].

La décomposition $\mathbb{R}^r = \bigoplus_{k=1}^{r} W_k$ est toujours fixée, et h_t est défini comme au paragraphe précédent. On définit d'abord une "norme homogène" : [voir aussi [1])

$$|\xi| = \{\sum_{k=1}^{r} \|\xi_k\|^{2r!/k}\}^{1/2r!}$$

pour $\xi = \sum_{k=1}^{r} \xi_k$ avec $\xi_k \in W_k$ et où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne.

Essentiellement la fonction $\xi \to |\xi|$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$, qui ne s'annule qu'en 0 et qui est homogène de degré 1 :

$$\forall t\ ,\ \forall \xi \quad |h_t \xi| = t|\xi|$$

Pour un voisinage U de 0 et pour $m \in \mathbb{Z}$ on pose :

$$C^\infty_m(U) = \{u \in C^\infty(U) \ /\ u(\xi) = O(|\xi|^m) \quad \text{pour } \xi \to 0\}$$

Naturellement $C^\infty_m = C^\infty$ si $m \leq 0$. On dit qu'un opérateur T de $C^\infty(U)$ dans $C^\infty(U)$ est d'ordre $\leq p$ en 0 ($p \in \mathbb{Z}$) si :

$$\forall\ m \quad TC^\infty_m(U) \subset C^\infty_{m-p}(U)$$

Pour illustrer ces définitions nous allons les traduire sur les développements de Taylor, une fois qu'une base convenable aura été choisie. On choisit donc dans chaque W_k une base, constituant ainsi une base $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$; on notera $[j]$ l'indice k tel que $e_j \in W_k$. Remarquons d'abord que, dans les coordonnées associées à cette base, l'opérateur $\xi^\beta \partial^\alpha_\xi$ est homogène de degré $[\alpha]-[\beta]$, si l'on note pour un multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$:

$$[\alpha] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j [j]$$

D'autre part une fonction $a \in C^\infty(U)$ est dans $C^\infty_m(U)$ (pour $m > 0$) si et seulement si : $(\partial^\beta_\xi a)(0) = 0$ pour $[\beta] < m$.

Enfin l'opérateur $T = \sum_\alpha a_\alpha \cdot \partial^\alpha_\xi$ est d'ordre $\leq$ p en 0 si et seulement si pour tout α $a_\alpha \in C^\infty_{[\alpha]-p}$. Ecrivant le développement de Taylor de T en 0 :

$$(6) \qquad T \sim \sum t_{\alpha,\beta} \cdot \xi^\beta \cdot \partial^\alpha_\xi$$

on voit alors que T est d'ordre $\leq p$, si et seulement si :

(7) $$t_{\alpha,\beta} = 0 \quad \text{pour} \quad \lceil\alpha\rceil - \lceil\beta\rceil > p$$

Nous utiliserons les propriétés suivantes :

<u>Lemme 2</u> : i) Un opérateur homogène de degré ρ est d'ordre $\leq \rho$ en 0.

ii) Soit T un opérateur différentiel sur un voisinage U de 0. Si T est d'ordre $\leq p$ en 0, il existe $\hat{T}$ sur $\mathbb{R}^n$, homogène de degré p, tel que $T - \hat{T}$ soit d'ordre $\leq p-1$ en 0. De plus :

(8) $$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \qquad t^{-p} h_{t_*}(T)\varphi \underset{t \to +\infty}{\to} \hat{T}\varphi$$

la convergence ayant lieu dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Remarques 1-</u> L'existence de $\hat{T}$ résulte directement de ce qui précède : écrivant (6) on pose
$$\hat{T} = \sum_{[\alpha]-[\beta]=p} t_{\alpha,\beta}\, \xi^{\beta}\, \partial_{\xi}^{\alpha}$$

(somme finie) et suivant (7) $T - \hat{T}$ est d'ordre $\leq p-1$.

2- $h_{t_*}(T)$ est défini sur $h_t(U)$; pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $h_t(U)$ contient le support de φ pour t assez grand, et la convergence de (8) a bien un sens ; elle résulte aussi directement de (7).

3- Nous venons de donner un sens précis au mot perturbation conforme à ce que nous souhaitions (4) : $\mathcal{A}$ sera une perturbation de $\grave{\mathcal{A}}$ homogène de degré 2, si $\mathcal{A} - \grave{\mathcal{A}}$ est d'ordre ≤ 1 en 0. Il nous reste à démontrer (3).

On se donne maintenant un ouvert Ω contenant 0, un opérateur $\mathcal{A}$ (1) et une réalisation (A,D(A)) autoadjointe de $\mathcal{A}$. Nous avons alors le

<u>Théorème 2</u> : On suppose que les champs X_i $(i = 1,\ldots,p)$ sont d'ordre ≤ 1 en 0, et que leurs parties principales homogènes $\hat{X}_i$ vérifient la condition (C). Alors

i) les X_i vérifient la condition (C) au voisinage de 0 et le noyau $e(\lambda)$ est C^∞ sur un voisinage de (0,0).

ii) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \lambda^{-\nu/2} e(\lambda;0,0) = \grave{e}(1;0,0)$

où $\grave{e}$ est la fonction spectrale de la réalisation définie au théorème 1 de l'opérateur $\hat{\mathcal{A}} = \sum\limits_{i=1}^{p} \hat{X}_i^* \cdot \hat{X}_i$.

<u>Démonstration</u> : On note $\Omega_t = h_t(\Omega)$ et $\mathcal{A}_t = t^{-2} h_{t_*}(\mathcal{A})$. Par (8) on sait que $\mathcal{A}_t\varphi \mapsto \grave{\mathcal{A}}\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; $\grave{\mathcal{A}}$ vérifiant la condition (C), il en résulte que $\mathcal{A}_t$ vérifie cette condition sur un voisinage de 0 pour t assez grand et revenant par h_t^{-1} on voit que $\mathcal{A}$ vérifie la condition (C) sur un (autre) voisinage de 0.

On reprend maintenant la démonstration du théorème 1 : H_t est l'isométrie de $L^2(\Omega_t)$ sur $L^2(\Omega)$ définie par $H_t u = t^{\nu/2}.u \circ h_t$. On définit une réalisation $(A_t, D(A_t))$ de $\mathcal{A}_t$ en posant :

$$(9) \qquad \begin{cases} D(A_t) = H_t^{-1} D(A) \\ A_t \quad = t^{-2} H_t^{-1} A H_t \end{cases}$$

A_t est positif autoadjoint dans $L^2(\Omega_t)$; on note $E_t(\lambda)$ la résolution de l'identité associée à A_t et $e_t(\lambda)$ son noyau. On tire de (9) :

$$E(t^2\lambda) = H_t \, E_t(\lambda) H_t^{-1}$$

et

$$(10) \qquad e(t^2\lambda \,;0,0) = t^{\nu} e_t(\lambda;0,0)$$

Il reste maintenant à utiliser la convergence "$A_t \mapsto A$" pour établir :

$$(11) \qquad e_t(\lambda;0,0) \mapsto \grave{e}(\lambda;0,0)$$

le point ii) du théorème en résultant directement avec (10). Pour prouver (11) on utilise d'abord un théorème de Kato [4], qui nous assure que :

$$\forall\, f \in L^2_{comp}(\mathbb{R}^n) \;:\; E_t(\lambda) f \xrightarrow[t \to +\infty]{} \grave{E}(\lambda) f \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}^n) .$$

Appliquant le théorème des noyaux de Schwartz, on en tire :

(12) $$e_t(\lambda) \underset{t \mapsto +\infty}{\longrightarrow} e(\lambda) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

D'autre part, notant $\mathcal{A}_\infty = \hat{\mathcal{A}}$, la famille $\mathcal{A}_t$ $(t \in [t_1,\infty])$ vérifie la condition (C) ; on déduit alors d'une version uniforme en $t \in [t_1,\infty]$ du théorème de sous-ellipticité des opérateurs (1) que, pour un voisinage ω de 0 et pour t_1 assez grand, l'ensemble $\{e_t(\lambda)|_{\omega\times\omega}$; $t \in [t_1,\infty]\}$ est borné dans $C^\infty(\omega\times\omega)$. Ceci, joint à (12), prouve que :

$$e_t(\lambda) \underset{t \mapsto +\infty}{\longrightarrow} \hat{e}(\lambda) \quad \text{dans } C^\infty(\omega\times\omega)$$

et (11) en découle immédiatement.

§ 3. CONSTRUCTIONS DES PARTIES PRINCIPALES

On se donne un opérateur (1) $\mathcal{A}$ sur Ω, vérifiant la condition (C), et $(A,D(A))$ une extension positive autoadjointe de $\mathcal{A}$ dans $L^2(\Omega)$. Le problème est maintenant le suivant : étant donné $x_0 \in \Omega$, trouver des dilatations h_t de centre x_0 telles que $\mathcal{A}$ soit d'ordre ≤ 2 (en x_0) et que la partie homogène de degré 2 de $\mathcal{A}$ vérifie aussi (C). Le premier cas où nous pouvons conclure est le suivant :

<u>Théorème 3</u> : On suppose que $V_2(x_0) = \mathbb{R}^n$; alors $e(\lambda)$ est C^∞ sur un voisinage de (x_0,x_0) et si l'on pose

$$\nu = 2n - \dim V_1(x_0)$$

la limite

$$\lim_{\lambda \mapsto +\infty} \lambda^{-\nu/2}\, e(\lambda; x_0, x_0)$$

existe et est > 0 (et finie).

<u>Démonstration</u> : On peut supposer que $x_0 = 0$; on pose $W_1 = V_1(0)$ et on considère un supplémentaire W_2 de W_1 dans $\mathbb{R}^n = V_2(0)$. On a donc

$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$ et on définit h_t $(t>0)$ comme au paragraphe 2 : h_t est l'homothétie de rapport t^k sur W_k, $k = 1,2$.

Soit $\check{X}_i$ le champ constant valant $X_i(0)$. Le champ $X_i - \check{X}_i$ s'annule en 0 et est donc d'ordre ≤ 1 en 0; $\check{X}_i$ lui est homogène de degré 1 puisque $X_i(0) \in V_1(0) = W_1$; par suite X_i est lui-même d'ordre ≤ 1 en 0. Notons $\hat{X}_i$ la partie homogène de degré 1 de X_i. $X_i - \hat{X}_i$ est d'ordre ≤ 0 et il en résulte que $X_i(0) - \hat{X}_i(0) = 0$. On en déduit, avec une notation évidente, que $V_1(0) = \hat{V}_1(0)$.

De même $[X_i,X_j] - [\hat{X}_i,\hat{X}_j]$ est d'ordre ≤ 1 en 0, et $[X_i,X_j](0) - [\hat{X}_i,\hat{X}_j](0) \in W_1$. On en déduit alors que $\hat{V}_2(0) = V_2(0) = \mathbb{R}^n$. Les hypothèses du théorème 2 sont donc satisfaites et :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-\nu/2} e(\lambda;0,0) = \hat{e}(1,0,0)$$

Enfin, d'après la remarque qui suit le théorème 1, $\hat{e}(1,0,0) > 0$.

Pour étudier le cas général on serait tenté de généraliser ce qui précède en définissant les W_k comme étant des supplémentaires de $V_{k-1}(x_o)$ dans $V_k(x_o)$; malheureusement, comme le montre l'étude d'exemples, cette approche est trop grossière. L'idée supplémentaire qu'on utilise est de faire d'abord un changement de variables (ou de coordonnées locales) mais pour cela nous sommes amenés à renforcer la condition (C), ou, si l'on préfère, à faire une hypothèse de généritricité.

Remarquons en effet qu'il existe un ouvert Ω' dense dans Ω tel que les fonctions $x \to \dim V_k(x)$, $k = 0,1,\ldots$ soient localement constantes sur Ω'. Nous supposerons maintenant que $x_o \in \Omega'$, ou de manière plus explicite que :

$$(C') \quad \begin{cases} \text{Il existe un ouvert } \omega \subset\subset \Omega \text{ contenant } x_o \text{ tel que :} \\ \text{i)} \quad \forall\, x \in \omega \qquad \dim V_k(x) = \dim V_k(x_o) \\ \text{ii)} \quad \exists\, r \qquad \dim V_{r-1}(x_o) < \dim V_r(x_o) = n \end{cases}$$

Pour $k = 1,\ldots,r$, on définit les espaces $W_k = V_k(x_o)/V_{k-1}(x_o)$ et on pose $W = \bigoplus_{k=1}^{r} W_k$.

Il est clair que W est de dimension n. On définit h_t pour $t > 0$, comme au paragraphe 2 : h_t est l'homothétie de rapport t^k sur W_k $(k = 1,\ldots,r)$. Nous avons alors :

<u>Théorème 4</u> : Sous l'hypothèse (C') il existe un C^∞-difféomorphisme θ de $\mathbb{R}^n$ sur W tel que :

i) $\theta(X_o) = 0$

ii) $\forall i = 1,\ldots,p$, $\theta_* X_i$ est d'ordre ≤ 1 en 0

iii) Notant $\hat{Y}_i$ la partie homogène de degré 1 de $\theta_* X_i$, les $\hat{Y}_i$ vérifient la condition (C') sur $\mathbb{R}^n$.

Ce théorème est une version d'un résultat de [6]. Indiquons seulement comment on est amené à définir θ.

Reprenant l'exemple dans $\mathbb{R}^3$, $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$ on peut remarquer que X_1 et X_2 engendrent une algèbre de Lie nilpotente, ou qu'on peut munir $\mathbb{R}^3$ d'une structure de groupe de Lie nilpotent telle que les X_i soient des champs invariants à gauche. Plus généralement on remarque que dans le cas homogène, le communateur de champs homogènes de degré p et q est homogène de degré $p + q$, qu'un champ est toujours d'ordre $\leq r$ et par conséquent que l'algèbre de Lie engendrée par des champs homogènes (de degré 1) est toujours nilpotente ; la condition (C) implique que cette algèbre est de dimension au moins n ; la condition (C') implique qu'elle est en fait de dimension exactement n.

Finalement, ce qu'on cherche, c'est mettre sur $\mathbb{R}^n$ une structure de groupe de Lie nilpotent telle que les X_i soient bien approchés par des champs invariants à gauche. Le recours aux groupes de Lie nilpotents comme modèles a déjà été utilisé par Rothschild-Stein [8], mais nous nous distinguons de [8] en considérant des groupes de même dimension que l'ouvert Ω sur lequel est posé le problème.

Passant aux algèbres de Lie, on cherche donc à approcher l'algèbre engendrée par les X_i par une algèbre de Lie nilpotente.

Pour $k = 1,\ldots,r$ on note $\mathcal{V}_k$ l'espace des champs de la forme $\sum_{|I| \leq [k]} a_I X_I$ avec $a_I \in C^\infty$; on note π_k l'opérateur de $\mathcal{V}_k$ sur W_k qui a $X \in \mathcal{V}_k$ associe la classe modulo $V_{k-1}(x_o)$ de $X(x_o) \in V_k(x_o)$. On remarque alors :

<u>Lemme 3</u> : Sous la condition (C'), il existe sur W une structure d'algèbre de Lie nilpotente telle que pour tous k et ℓ tels que $k+\ell \leq r$ on a :

$$\forall X \in \mathcal{V}_k \ , \quad \forall\, Y \in \mathcal{V}_\ell \qquad [\pi_k X, \pi_\ell Y] = \pi_{k+\ell}[X,Y]$$

<u>Démonstration</u> : On considère une base dans chaque W_k constituant ainsi une base $\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_n$ de W ; on note $[j]$ l'indice (unique!) k tel que $\mathcal{E}_j \in W_k$. On considère des champs Y_j tels que $\pi_{[j]}(Y_j) = \mathcal{E}_j$. Par construction les $Y_j(X_o)$ pour $[j] \leq k$ forment une base de $V_k(X_o)$; grâce à la condition (C') les $Y_j(x)$ pour $[j] \leq k$ forment encore une base de $V_k(X_o)$ pour x voisin de x_o. Par conséquent tout champ de $\mathcal{V}_k$ s'écrit au voisinage de x_o, sous la forme :

$$\sum_{[j]\leq k} a_j(x).Y_j \tag{13}$$

Ceci étant, pour démontrer le lemme, il nous suffit de vérifier que l'application $[\ ,\ ]$ de $\mathcal{V}_k \times \mathcal{V}_\ell$ dans $\mathcal{V}_{k+\ell}$ passe au quotient, ou que si $\pi_k X = 0$, pour $X \in \mathcal{V}_k$ et si $Y \in \mathcal{V}_\ell$ alors $\pi_{k+\ell}[X,Y] = 0$. Or, si $\pi_k X = 0$, d'après (13) X s'écrit :

$$X = \sum_{[j]=k} a_j\, Y_j + X'$$

avec $X' \in \mathcal{V}_{k-1}$ et $a_j(x_o) = 0$ pour $[j] = k$. On en déduit que

$$[X,Y] - \sum_{[j]=k} a_j[Y_j,Y] \in \mathcal{V}_{k+\ell-1}$$

et par suite que

$$[X,Y](x_o) \in V_{k+\ell-1}(X_o)$$

ce qui veut bien dire que $\pi_{k+\ell}[X,Y] = 0$

Au cours de la démonstration on a construit une application linéaire σ de W dans $\mathcal{V} = \mathcal{V}_r$ définie par $\sigma(\mathcal{E}_j) = Y_j$. σ n'est pas un homomorphisme d'algèbres de Lie cependant on a

(14) $\qquad \forall \xi \in W_k \ , \quad \forall \eta \in W_\ell \ : \{\sigma[\xi,\eta]-[\sigma\xi,\sigma\eta]\}(x_o) \in V_{k+\ell-1}(x_o)$

Pour passer des algèbres aux groupes on utilise l'application exponentielle, et on définit l'application :

$$\xi \in W \mapsto \varphi(\xi) = e^{\sigma\xi}(x_o) \in \Omega$$

où l'on a noté comme d'habitude $t \mapsto e^{t\sigma\xi}(X_o)$ la courbe intégrale du champ $\sigma\xi$ issue de x_o. φ est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans W sur un voisinage de x_o dans Ω ; on prolonge φ en difféomorphisme de W sur $\mathbb{R}^n$ et une application θ du théorème 4 est φ^{-1}.

La démonstration du théorème (voir [6]) s'inspire assez largement de Goodman [2].

Pour conclure, énonçons l'un des principaux résultats de [6]:

<u>Théorème 5</u> : Soit (A,D(A)) une réalisation positive autoadjointe d'un opérateur (1). On suppose que la condition (C') est satisfaite sur un ouvert $\omega \subset \Omega$. Alors

i) la fonction spectrale $e(\lambda)$ est C^∞ sur $\omega \times \omega$

ii) Il existe une fonction continue γ de ω dans $]0,\infty[$ telle que :

(15) $$\forall\, x \in \omega \quad : \quad \lambda^{-\nu/2} e(\lambda;x,x) \underset{\lambda \mapsto +\infty}{\to} \gamma(x)$$

où

(16) $$\nu = \sum_{k=1}^{r} k\{\dim V_k(x) - \dim V_{k-1}(x)\}$$

De plus la convergence dans (15) est uniforme sur les compacts inclus dans ω.

<u>Remarques 1</u> : Il résulte de la condition (C') que le membre de droite de (16) est indépendant de $x \in \omega$.

2 : Pour établir (15) à x_o fixé, on transforme le problème par le changement de variables θ donné au théorème 4 et on applique ensuite le théorème 2.

3 : Pour obtenir l'uniformité de la convergence dans (15) on reprend les études précédentes en adjoignant un paramètre (x_o) et en vérifiant à chaque étape une uniformité par rapport à ce paramètre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. B. Folland : Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups ; Arkiv för Mat., 13, 1975.

[2] R. Goodman : Lifting vector fields to nilpotent Lie groups ; Publications I. H. E. S., 1975.

[3] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations ; Acta Math. 119, 1967.

[4] T. Kato : Perturbation theory for linear operators ; Springer Verlag, 1966.

[5] J. J. Kohn : Pseudodifferential operators and hypoellipticity ; Proc. Symp. Pure Math., 23, Amer. Math. Soc. (1973).

[6] G. Metivier : Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'opérateurs non elliptiques ; Comm. in Partial Diff. Eq. ; vol. 1 n° 5, 1976.

[7] O. A. Oleinik, E. V. Radkevic : Second order equations with non negative caracteristic form ; Amer. Math. Soc., Providence, 1973.

[8] L. Rothschild, E. Stein : Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups;preprint, 1975.
