A. Melin
J. Sjostrand

Opérateurs intégraux de Fourier et le problème de la dérivée oblique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. nº 6, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1976-1977

OPERATEURS INTEGRAUX DE FOURIER ET LE PROBLEME DE LA DERIVEE OBLIQUE

par A. MELIN et J. SJOSTRAND

Exposé n° VI

16 Novembre 1976

§ 0. INTRODUCTION

Rappelons que Egorov-Kondratiev [2] et d'autres auteurs ont obtenu des résultats d'existence et d'unicité pour le problème de la dérivée oblique. On se propose ici de donner une paramétrixe et de faire une étude qualitative des solutions. En particulier on va établir un théorème d'extension pour les solutions. On utilisera les résultats de [3], [4]. Plus de détails seront données dans [5].

§ 1. DISTRIBUTIONS INTEGRALES DE FOURIER SUR UNE VARIETE À COINS

On considère le "coin"

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, x_{n-d+1} > 0, \dots, x_n > 0\}, \quad 1 \le d \le n.$$

On peut alors définir une variété presque analytique Λ associée à $T^*X\setminus 0$ (formellement : $\Lambda \subset \widetilde{T^*X\setminus 0}$) comme dans [3] en remplaçant la fonction de poids $|\operatorname{Im}(x,\xi)|$ par

$$\delta(x,\xi) = d(x,X) + |\operatorname{Im} \xi'| + \sum_{n-d+1}^{n} |x_j| . |\operatorname{Im} \xi_j|$$

où $(x,\xi) \in \mathbb{C}^n \times \dot{\mathbb{C}}^n$, d = distance Euclidienne, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-d})$, $\xi'' = (\xi_{n-d+1}, \dots, \xi_n)$. Soit $\Lambda \subset \widetilde{T^*X\setminus 0}$ une variété presque analytique, conique de dimension réelle 2n définie près de $(0,\xi_0)$ où $\delta(0,\xi_0) = 0$. On dit alors que Λ est Lagrangienne si

$$\sum_1^n \xi_j \, dx_j \Big|_\Lambda = \mathcal{O}(\delta(x,\xi)^N)$$

localement pour tout N, et si la différentielle de la projection $\Lambda \ni (x,\xi) \mapsto x'' \in \mathbb{C}^d$ est surjective en $(0,\xi_0)$. Localement on peut alors représenter Λ par $x' = H'_{\xi'}(x'',\xi')$, $\xi'' = -H'_{x''}(x'',\xi')$ (après éventuellement un changement de coordonnées x') où H est presque analytique et homogène de degré 1 en ξ'. On dit que Λ est positive si $\operatorname{Im} H(x'',\xi') \le 0$ pour $x_{n-d+1} \ge 0, \dots, x_n \ge 0$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-d}$; et, associées à une telle variété, on définit aussi des fonctions de phases positives non dégénérées dans $C^\infty(\bar{X} \times \dot{\mathbb{R}}^N)$, et des distributions intégrales de

Fourier correspondantes dans $\mathcal{D}'(\bar{X})$. Par transformée de Fourier partielle en x' on établit l'équivalence de deux fonctions de phase qui engendrent la même variété Lagrangienne et, en utilisant ce résultat on peut sans trop de difficultés globaliser le calcul et remplacer X par une variété "à coins". (Les détails seront donnés dans [5]).

<u>Exemples</u> : Le noyau de Poisson pour le problème de Dirichlet habituel et le noyau de Bergman pour un domaine strictement pseudoconvexe sont des OIF de ce type (voir [1]).

§ 2. PROBLEME DE LA DERIVEE OBLIQUE

Soit $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$ ouvert, borné, connexe de bord C^∞ ; $\partial X = Y$, et soit $\frac{\partial}{\partial \nu} \in C^\infty(Y; T_Y(\mathbb{R}^{n+1}))$ un champ de vecteurs sur le bord. On décompose $\frac{\partial}{\partial \nu}$ comme $\ell + g \cdot \frac{\partial}{\partial n}$ où $\ell \in C^\infty(Y\, ; T(Y))$, $g \in C^\infty(Y; \mathbb{R})$, $\frac{\partial}{\partial n}$: la normale unitaire intérieure. On suppose qu'il existe une hypersurface C^∞, fermée ; $\Gamma \subset Y$ et deux ouverts $Y_\pm \subset Y$ tels que $Y = Y_+ \cup \Gamma \cup Y_-$, $Y_+ \cap Y_- = \emptyset$, $\partial Y_+ = \partial Y_- = \Gamma$ et tels que

(2.1) $g \leq 0$ dans Y_+, $g \geq 0$ dans Y_-.

(2.2) ℓ est transversal à Γ et orienté vers Y_+

(2.3) Aucune courbe intégrale maximale de ℓ n'est entièrement contenue dans $g^{-1}(0)$.

Si $K : C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ est le noyau de Poisson, alors $P = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \nu} \circ K \in L^1_c(Y)$ a le symbole principal $p(y,\eta) = \ell(y,\eta) + i\, g(y)\, |\eta|$, si on écrit $\frac{1}{i} \ell = \ell(y, D_y)$. Dans cette situation nous avons construit ([4]) des O.I.F. $R_+ : \mathcal{D}'(Y) \to \mathcal{D}'(\Gamma)$, $E_+ : \mathcal{D}'(\Gamma) \to \mathcal{D}'(Y)$ et un opérateur $E : \mathcal{D}'(Y) \to \mathcal{D}'(Y)$, qui est une intégrale singulière sur une famille lisse d'O.I.F., tels que $\mathcal{P} = \binom{P}{R_+} : \mathcal{D}'(Y) \to \mathcal{D}'(Y) \times \mathcal{D}'(\Gamma)$ a pour paramétrixe $\mathcal{E} = (E, E_+)$. La variété Λ_{E_+} associée à E_+ est formellement :

$$\Lambda_{E_+} = \{(\exp t\, \mathcal{H}_p(\rho), -\pi(\rho)) ; \rho \in \widetilde{T^*_\Gamma(Y)\setminus 0},\ \ell(\rho) = 0,\ t \in \mathbb{C}\}$$

où $\pi : \widetilde{T^*_\Gamma Y} \to \widetilde{T^*\Gamma}$ est le projecteur naturel. (En particulier on a $\operatorname{supp\,sing}(E_+ u) \subset \bigcup_{z \in \Gamma} \gamma_z$ où γ_z est la courbe intégrale maximale de $\frac{\partial}{\partial \nu}$, passant par z, pour tout $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$).

Une étude géométrique de Λ_{E_+} donne l'existence de fonctions de phase globales : soit $z_o \in \Gamma$ et $\gamma_o \subset Y$ la courbe intégrale maximale de $\frac{\partial}{\partial \nu}$ passant par z_o. Soient $z_1, \dots, z_{n-1}$ des coordonnées locales dans Γ. Alors pour toute $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ à support dans un voisinage de z_o on a

$$(2.4) \qquad E_+u(y) \equiv \iint e^{i(\Psi(y,\zeta)-\langle z \,,\zeta\rangle)} b(y,\zeta)\, u(z) dz \frac{d\zeta}{(2\pi)^{n-1}} \bmod C^\infty(Y).$$

Ici $\mathcal{J}m\Psi \geq 0$ avec égalité sur $\gamma_o \times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$ et avec inégalité stricte en dehors d'un voisinage conique de cet ensemble. De plus $b \in S^o_c(Y \times \mathbb{R}^{n-1})$ et $P(b\, e^{i\Psi}) \sim 0$. (On peut même trouver une phase globale dans $C^\infty(Y \times (T^*\Gamma\backslash 0))$ qui engendre Λ_{E_+}).

On considère maintenant le problème de dérivée oblique : $\Delta u = v$, $\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial \nu} = v_1$, $u,v \in C^\infty(\bar{X})$, $v_1 \in C^\infty(Y)$ et comme Egorov-Kondratiev on ajoute une condition supplémentaire : $Tu = v_2 \in C^\infty(\Gamma)$ où $T = R_+(K^*K)^{-1}K^*$. On a alors une paramétrixe $u \equiv F_o v + F_1 v_1 + F_2 v_2$, où $F_1 = KE$, $F_2 = KE_+$, $F_o = (I - F_1 \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \nu} - F_2 T)G$ et G est le noyau de Green pour le problème de Dirichlet.

On introduit les espaces

$$A^N(X) = \{u \in C^\infty(X) \,;\, \Delta u \in C^\infty(\bar{X}),\ u(x) = \mathcal{O}(d(x,Y)^{-N})\}$$

$$A(X) = \bigcup_{N=1}^{\infty} A^N(X) .$$

Pour $u \in A(X)$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ est bien définie dans $\mathcal{D}'(Y)$, ainsi que $v = Tu$ dans $\mathcal{D}'(\Gamma)$ et on a $u \equiv F_1 \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial \nu} + F_2 v \bmod C^\infty(\bar{X})$. En particulier si $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in C^\infty(Y)$ on a

$$u \equiv F_2 v = KE_+ v \quad \bmod C^\infty(\bar{X}) .$$

Le calcul esquissé dans le paragraphe 1 implique que KE_+ est un O.I.F. et si $z_o \in \Gamma$, $z_1,\dots,z_{n-1}$ sont comme précédemment et si $v \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ a son support près de z_o on peut même écrire

(2.5) $$KE_+ v(x) \equiv \iint e^{i(\varphi(x,\zeta)-\langle z,\zeta\rangle)} a(x,\zeta)v(z)dz \frac{d\zeta}{(2\pi)^{n-1}} \bmod C^\infty(\overline{X})$$

si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\times \dot{\mathbb{R}}^{n-1})$ et $a \in S^o_c(\mathbb{R}^{n+1}\times \dot{\mathbb{R}}^{n-1})$ satisfont aux conditions suivantes :

(2.6) $\varphi(x,\lambda\zeta) = \lambda\varphi(x,\zeta)$, $\forall \lambda > 0$

(2.7) $(\varphi'_x)^2$ s'annule d'ordre infini sur $Y\times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$

(2.8) $\varphi\big|_{Y\times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}} = \Psi$

(2.9) $\mathcal{J}m\,\varphi > 0$ en $X\times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$

(2.10) $2i \langle \varphi'_x, a'_x\rangle + \Delta a \sim \sum_{-\infty}^{1} e_j$ où $e_j \in S^j_c(\mathbb{R}^{n+1}\times \mathbb{R}^{n-1})$ s'annule d'ordre infini sur $Y\times \dot{\mathbb{R}}^{n-1}$.

(2.11) $a\big|_{Y\times \mathbb{R}^{n-1}} = b$

(On construit facilement a et φ à l'aide des séries de Taylor).

Près de γ_o on introduit

$$X_\varphi = \{x\in \mathbb{R}^{n+1} ; \mathcal{J}m\,\varphi(x,\zeta) > 0, \ \forall \zeta \in \dot{\mathbb{R}}^{n-1}\}$$

Si on choisit des coordonnées locales (y,x_{n+1}) telles que X est donné par $x_{n+1}<0$, alors $\hat{X}_\varphi$ est donné par $x_{n+1} < h_\varphi(y)$ où h_φ est une fonction lipschitzienne telle que $h_\varphi \geq 0$ avec égalité seulement dans les points de la forme $y = \exp(t\mathcal{L})(z)$, $z\in\Gamma$, $t\in\mathbb{R}$, $g(\exp(s\mathcal{L})(z)) = 0$ pour s entre 0 et t. Si C est la relation canonique associée à KE_+ et $x\in\mathbb{R}^{n+1}$ on a (formellement) $C^{-1}(\widetilde{T^*_x\mathbb{R}^{n+1}}) = \{(z,\zeta) \in \widetilde{T^*\Gamma\setminus 0} ; z = \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}(x,\zeta)\}$ et formellement $\overline{\hat{X}_\varphi}$ peut être décrit comme l'ensemble de points $x\in\mathbb{R}^{n+1}$) (près de γ_o) tels que $C^{-1}(\widetilde{T^*_x\mathbb{R}^{n+1}})$ est une variété lagrangienne négative. Plus précisément, si $z'_1,\dots,z'_{n-1}$ est une autre carte locale près de z_o et si φ' est la fonction correspondante dans (2.5) alors $|h_\varphi - h_{\varphi'}| = \mathcal{O}(1)\min(h_\varphi^N , h_{\varphi'}^N)$ localement pour tout N. On peut ainsi définir un ouvert $\hat{X} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenant X qui prend la forme $x_{n+1} < h(y)$ près de chaque courbe intégrale γ de $\frac{\partial}{\partial\nu}$ qui passe par Γ pour des coordonnées locales (y,x_{n+1}) comme ci-dessus. On définit $A(\hat{X})$ de la même manière que A(X).

<u>Théorème 2.1</u> : Si $u \in A(X)$, $\frac{\partial u}{\partial\nu} \in C^\infty(Y)$ alors u admet une extension dans $A(\hat{X})$.

<u>Esquisse de la démonstration</u> : On peut supposer que $u = KE_+v$ où $v \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ a son support près de z_o. Soit y_o un point dans γ_o et soient (y,x_{n+1}) des coordonnées locales près de y_o telles que X est donné par $x_{n+1} < 0$ et $\hat{X}$ par $x_{n+1} < h(y)$. Soit $0<\delta<1/2$ et soit X_δ donné par $x_{n+1} < h(y) + h(y)^{1/2\delta}$. Dans (2.4) on peut remplacer $b(y,\zeta)$ par

$$\tilde{b}(y,\zeta) = b(y,\zeta)\ \chi(|\zeta|^{2\delta-1}\,\mathcal{I}m\,\Psi(y,\zeta)) \in S^o_{1-\delta}$$

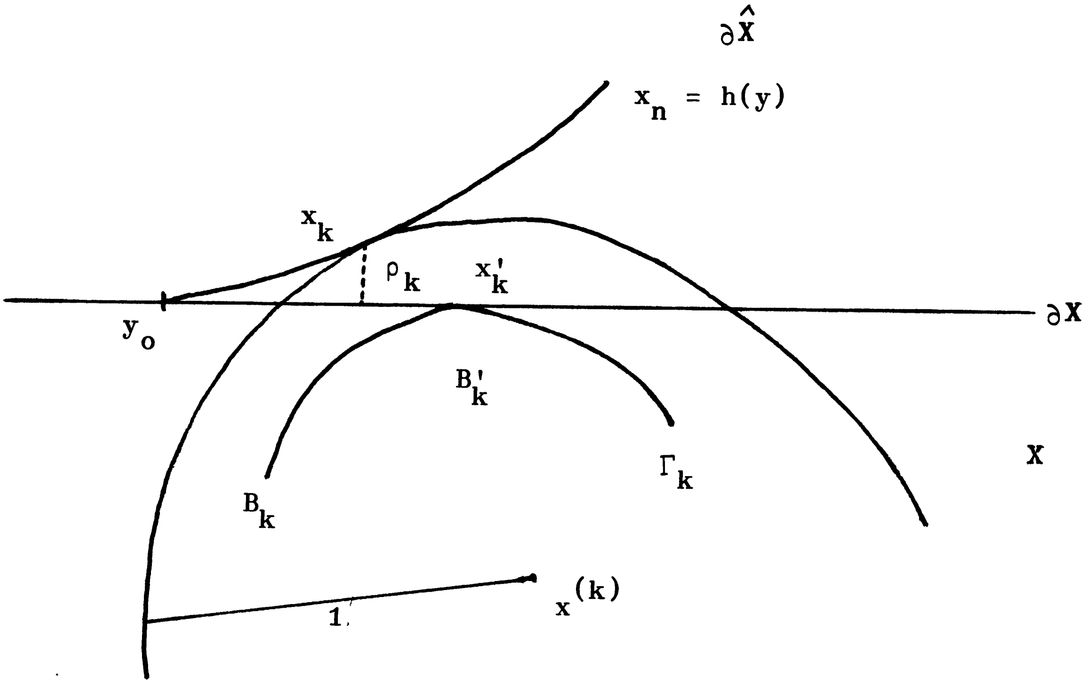
où $\chi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$, $\chi = 1$ au voisinage de 0. Dans (2.5) on peut alors remplacer a par $\tilde{a}$ satisfaisant aux (2.10), (2.11) avec e_j remplacés par $\tilde{e}_j \in S^{1-j(1-2\delta)}_{1-\delta}$ et b par $\tilde{b}$. Un tel $\tilde{a}$ peut être construit tel que $\tilde{a}(y,x_{n+1},\zeta) = 0$ pour $|\zeta|^{2\delta-1}\mathcal{I}m\,\Psi(y,\zeta) \geq C$ si supp $\chi \subset [-C,C]$.

Maintenant $h(y) \leq$ const. $(\inf_{|\zeta|=1} \mathcal{I}m\,\Psi(y,\zeta))$ et donc $h(y)^{1/2\delta}|\zeta|$ est borné dans supp $\tilde{a}$. Il est clair que $\mathcal{I}m\,\varphi(y,x_{n+1},\zeta) \geq -(\text{const.})$ dans $(X_\delta \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap$ supp $\tilde{a}$ et que l'intégrale (2.5), avec a remplacé par $\tilde{a}$, définit une fonction $\tilde{u}$ dans $C^\infty(X_\delta)$. On vérifie facilement que $\Delta\tilde{u} \in C^\infty(\overline{X}_1)$ et que $\tilde{u}$ est de croissance lente au bord. Notre construction locale se globalise facilement pour donner le théorème.

D'autre part on ne peut pas remplacer $\hat{X}$ (ou X_δ) par un domaine beaucoup plus grand dans le théorème 2.1 :

<u>Théorème 2.2</u> : Soit $\hat{X}$ donné par $x_n < h(y)$ près de $y_o \in \gamma_o$ et soit $X_1 \supset X$ un ouvert tel que tout $u \in A(X)$ avec $\frac{\partial u}{\partial\nu} \in C^\infty(Y)$ a une extension dans $A(X_1)$. Alors au voisinage de y_o, X_1 ne peut pas contenir un domaine donné par $x_{n+1} < (1+\gamma)h(y)$ si $\gamma > 0$ et si h ne s'annule pas identiquement au voisinage de y_o.

<u>Esquisse de la démonstration</u> : Remplaçant γ par 3γ on peut supposer que X_1 contient le domaine $x_{n+1} < (1+3\gamma)h(\gamma)$. Après une homothétie on peut supposer que Y est pratiquement plan comparé aux boules de rayon 1. On peut alors prendre une suite de boules $B_k = B(x^{(k)},1)$ comme sur le dessin :



où $\rho_k > 0$, $\rho_k \to 0$, $x_k \to y_o$.

Alors $B(x^{(k)}, 1+2\gamma\rho_k) \subset X_1$ et il existe $\zeta_k \in \mathbb{R}^{n-1}$ avec $|\zeta_k| = 1$ tel que $\mathfrak{Im}\,\varphi(x_k,\zeta_k) = 0$. On pose

$$\varphi_k(x) = \varphi(x,\zeta_k) - \varphi(x_k,\zeta_k),\quad u_{\lambda,k}(x) = a(x,\lambda\zeta_k)e^{i\lambda\varphi_k(x)}.$$

Alors $u_{\lambda,k}$ est borné dans $\hat{X}$ et

$$(2.12)\quad \begin{aligned} &|\partial^\alpha \Delta u_{\lambda,k}(x)| \le C_{\alpha,N}(\lambda^{-N} + d(x,X)^N\lambda^{2+|\alpha|}),\ x \in \hat{X},\ \lambda \ge 1 \\ &|\partial_y^\alpha \tfrac{\partial}{\partial\nu} u_{\lambda,k}(y)| \le C_{\alpha,N}\,\lambda^{-N},\ y \in Y,\ \lambda \ge 1 \end{aligned}$$

pour tous α et N. Utilisant l'hypothèse sur X_1 et de l'analyse fonctionnelle on trouve que pour tout $m \ge 0$ il existe $v_{\lambda,k}^{(m)} \in C^\infty(X_1)$ telle que

$v^{m}_{\lambda,k}\big|_X = u_{\lambda,k}\big|_X$ et telle que

$$(2.13) \qquad \sup_{X_1}\Big(\sum_{|\alpha|\le m} |\partial^\alpha \Delta v^{(m)}_{\lambda,k}(x)| + |v^{(m)}_{\lambda,k}(x)\, d(x,\partial X_1)^M|\Big) \le C_m$$

où $M \ge 0$ est indépendant de m. La formule de Taylor montre alors que

$$(2.14) \qquad |\Delta v^{(m)}_{\lambda,k}(x)| \le C_{m,N}(\lambda^{-N} + \rho^m_k)\ , \quad x \in B(x^{(k)}, 1+\gamma\rho_k)$$

pour tous N et m.

On peut considérer grad $\varphi_k(x_k)$ comme un vecteur $\xi_k \in \mathbb{R}^{n+1}$. Par le théorème de Cauchy-Kowalewski non-linéaire, on peut trouver dans un voisinage U de y_o des fonctions Ψ_k déterminées à une constante près telles que

$$(\text{grad } \Psi_k)^2 = 0\ , \quad \text{grad } \Psi_k\big|_{\partial B_k} = -\,\text{grad} \langle x,\xi_k\rangle\big|_{\partial B_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\, \Im m\, \Psi_k < 0.$$

Il existe une surface de niveau unique Γ_k de $\Im m \Psi_k$ telle que $\Gamma_k \subset \bar{X}$, $\partial X \cap \Gamma_k \neq \emptyset$. On a $\partial X \cap \Gamma_k = \{x'_k\}$ et on pose :
$B'_k = \{x\,;\ \Im m\, \Psi_k(x) < \Im m\, \Psi_k(x'_k)\}$. On détermine maintenant Ψ_k complètement en demandant que

$$\Im m\, \Psi_k\big|_{\Gamma_k} = 0\ , \quad \text{Re } \Psi_k(x_k) = -\,\text{Re } \varphi_k(x_k) = 0\ .$$

On peut finalementconstruire $c_k(x,\lambda) \in S^o_c(\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}_+)$ à support dans un petit voisinage conique de $\{y_o\}\times\mathbb{R}_+$ tels que $c_k(x_k,\lambda) = 1$ et

$$(2.15) \qquad |\partial^\alpha \Delta w_{\lambda,k}(x)| \le C_{\alpha,N}\ \lambda^{-N}\ , \ x \in \complement B'_k\ , \ \lambda \ge 1$$

pour tous α, N, si $w_{\lambda,k} = c_k(x,\lambda)e^{i\lambda\Psi_k(x)}$. Avec
$U_{\lambda,k} = w_{\lambda,k}\frac{\partial}{\partial n}u_{\lambda,k} - u_{\lambda,k}\frac{\partial}{\partial n}w_{\lambda,k}$ on pose $I_{\lambda,k} = \int_{\Gamma_k} U_{\lambda,k}\, d\sigma$,
$d\sigma$ = densité euclidienne.

(2.12), (2.15) et la formule de Green donnent alors :

(2.16) $$|I_{\lambda,k} - \int_{\partial B_k} U_{\lambda,k} d\sigma| \le C(\lambda^{-N} + \rho_k^N)$$

D'autre part $\int_{\partial B_k} U_{\lambda,k} d\sigma$ peut être calculée avec la méthode de la phase stationnaire (complexe) et on obtient

(2.17) $$|I_{\lambda,k}| \ge C\lambda^{1-n/2} e^{-\lambda \operatorname{Im} \Psi_k(x_k)} - C_N(\lambda^{-N} + \rho_k^N)$$

où $C > 0$.

Si $B_k'' = B(x^{(k)}, 1+\gamma\rho_k)$, la formule de Green et (2.13), (2.14), (2.15) donnent :

(2.18) $$|I_{\lambda,k} - \int_{\partial B_k''} [w_{\lambda,k} \frac{\partial}{\partial n} v_{\lambda,k}^{(m)} - v_{\lambda,k}^{(m)} \frac{\partial}{\partial n} w_{\lambda,k}] d\sigma|$$
$$\le C_{m,N}(\lambda^{-N} \rho_k^{-M} + \rho_k^m) .$$

Sur $\partial B_k''$ on a $\operatorname{Im} \Psi_k \ge \operatorname{Im} \Psi_k(x_k) + a\rho_k$, où $a > 0$. L'inégalité (2.13) nous donne une estimation pour $v_{\lambda,k}^{(m)}$ et $\frac{\partial}{\partial n} v_{\lambda,k}^{(m)}$ et de (2.18) on obtient

(2.19) $$|I_{\lambda,k}| \le C_{m,N}(\lambda^{-N} \rho_k^{-M} + \rho_k^m + \lambda \rho_k^{-(M+1)} e^{-\lambda \operatorname{Im} \Psi_k(x_k) - \lambda \rho_k a}).$$

De (2.17), (2.19) on obtient

(2.20) $$\lambda^{1-n/2} e^{-\lambda \operatorname{Im} \Psi_k(x_k)} \le$$
$$\le C_{m,N}(\lambda^{-N} \rho_k^{-M} + \rho_k^m + \lambda \rho_k^{-(M+1)} e^{-\lambda \operatorname{Im} \Psi_k(x_k) - \lambda \rho_k a}) .$$

On pose $\lambda = \lambda_k = A |\log \rho_k| . \rho_k^{-1}$ où $A > 0$ et $aA - M - 1 > n/2$. Alors pour k assez grand on obtient

$$\lambda_k^{1-n/2} e^{-\lambda \operatorname{Im} \Psi_k(x_k)} \ge 2 C_{m,N} \lambda_k \rho_k^{-(M+1)} e^{-\lambda_k \operatorname{Im} \Psi_k(x_k) - \lambda_k \rho_k a}$$

et (2.20) donne

(2.21) $$\lambda_k^{1-n/2} e^{-\lambda_k \operatorname{Im} \Psi_k(x_k)} \le 2 C_{m,N}(\lambda_k^{-N} \rho_k^{-M} + \rho_k^m).$$

Maintenant $\Im m \Psi_k(x_k) \le C\rho_k$, donc

$$e^{-\lambda_k \Im m \Psi_k(x_k)} \ge e^{-\lambda_k C \rho_k} = \rho_k^{CA}$$

et on obtient

$$\lambda_k^{1-n/2} e^{-\lambda_k \Im m \Psi_k(x_k)} \ge \rho_k^{n/2 + CA}$$

pour k assez grand. Il suffit alors de choisir N et m assez grands dans (2.21) pour obtenir une contradiction.

Remarque 2.3 : Il serait intéressant de savoir si l'on a un résultat correspondant dans la catégorie analytique ; peut-on avoir un théorème d'extension pour les fonctions harmoniques, solutions de $\Delta u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand : Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö. Astérisque 34-35 (1976), 123-164.

[2] Yu V. Egorov, V. A. Kondratiev : The oblique derivative problem. Math. USSR. Sb. 7(1969), 139-169.

[3] A. Melin et J. Sjöstrand : Fourier integral operators with complex valued phase functions. Springer Lecture Notes, 459 (1975), 120-233.

[4] A. Melin et J. Sjöstrand : Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem. Comm. in Partial Differential Equations, 1 (1976), 313-400.

[5] A. Melin et J. Sjöstrand : A paraître.
