Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

G. Lumer

Équations d'évolution en norme uniforme (conditions nécessaires et suffisantes de résolution et holomorphie)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 5, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A5_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 6 - 1 9 7 7

EQUATIONS D'EVOLUTION EN NORME UNIFORME (CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES DE RESOLUTION ET HOLOMORPHIE).

par G. LUMER

Exposé n° V

16 Novembre 1976

Nous considérons des équations d'évolution du type $\partial u/\partial t = Au$, $u(0,.) = f(.)$, en norme uniforme, A étant un opérateur local sur un espace localement compact Ω, possèdant une "bonne théorie du potentiel" (suffisamment d'ouverts réguliers, et un "principe du maximum" ou similaire). Le contexte, et plus précisément les notions, terminologie, et notations que nous allons utiliser sont celles de [Lu 1], [Lu 2], [Lu 3]. Le niveau de généralité est similaire à celui d'une théorie axiomatique du potentiel de Brelot, (en fait notre contexte est moins restrictif). En même temps nous obtenons des résultats qui, pour autant que nous sachions, sont nouveaux même dans des situations très concrètes, apparemment même (en grande partie) pour le laplacien ordinaire dans R^n. Les résultats dont nous allons parler ici sont en partie publiés ou à paraître, [Lu 1], [Lu 2], [Lu 3], [Lu 4], [Lu 5], [Lu - P], et en partie encore non rédigés.

$\mathcal{O}(\Omega) = \mathcal{O}$ désigne l'ensemble des ouverts non vides de Ω. Pour $V \in \mathcal{O}$, $C(V) = \{$fonctions continues à valeurs complexes, sur $\Omega\}$, $C_o(V) = \{f \in C(V) :$ f s'annule à l'infini dans $V\}$. Pour chaque $V \in \mathcal{O}$, l'opérateur local A opère dans $C(V)$ avec domaine $D(A,V) \subset C(V)$. ("Opérateur" veut toujours dire ici "opérateur linéaire").

Il nous semble que le mieux soit de décrire les problèmes et résultats qui nous intéressent sur un exemple simple et concret, et ensuite énoncer -ou donner des indications sur- les résultats dans leur forme générale.

§ 1. L'EXEMPLE DU LAPLACIEN

Nous prenons $\Omega = R^n$, $A = \Delta$ comme opérateur local sur Ω (voir [Lu 1]), c'est-à-dire avec $D(\Delta,V) = \{f \in C(V) : \Delta f \text{ (distribution)} \in C(V)\}$ $\forall\, V \in \mathcal{O}$ Pour chaque $V \in \mathcal{O}$ on définit l'opérateur Δ_V dans l'espace de Banach $C_o(V)$ (muni de la norme du "sup", i.e. la norme uniforme), par

$$D(\Delta_V) = \{f \in C_o(V) : \Delta f \text{ (distribution)} \in C_o(V)\} =$$

$$\{f \in C_o(V) \cap D(\Delta,V) : \Delta f \in C_o(V)\}. \tag{1}$$

$$\Delta_V f = \Delta f \text{ dans } V \text{ , pour } f \in D(\Delta_V).$$

Dans ces conditions, l'équation d'évolution, (équation de la chaleur), "$\partial u/\partial t = \Delta u$, $u(0,.) = f(.)$, posée en norme uniforme", c'est le "problème de Cauchy abstrait" suivant, dans l'espace de Banach $C_o(V)$:

$$\frac{du}{dt} = \Delta_V u$$

(2)

$$u(0)= f \in D(\Delta_V),$$

auquel nous ferons allusion par la suite simplement comme "le problème de Cauchy pour V" ou " le p.c. pour V". On sait , [V] p.130, 132, que (2) est uniformément bien posé si et seulement si Δ_V est le générateur d'un semi-groupe dans $C_o(V)$ (que nous appelons alors "semi-groupe solution" ou "s.g. solution", et écrivons symboliquement $e^{t\Delta_V}$). Lorsque cela est le cas, i.e. lorsque Δ_V est générateur d'un s.g. dans $C_o(V)$, nous disons que "le p.c. (correspondant à Δ) est résoluble pour $V \in \mathcal{O}$".

Le p.c., à cause de la convergence uniforme, est un problème plus exigent que le problème correspondant en norme L^2 (problème variationnel) et on peut s'attendre à ce qu'il ne soit pas toujours résoluble, même pour des ouverts assez simples (voir 4, Exemples).

1. <u>Question</u> : Quels sont exactement les ouverts de $\Omega = R^n$ pour lesquels le p.c. (correspondant à Δ) est résoluble.

Pour donner une réponse, nous introduisons la notion de "barrière de Cauchy pour V". On appelle ainsi une fonction h réelle, définie dans V près de ∂V, i.e. définie dans $V\setminus K$, K compact $\subset V$, $0 < h \in D(\Delta, V\setminus K)$, h "s'annule sur ∂V", et $(\Delta-1)h \leq 0$, (h est dite "$(\Delta-1)$-surharmonique"). On a

2. <u>Théorème</u> : Le p.c. (correspondant à Δ) - i.e. le problème (2)- est résoluble pour $V \in \mathcal{O}$, si et seulement si $\exists$ une barrière de Cauchy pour V.

3. <u>Théorème</u> : Si la condition du théorème précédant est satisfaite, i.e. si le p.c. est résoluble pour V, $e^{t\Delta_V}$ est un semi-groupe de Feller (i.e. positif, et à contraction).

Le p.c. est en particulier résoluble pour tout $V \in \mathcal{O}$ borné, régulier (au sens de la théorie du potentiel), et pour de tels ouverts $\exists\ \Delta_V^{-1}$ borné défini partout ; Δ_V^{-1} est alors un potentiel de Hunt ([H], p.190), et on a

$$\text{(3)} \qquad \text{s-}\lim_{t\to\infty} e^{t\Delta_V} = 0.$$

("s-lim" signifie "limite au sens de la convergence forte").

4. Exemples : Contrairement à ce qui se passe pour le problème correspondant en norme L^2 (problème variationnel), le p.c. n'est pas toujours résoluble pour des ouverts bornés. Exemple : $\Omega = R^3$, $V = \{\text{boule unité ouverte}\} \setminus \{0\}$; il n'est pas difficile de montrer qu'il ne peut y avoir de barrière de Cauchy pour V (voir [Lu 1], corollaire 6.7).

Observons aussi que même avec le laplacien ordinaire il peut arriver que le p.c. soit résoluble alors que le problème de Dirichlet ne l'est pas ; i.e. $\exists$ des ouverts non réguliers pour lesquels le p.c. est résoluble. Un exemple immédiat est : $\Omega = R^2$, $V = R^2 \setminus \{\text{boule unité fermée}\}$. V n'est pas régulier (pour le problème de Dirichlet) mais le p.c. est résoluble pour V (une barrière de Cauchy pour V est : $h = \log r$ près du cercle $\{r = 1\}$, $h = e^{-r}$ près de $r = \infty$, r désignant la distance à l'origine).

Dans tout ce qui précède, démonstrations des résultats énoncés, existence ou non existence de barrières, etc., un rôle fondamental est joué (outre l'existence de suffisamment d'ouverts réguliers) par :

a) La "dissipativité locale" de Δ (propriété du type "principe local du maximum"), i.e. la propriété suivante :

(4) Si $V \in \mathcal{O}$, $\bar{V}$ compact, $f \in C(\bar{V})$ et $f|V$ (f restreint à V) $\in D(\Delta, V)$, avec $\max_{\partial V}|f| < \|f\|_{C(\bar{V})}$, alors $\exists\ x \in V$, avec $|f(x)| = \|f\|_{C(\bar{V})}$, et

$$\mathrm{Re}((\Delta f)(x)\overline{f(x)}) \leq 0.$$

b) Les principes du maximum globaux qui se déduisent de la dissipativité locale, tels que :

5. Théorème : Soit $V \in \mathcal{O}$, $\bar{V}$ compact, h réelle $\in C(\bar{V})$, $(\Delta-1)$-surharmonique dans V (i.e. $h|V \in D(\Delta,V)$, $(\Delta-1)h \leq 0$ dans V), et soit u réelle $\in C(\bar{V})$, $(\Delta-1)$-harmonique dans V (i.e. $u|V \in D(\Delta,V)$, $(\Delta-1)u = 0$ dans V). Alors

$$u \leq h \text{ sur } \partial V \Rightarrow u \leq h \text{ dans } V. \tag{5}$$

On peut aussi remplacer ici 1 dans "Δ-1" par un $\lambda > 0$ quelconque.

6. Théorème : Soit $V \in \mathcal{O}$, $\bar{V}$ compact, u complexe $\in C(\bar{V})$, $(\Delta-\lambda)$-harmonique, avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Alors

$$|u(x)| \leq \max_{\partial V} |u| \,, \quad \forall\, x \in V. \tag{6}$$

Le théorème 6 est valable pour des fonctions et des λ complexes ; il intervient dans la démonstration du résultat suivant, concernant l'holomorphie des semi-groupes solution du p.c.

7. Théorème : Pour tout $V \in \mathcal{O}(R^n)$ pour lequel le p.c. (correspondant à Δ) est résoluble, le s.g. solution est holomorphe.

Observons qu'il est en général beaucoup plus difficile d'établir l'holomorphie d'un semi-groupe en norme uniforme , comme c'est le cas ci-dessus, qu'en norme L^2. On donnera plus loin, dans le contexte général, un résultat plus précis concernant l'holomorphie des s.g. solution du p.c.

§ 2. EQUATIONS D'EVOLUTION EN NORME UNIFORME DANS LE CONTEXTE GENERAL

La situation dans le contexte général mentionné au début, est en fait très similaire à celle que nous avons esquissée ci-dessus pour l'exemple très particulier du laplacien. Nous allons indiquer cela rapidement. Pour les précisions concernant le contexte général, nous renvoyons à [Lu 1].

Dans le contexte général, $\forall\, V \in \mathcal{O} = \mathcal{O}(\Omega)$ on définit l'opérateur A_V, et l'on introduit le p.c. (correspondant à A) pour V, en remplaçant "Δ" par "A" dans (1), et (2), respectivement. On suppose que l'opérateur local A est réel, localement fermé , localement dissipatif (voir [Lu 1], et (4) ci-dessus), et on suppose des conditions appropriées concernant les ouverts réguliers de Ω (de façon précise, on demande à cet égard que soit satisfaite la condition nécessaire et suffisante du théorème 3.1 de [Lu 1] , avec une famille exhaustive $\mathcal{R}$ d'ouverts réguliers). Dans ces conditions le théorème 2 est remplacé par le résultat général suivant

8. Théorème : Le p.c. (correspondant à A) est résoluble pour $V \in \mathcal{O}$ σ-compact, si et seulement si $\exists$ une barrière de Cauchy pour V et $D(A_V)$ est dense.

" $\exists$ une barrière de Cauchy pour V" est défini comme dans § 1 , et équivaut exactement dans la terminologie de [Lu 1] p.422, 423, à "V est quasi régulier à l'infini par rapport à 1-A".

De même les théorèmes 3, 5, 6, sont remplacés par des résultats similaires valables dans le contexte général, (voir [Lu 1], [Lu 2], [Lu 3]). Les résultats que l'on obtient permettent entre autres de traiter en norme du sup certaines équations singulières liées au changement de temps en processus de Markov (voir [Lu 1]) . (Un exemple simple est : $\partial u|\partial t = r^{\alpha}\Delta u$, $u(0,.) = f(.)$, $u(t,.)$, $f \in D((r^{\alpha}\Delta)_V)$, r distance à 0, $0 < \alpha$, $\Omega = R^n \setminus \{0\}$).

Par des méthodes similaires à celles utilisées pour le p.c. on peut aussi traiter en norme uniforme le "problème de Cauchy avec valeurs au bord continues indépendantes du temps", $\partial u/\partial t = Au$, $u(0,.) = f(.)$, $u(t,.)|\partial V = f(.)|\partial V$ pour $t \geq 0$, $u(t,.), f \in D(\ )$♦ , $\bar{V}$ compact (ou $V \in \mathcal{O}$ en travaillant dans le compactifié de Ω par un point). Ceci est décrit dans [Lu 3], [Lu 5] .

En ce qui concerne l'holomorphie des s.g. solution, au lieu des caractérisations usuelles des semi-groupes holomorphes sur un espace de Banach, [F] p.101 et suivantes, [Y], il nous faut utiliser la caractérisation suivante :

9. Théorème : Soit X un espace de Banach, e^{tB} un s.g. sur X (de générateur B). Alors e^{tB} est holomorphe si et seulement si $\exists$ des constantes M, $\omega \geq 0$, telles que :

♦ $D(\ ) \subset C(\bar{V})$ est le domaine de l'opérateur qui remplace A_V pour le problème en question (voir [Lu 3]).

1) La résolvante de B, R_λ, existe pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$.
2) $\|\lambda R_\lambda\| \leq M$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$.

A l'aide du théorème 9, et de la version générale du théorème 6, on peut démontrer le suivant

10. Théorème : Supposons le p.c. résoluble pour Ω. Alors les semi-groupes solution sont holomorphes avec des constantes M,ω (définies au théorème 9 ci-dessus) fixes, pour tous les $V \in \mathcal{O}$ relativement compacts pour lesquels le p.c. est résoluble, si et seulement si le s.g. solution pour Ω est holomorphe. Si cette dernière condition est satisfaite, le s.g. solution pour tout $V \in \mathcal{O}$ (relativement compact ou non) pour lequel le p.c. est résoluble, est holomorphe, avec constantes M, ω, fixes.

§ 3. RELATION DU P.C. AVEC LE PROBLEME L^2 CORRESPONDANT

Considérons d'abord l'exemple du laplacien (section 1), V relativement compact $\in \mathcal{O}(R^n)$. Le problème (variationnel) L^2, correspondant en norme L^2 au p.c. pour V, est obtenu en remplaçant dans (2), Δ_V par l'opérateur variationnel (changé de signe) $\mathcal{A}_V$, qui correspond à la forme sesquilinéaire (définie sur $H_o^1(V) \times H_o^1(V)$) suivante

$$(7) \qquad a(u,v) = \sum_{j=1}^{n} \int_V \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}\, dx \quad , \ u,v \in H_o^1(V) \ ;$$

(i.e. l'opérateur qui, dans la terminologie de [Li] chap.IV, "est défini par le triplet $(H_o^1(V),\ L^2(V), -a(u,v))$", $a(u,v)$ étant donnée par (7)). Comme il est bien connu, $-\mathcal{A}_V$ est générateur d'un s.g. holomorphe dans $L^2(V)$, qui est le s.g. solution pour le problème L^2 mentionné.

R. Beals a montré récemment (communication orale) que l'on a

$$(8) \qquad \Delta_V \subset \mathcal{A}_V .$$

Nous avons étendu ce résultat au contexte général, sous des hypothèses appropriées. Ici contexte général veut dire le contexte de la section 2 précédante, où en outre on a muni Ω d'une mesure positive μ qui par restriction à $V \in \mathcal{O}$ permet de définir $L^2(V) = L^2(V,\mu)$, et où on se donne $\forall\ V \in \mathcal{O}$ (ou pour une certaine classe d'ouverts) un triplet $(H_V, L^2(V), -a(u,v))$ définissant un opérateur (suivant la terminologie de

[Li] chapitre IV), opérateur "variationnel" que nous désignerons par $\mathcal{A}_V$. $D(\mathcal{A}_V) \subset H_V \subset L^2(V)$, $\mathcal{A}_V : D(\mathcal{A}_V) \mapsto L^2(V)$. On fait les hypothèses nécessaires sur la relation entre H_{V_1} et H_{V_2} lorsque $V_1 \subset V_2$, et sur la densité des fonctions de H_V "à support compact". Dans ces conditions, si on suppose pour $V \in \mathcal{O}$ σ-compact qu'il est relativement compact, que $a_V(u,v)$ satisfait une condition de coercivité appropriée, et qu'il y a suffisamment d'ouverts ("très réguliers") $G \subset V$ pour lesquels $A_G \subset \mathcal{A}_G$, on peut montrer que

(9) $$A_V \subset \mathcal{A}_V .$$

Si en outre le p.c. est résoluble pour V on peut montrer que

(10) $$\mathcal{A}_V = \overline{A_V}$$

(fermeture de A_V par rapport à la norme $L^2(V)$).

Ces relations (9), (10), entre le p.c. et le problème variationnel L^2 correspondant, ont des applications intéressantes à l'un et à l'autre de ces problèmes, dans de nombreuses situations concrètes.

Observons que (9) est en général faux si V n'est pas relativement compact.

BIBLIOGRAPHIE

[F] A. Friedman : Partial differential equations, Holt Rinehart and Winston, New York 1969.

[H] F. Hirsch : Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels, Annales Inst. Fourier, 22 fasc. 1 (1972), p.89-210.

[Li] J. Lions : Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Presses de l'Université de Montréal 1965.

[Lu 1] G. Lumer : Problème de Cauchy pour opérateurs locaux et "changement de temps", Annales Inst. Fourier, 25, fasc. 3 et 4 (1975), p.409-446.

[Lu 2] G. Lumer : Problème de Cauchy pour opérateurs locaux, C. R. Acad. Sc. Paris, 281 (1975), série A, p.763-765.

[Lu 3] G. Lumer : Problème de Cauchy avec valeurs au bord continues, C. R. Acad. Sc. Paris, 281 (1975), série A, p.805-807.

[Lu 4] G. Lumer : Problème de Cauchy et fonctions surharmoniques, à paraître dans Séminaire de Théorie du potentiel (Paris), Lect. Notes in Math., Springer Verlag.

[Lu 5] G. Lumer : Problème de Cauchy avec valeurs au bord continues, comportement asymptotique...,à paraître dans Séminaire de Théorie du potentiel (Paris), Lect. Notes in Math., Springer Verlag.

[Lu.P] G. Lumer et L. Paquet : Semi-groupes holomorphes et équations d'évolution, à paraître dans C. R. Acad. Sc. Paris.

[V] Ya. Vilenkin et coll. : Functional analysis, Wolters Noordhoff, Groningen (Hollande), 1972.

[Y] K. Yosida : Functional analysis, plusieurs éditions 1965-1974, Springer Verlag.