Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. M. Bony

Équivalence des diverses notions de spectre singulier analytique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 3, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

EQUIVALENCE DES DIVERSES NOTIONS DE SPECTRE SINGULIER ANALYTIQUE

par J. M. BONY

Exposé n° III

19 Octobre 1976

Cet exposé est consacré à la démonstration de l'équivalence, pour les distributions du spectre singulier analytique de Sato-Kawai-Kashiwara [S.K.K.] du support essentiel de Bros-Iagolnitzer [3] [4], et du front d'onde analytique de Hörmander [5]. Nous démontrons en fait plus généralement qu'il n'existe qu'une seule notion "raisonnable" d'analyticité microlocale.

Pour cela, nous devons en quelque sorte recoller la théorie des distributions et celle des hyperfonctions. Le cas le plus typique est celui des intégrales $\int K(x,y)u(y)dy$ définies au sens des distributions dans [F.I.O.] et au sens des hyperfonctions dans [S.K.K.], dont nous devons démontrer que, lorsque les deux théories permettent de les définir, le résultat est le même. Ces intégrales contiennent comme cas particuliers les opérateurs pseudo-différentiels, les opérateurs intégraux de Fourier - transformations de contact quantifiées, et la représentation intégrale qui nous servira à montrer l'égalité des spectres singuliers.

Nous avons eu besoin de ces résultats dans [1], pour étendre les résultats et les méthodes de [2] au cas des singularités différentiables, ce qui nécessitait l'usage simultané des outils de la théorie des distributions et de celle des hyperfonctions. Cet exposé reprend d'ailleurs largement la rédaction de [1].

Signalons enfin que, au cours du Seminar on Algebraic Analysis (Kyoto, Avril 1976), M. M. Kataoka, Nishiwada, C. Denson Hill, nous ont communiqué des résultats partiels sur l'équivalence des trois notions de spectre singulier, obtenus indépendamment de [1].

§ 1. Plaçons nous pour simplifier dans $\mathbb{R}^n$ muni de son orientation et de sa mesure de Lebesgue. Le faisceau $\mathcal{D}'$ s'identifie alors à un sous-faisceau du faisceau $\mathcal{B}$. Cette identification peut être décrite de deux façons :

a) Une distribution u est somme localement finie de distributions u_i à support compact. Chaque u_i définit une fonctionnelle analytique, et donc une hyperfonction à support compact u_i. L'application qui à u associe $\breve{u} = \sum \dot{u}_i$ ne dépend pas de la décomposition $u = \sum u_i$ choisie, et définit un homomorphisme injectif de faisceaux (voir [10], théorème 1.2.2).

b) Une distribution u peut toujours s'écrire sous la forme

$$u = \sum_\alpha \lim_{\substack{y \to o \\ y \in \Gamma_\alpha}} f_\alpha(x + iy)$$

où les f_α sont holomorphes à croissance lente, et la limite est au sens des distributions .L'hyperfonction associée à u sera

$$\breve{u} = \sum_\alpha b(f_\alpha)$$

où la valeur au bord est prise au sens des hyperfonctions (voir [7], [8], [9]).

§ 2. DIVERSES NOTIONS DE SPECTRE SINGULIER ANALYTIQUE

Rappelons que nous notons SSD(u) le spectre singulier différentiable (wave front) d'une distribution u.

a) Le spectre singulier analytique de Sato SSA(u). Il peut se définir pour toute hyperfonction par

(2.1) $(x_o, \xi_o) \notin SSA(u)$ s'il existe $\omega \ni x_o$, des cônes ouverts convexes saillants Γ_α avec $\Gamma_\alpha^o \not\ni \xi_o$, et des f_α holomorphes dans $\omega + i\Gamma_\alpha$ tels que $u = \sum b(f_\alpha)$ dans ω.

b) Le support essentiel de Bros-Iagolnitzer SE(u).
Il est défini pour toute distribution u en utilisant la transformation de Fourier généralisée, ou les valeurs au bord de fonctions holomorphes à croissance lente [4, § 3] :

$$(2.2) \qquad \mathcal{F}_u(\xi, \lambda; x) = \int \exp[-iy.\xi - \lambda|y-x|^2] f(y)dy.$$

(2.3) $(x_o, \xi_o) \notin SE(u)$ si pour $\chi \in \mathcal{C}_o^\infty$ analytique au voisinage de x_o, il existe un voisinage conique I de ξ_o et des constantes α, γ et C_N strictement positives telles que

$$\tilde{\chi u}(\xi,\lambda;x_o) \leq \frac{C_N}{1+|\xi|^N} e^{-\lambda\alpha} \text{ pour } \xi \in V \text{ et } 0<\lambda<\gamma|\xi|.$$

(2.4) $(x_o,\xi_o) \notin SE(u)$ s'il existe $\omega \ni x_o$, des cônes ouverts convexes saillants Γ_α avec $\Gamma_\alpha^o \not\ni \xi_o$, et des f_α holomorphes dans $\omega + i\Gamma_\alpha$ à croissance lente telles que $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$ dans ω.

Nous utiliserons également une des propriétés de décomposition démontrées par Bros-Iagolnitzer [4, th.1].

(2.5) Si dans un voisinage ω de x_o, on a $SE(u) \subset \omega \times I$, où I est une partie fermée de S^{n-1} , et si des cônes ouverts convexes saillants Γ_α sont tels que les intérieurs de leurs polaires recouvrent I, il existe alors ω' voisinage de x_o, et des f_α holomorphes dans $\omega' + i\Gamma_\alpha$ à croissance lente telles que l'on ait $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$ dans ω'.

c) <u>Le front d'onde analytique</u> de Hörmander WFA(u) (voir [5]).

(2.6) $(x_o,\xi_o) \notin WFA(u)$ s'il existe un voisinage conique I de ξ_o, un voisinage ω de x_o, une suite bornée u_n de distributions à support compact, et une constante C telle que l'on ait

$$u_n = u \text{ dans } \omega$$

$$|\hat{u}_n(\xi)| \leq C^{n+1} n!\, \xi^{-n} \quad \text{pour } \xi \in I.$$

<u>Remarque 2.7</u> : Il ne serait pas très difficile d'obtenir directement l'équivalence de W.F.A. et de S. E. Par contre, la recherche d'une démonstration directe de l'équivalence de 2.1 et de 2.4 pour les distributions pose un problème difficile sur les relations entre cohomologies avec ou sans conditions de croissance. Nous contournerons cette difficulté à l'aide de la représentation intégrale du paragraphe 9, qui en quelque sorte, décompose u(x), de manière canonique, en une intégrale de valeurs au bord de fonctions holomorphes. Le caractère canonique de la décomposition permet d'y lire à la fois l'appartenance ou non aux

distributions et l'analyticité microlocale.

§ 3. PREMIERES RELATIONS ENTRE LES NOTIONS DE SPECTRE SINGULIER

Nous démontrerons plus loin l'identité de SSA, SE et WFA. Nous pouvons énoncer dès maintenant les propriétés suivantes.

(3.1) Si u est définie sur ω, la projection sur ω de SSA(u), de SE(u) et de WFA(u) sont toutes trois égales au support singulier analytique de u (voir [S.K.K.], [4], [5]).

On a de plus les inclusions suivantes :

(3.2) $SSA(u) \subset SE(u)$

(3.3) $SSD(u) \subset WFA(u) \subset SE(u)$.

Compte tenu de (2.1) et (2.4) l'assertion (3.2) est évidente. Pour démontrer (3.3) il faut démontrer que si u est valeur au bord d'une fonction holomorphe f à croissance lente dans $\omega + i\Gamma$, on a $WFA(u) \subset \omega \times \Gamma^o$ (à l'aide d'un nombre fini d'intégrations, on se ramène au cas où f est continue jusqu'au bord).

Soit alors ξ_o n'appartenant pas à Γ^o, on peut trouver un petit voisinage conique I de ξ_o, et un point y_o de Γ tels que l'on ait

$$\xi . y_o \leq - c|\xi| \text{ pour } \xi \in I.$$

Soit d'autre part $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, égales à 1 dans la boule de centre x_o et de rayon r, nulles hors de la boule de centre x_o et de rayon 2r, et vérifiant (voir [5])

$$|D^\alpha \chi_n| \leq C^{|\alpha|+1} n^{|\alpha|} \quad \text{pour } |\alpha| \leq n.$$

Nous allons montrer que la suite $u_n = \chi_n u$ vérifie les majorations de (2.6).

Construisons les prolongements "presque analytiques" des fonctions χ_n :

$$\chi_n(x+iy) = \sum_{0\leqslant |\alpha| \leqslant n} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \chi_n(x)(iy)^n ,$$

il n'est pas difficile de voir que l'on a (en désignant par la même lettre C diverses "constantes" ne dépendant ni de n ni de y).

(3.4) $\quad |\chi_n(x+iy)| \leq C^{n+1} \quad$ pour $\quad |y| \leq 1$

(3.5) $\quad |\partial/\partial \bar{z}_j \, \chi_n(x+iy)| \leq C^{n+1} |y|^n .$

En utilisant la formule de Stokes sur la (n+1)-chaîne définie par $|x| \leq 2r$, $y = ty_o$ $(0 \leq t \leq 1)$, on ramène l'estimation de

$$\int e^{-ix.\xi}\chi_n(x)\, u(x)dx$$

à celles de $\int_{|x|\leq 2r} e^{-i(x+iy_o).\xi} \chi_n(x+iy_o)\, f(x+iy_o)dx$ et de

$$\iint_{\substack{|x|\leq 2r \\ o\leq t\leq 1}} e^{-i(x+ity_o).\xi}\, \partial/\partial \bar{z}_j\, \chi_n(x+ity_o)\, f(x+ity_o)dxdt.$$

La première intégrale est majotée d'après (3.4) par

$$e^{-c\xi} C^{n+1} \leq \frac{C^{n+1}}{c^n e^n} n^n \xi^{-n}$$

tandis que la seconde est majorée par

$$\left|\int_o^1 e^{-ct|\xi|} C^{n+1} n^n |y_o|^n t^n dt\right| \leq C'^{n+1} \xi^{-n-1} \int_o^\infty e^{-cu} u^n du$$
$$\leq C''^{n+1} n^n \xi^{-n-1}$$

Cela démontre les majorations de (2.6) et donc l'assertion (3.3).

§ 4. PRODUIT TENSORIEL

Si $u(x')$ et $v(x'')$ sont des distributions sur X' et X'', leur produit tensoriel $u(x')v(x'')$ est défini au sens des distributions par dualité ou par passage à la limite à partir des fonctions. On peut également définir, au sens de Sato, l'hyperfonction $u(x')v(x'')$. Montrons que les deux notions coïncident.

Soient $f_\alpha(z')$ et $g_\beta(z'')$ des fonctions holomorphes à coissance lente telles que l'on ait $u(x') = \Sigma \lim f_\alpha(x'+iy')$ et $v(x'') = \Sigma \lim g_\beta(x''+iy'')$. Au sens des hyperfonctions, on a :

$$u \otimes v = \sum_{\alpha\beta} b(f_\alpha) \otimes b(g_\beta),$$

et la même formule est valable au sens des distributions d'après la continuité du produit tensoriel.

Les quatre propriétés suivantes sont établies dans [S.K.K], [4], [5], [F.I.O] (parfois pour le produit "ordinaire", ce qui est bien sûr plus général).

4.1 En remplaçant SS par SSA ; SE ; WFA ; SSD , on a

$$SS(u \otimes v) \subset (SS(u) \times SS(v)) \cup (X' \times SS(v)) \cup (SS(u) \times X'')$$

en désignant par $X' \times SS(v)$ l'ensemble $\{(x',x'',\xi',\xi'') \mid \xi' = 0$ et $(x'',\xi'') \in SS(v)\}$.

§ 5. INTEGRATION LE LONG DES FIBRES

Soit $u(x',x'')$ une distribution sur $X' \times X''$ telle que la projection du support de u sur X' soit propre. On peut là encore définir $\int u(x',x'')dx''$ au sens des distributions (par dualité) ou au sens des hyperfonctions (par voie cohomologique). Montrons que les deux notions coïncident.

Les deux notions étant locales en x', on peut se ramener au cas où u est à support compact, et définit donc une fonctionnelle analytique. Pour les fonctionnelles analytiques, la définition cohomologique coïncide avec celle définie par dualité :

$$<\int u(x',x'')dx'', \varphi(x'')> = <u(x',x''), 1(x')\varphi(x'')>$$

pour φ analytique. Cela montre que l'intégrale est la même qu'au sens des distributions.

Les quatre propriétés suivantes sont établies dans [S.K.K], [4], [5], [F.I.O.], (Pour WFA, la propriété n'est établie que dans le cas particulier où WFA(u) ne contient aucun point du type $(x', x'', \xi', 0)$. Nous laissons au lecteur le soin d'étendre au cas général la démonstration du théorème 4.1 de [5].

5.1 En remplaçant SS par SSA ; SE ; WFA ; SSD, on a

$$SS(\int u(x',x'')dx'') \subset \{(x',\xi') \mid \exists x''(x',x'',\xi',0) \in SS(u)\}.$$

§ 6. TRACE

Soit $u(x',x'')$ une distribution sur $X' \times X''$. Sa trace $u(x',0)$ est définie dans [F.I.O] au sens de distributions si SSD(u) ne rencontre pas le fibré normal à X', et la trace au sens des hyperfonctions est définie dans [S.K.K] si ce fibré normal ne rencontre pas SSA(u).

Il résulte donc de (3.2) et (3.3) que si

$$SE(u) \cap \{(x',x'',\xi',\xi'') \mid x'' = 0 \quad \text{et} \quad \xi' = 0\} = \emptyset ,$$

les deux notions de trace sont définies pour u. Montrons qu'elles coïncident.

D'après (2.5) on peut écrire $u = \sum b(f_\alpha(z',z''))$ où les f_α sont holomorphes à croissance lente, dans des ouverts $\omega + i\Gamma_\alpha$, le polaire de Γ_α ne rencontrant pas le fibré normal à X'. Il en résulte que les cônes $\Gamma'_\alpha = \{y' \mid (y',0) \in \Gamma_\alpha\}$ sont non vides. Au sens des hyperfonctions, on a $u(x',0) = \sum b(f_\alpha(z',0))$.

On est donc ramené à démontrer la propriété suivante : soit f holomorphe à croissance lente dans $\omega + i\Gamma$, le polaire de Γ ne rencontrant pas le fibré normal à X', montrer que la trace au sens des distributions de $\lim f(x'+iy', x''+iy'')$ est $\lim f((x'+iy'),0)$.

Soit y'_n une suite tendant vers 0, telle que $(y'_n,0) \in \Gamma$. Les fonctions régulières $f(x' + iy'_n, x'')$ ont évidemment pour trace $f(x' + iy'_n, 0)$. D'après le théorème 2.5.11. de [F.I.O], il suffit donc de démontrer que $f(x' + iy'_n, x'') \to u(x', x'')$ dans l'espace $\mathcal{D}'_{\Gamma^o}$. (Nous laissons au lecteur cette démonstration, qui repose sur un argument de déformation dans le domaine complexe analogue à (et plus simple que) la démonstration de (3.3).

Les quatre propriétés suivantes sont établies dans [S.K.K.], [4], [5], [F.I.O].

(6.1) En remplaçant SS par SSA ; SE ; WFA ; SSD, on a

$$SS(u(x',0)) \subset \{(x',\xi') \mid \exists \xi''(x',0,\xi',\xi'') \in SS(u(x',x''))\}$$

en supposant toujours que SE(u) ne rencontre pas le fibré normal à X'.

§ 7. COMPOSITION

On définit, au sens des distributions ou des hyperfonctions $Ku(x) = \int K(x,y)\, u(y) dy$ de la façon suivante : on fait le produit tensoriel $K(x,y)\, u(z)$, on prend si possible la trace sur $y = z$, on intègre si possible le long des fibres. Il résulte de ce qui précède que les deux sens coïncident sous les hypothèses suivantes :

$K(x,y)$ est une distribution sur $Y \times Y$ et $u(y)$ est une distribution à support compact dans Y

$$\{(x,\xi) \mid \exists\, y,\ (x,y,\xi,0) \in SE(K)\} = \emptyset$$

$$\{(y,\eta) \mid \exists\, x,\ (x,y,0,-\eta) \in SE(K)\} \cap SE(u) = \emptyset .$$

Et on a de plus

(7.1)
$$\begin{aligned} SSA(Ku) &\subset SE'(K) \circ SSA(u) \\ SE(Ku) &\subset SE'(K) \circ SE(u) \\ WFA(Ku) &\subset SE'(K) \circ WFA(u) \end{aligned}$$

en notant $SE'(K) = \{(x,y,\xi,\eta) \mid (x,y,\xi,-\eta) \in SE(K)\}$.

§ 8. UNE REPRESENTATION DE δ

Nous allons utiliser une décomposition de δ analogue à celle utilisée dans [S.K.K., corollaire III.2.1.5], pour prouver le caractère flasque du faisceau $\mathcal{C}$. Cette décomposition est d'ailleurs étroitement liée à la transformation de Fourier généralisée de Bros-Iagolnitzer.

$$(8.1) \qquad \delta = \frac{(n-1)!}{(-2i\pi)^n} \int_{S^{n-1}} \frac{1 + x.\eta}{(x.\eta + i|x|^2 + i0)^n} \omega(\eta)$$

Cette formule doit être interprétée de la façon suivante. On pose

$$(8.2) \qquad K(x,\eta) = \frac{(n-1)!}{(-2i\pi)^n} (1 + x.\eta) \lim_{\substack{y\to 0\\ \sigma\to 0}} \frac{1}{[(x+iy).(\eta+i\sigma) + i(x+iy).(x+iy)]^2}$$

La distribution $K(x,\eta)$ est ainsi valeur au bord d'une fonction holomorphe au voisinage de x pour $x \neq 0$, et holomorphe à croissance lente dans les domaines $|x| < \varepsilon$, $y.\eta > |y|^2 + \varepsilon|\sigma|$. On a donc

$$(8.3) \qquad SE(K(x,\eta)) \subset \{(x,\eta,\xi,\theta) | \ x = 0, \ \eta = \xi \ ; \ \theta = 0\}.$$

Le second membre de (8.1) désigne l'intégrale le long des fibres $\int K(x,\eta)\ \omega(\eta)$ où ω est la mesure canonique sur S^{n-1} : $\omega(\eta) = \Sigma(-1)^{j-1} d\eta_1 \wedge \dots \widehat{d\eta_j} \wedge \dots d\eta_n$.

Les deux membres de 8.1 sont des distributions bien définies, a priori d'ordre n. Il suffit donc de démontrer qu'elles coïncident sur des fonctions d'essai $\tilde{\varphi}(x)$ du type suivant :

- φ est analytique au voisinage de la boule $|x| \leq r$.
- φ est nulle ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n pour $|x| = r$.
- $\tilde{\varphi}$ est le prolongement de φ par 0 hors de la boule $|x| \leq r$.

Nous allons alors utiliser la formule de Cauchy-Fantappiè (voir [6]):

$$\varphi(0) = \frac{(n-1)!}{(-2i\pi)^n} \int \frac{\varphi(z)}{\Delta(z,\zeta)^n} dz \wedge \omega(\zeta)$$

avec $dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$, $\omega(\zeta) = \Sigma(-1)^{j-1} \zeta_j d\zeta \wedge \ldots \wedge \widehat{d\zeta_j} \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$, et où nous choisissons le $(2n-1)$-cycle suivant : $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ avec Δ_1 défini par $z = x + i\,\varepsilon(1 - \frac{|x|^2}{r^2})\eta$, $\zeta = \eta + iz$ pour $|x| \leq r$ et $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Δ_2 défini par $z = x$, $\zeta = \eta + iz$, pour $|x| = r$ et $|\eta| \leq 1$.

L'intégrale sur Δ_2 étant nulle, on obtient

$$\varphi(0) = \frac{(n-1)!}{(-2i\pi)^n} \int \frac{\varphi(z)}{(z,\eta+iz^2)^n}\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge (-1)^j(n_j + iz_j)d\eta_1 \wedge \ldots \widehat{d\eta_j} \wedge \ldots \wedge d\eta_n$$

$$\varphi(0) = \frac{(n-1)!}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega(\eta) \int_{z=x+i\varepsilon(1-|x|^2/z^2)\eta} \varphi(z) \frac{1+iz.\eta}{(z.\eta + i|z|^2)^n}\, dz$$

ce qui prouve (8.1) en faisant tendre ε vers 0.

§ 9. EQUIVALENCE DES TROIS DEFINITIONS DU SPECTRE SINGULIER ANALYTIQUE

La distribution $K(x-x',\eta)$ définie sur $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{S}^{n-1}$ vérifie d'après (8.3) :

(9.1) $$SE(K(x-x',\eta)) \subset \{(x,x',\eta,\xi,\xi',\theta) \,|\, x = x',\ \eta = \xi = -\xi',\ \theta = 0\}.$$

Si on pose, pour une distribution u à support compact :

(9.2) $$\hat{u}(x,\eta) = \int K(x-x',\eta)u(x')dx'.$$

On a d'après (8.1)

(9.3) $$u(x) = \int \hat{u}(x,\eta)d\eta.$$

On déduit de (9.2) et (7.1)

$$SSA(\hat{u}) \subset \{(x,\eta,\xi,\theta) \,|\, \theta = 0,\ \eta = \xi,\ (x,\eta) \in SSA(u)\}$$

$$SE(\hat{u}) \subset \{(x,\eta,\xi,\theta) \,|\, \theta = 0,\ \eta = \xi,\ (x,\eta) \in SE(u)\}$$

$$WFA(\hat{u}) \subset \{(x,\eta,\xi,\theta) \,|\, \theta = 0,\ \eta = \xi,\ (x,\eta) \in WFA(u)\}$$

On déduit de (9.3) et (5.1)

$$SSA(u) \subset \{(x,\xi) \mid \exists \eta, (x,\eta,\xi,0) \in SSA(\hat{u})\}$$

$$SE(u) \subset \{(x,\xi) \mid \exists \eta, (x,\eta,\xi,0) \in SE(\hat{u})\}$$

$$WFA(u) \subset \{(x,\xi) \mid \exists \eta, (x,\eta,\xi,0) \in WFA(\hat{u})\}$$

et donc SSA(u) = SE(u) = WFA(u) = sup.sing anal. $\hat{u}$.

Remarque 9.4 : L'argument ci-dessus montre qu'à une notion locale de singularité, on peut faire correspondre au plus une notion micro-locale "raisonnable" de singularité : le spectre singulier de u doit être le support singulier de $\hat{u}$. "Raisonnable" signifie ici que la projection sur $\mathbb{R}^n$ du spectre singulier est le support singulier, que la fonction $K(x,\eta)$ a son spectre là où il doit être, et que les propriétés "fonctorielles" de comportement par rapport au produit tensoriel, à l'intégration et aux traces sont satisfaites.

Remarque 9.5 : La transformation utilisée ci-dessus est plus simple que celle de [S.K.K], mais elle ne permet pas de traiter les problèmes de prolongement. Elle suffit toutefois pour obtenir des théorèmes de décomposition assez fins du spectre singulier. Ainsi, si $\Sigma \varphi_i(\eta) = 1$ est une partition mesurable (non nécessairement différentiable) de l'unité, les produits $\hat{u}(x,\eta)\varphi_i(\eta) = u_i(x,\eta)$ sont bien définis (car $SS(\varphi_i) \subset \{(x,\eta,\xi,\theta) \mid \xi = 0\}$) et $\int u_i(x,\eta)d_\eta$ a son spectre singulier dans $SS(u) \cap Supp(\varphi_i)$.

Remarque 9.6 : L'identification de SSA et de SE, et les résultats du paragraphe 7 sur $\int K(x,y)u(y)dy$ dans les cas où le spectre singulier de K est contenu dans le fibré conormal à la diagonale [resp. dans une variété lagrangienne], permettent maintenant de montrer facilement que les identifications auxquelles on s'attendait sur l'action des opérateurs pseudo-différentiels [resp. opérateurs intégraux de Fourier/ transformations de contact quantifiées] en théorie des distributions et en théorie des hyperfonctions sont effectivement valables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony : Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs différentiels à coeffcients analytiques. S.M.F. Astérisque 34-35 (1976), 43-91.

[2] J. M. Bony et P. Schapira : Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles. Ann. Inst. Fourier Grenoble 26.1 (1976), 81-140.

[3] J. Bros et D. Iagolnitzer : Tuboïdes et généralisation d'un théorème de Grauert. Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1975, n°16.

[4] J. Bros et D. Iagolnitzer : Support essentiel et structure analytique des distributions. Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1975, n° 18.

[F.I.O.] L. Hörmander : Fourier Integral Operators I. Acta Math. 127 (1971), 79-183.

[5] L. Hörmander : Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients. Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 329-358.

[6] J. Leray : Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problèmes de Cauchy III) Bull. Soc. Math. France 87 (1959) 81-180.

[7] A. Martineau : Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes. Proc. Intern. Summer Inst. Lisbon (1964).

[8] A. Martineau : Théorèmes sur le prolongement analytique du type "edge of the wedge theorem" Sem. Bourbaki, 20e année, 340 (1967/68).

[9] A. Martineau : Le "edge of the wedge theorem" en théorie des hyperfonctions de Sato, Proc. Intern. Conf. Functional Analysis and Rel. Topics Univ. Tokyo Press (1969) 95-106.

[S.K.K.] M. Sato, T. Kawai et M. Kashiwara : Hyperfunctions and pseudo-differential equations. Lect. Notes in Math. 287 (1973) Springer, 265-529.

[10] P. Schapira : Théorie des hyperfonctions. Lect. Notes in Math. 126 (1970) Springer.