Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Y. Colin de Verdière

Nombre de points entiers dans une famille homothétique de domaines de R^n

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 23, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A22_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

NOMBRE DE POINTS ENTIERS DANS UNE FAMILLE HOMOTHETIQUE DE DOMAINES DE $\mathbb{R}^n$.

par Y. COLIN DE VERDIERE

Exposé n^{o} XXIII 17 Mai 1977

Soit D un domaine compact à bord C^∞ de $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{R}_a = a + \mathbb{Z}^n$ un réseau d'origine $a \in \mathbb{R}^n$. On cherche à estimer la différence : $R(\lambda) = N(\lambda) - \mathrm{vol}(D).\lambda^n$ où $N(\lambda) = \mathrm{Card}\{\lambda D \cap \mathcal{R}_a\}$. Les motivations principales pour ce problème sont les suivantes :

a) Le cas où D est le disque $\{x^2 + y^2 \le 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ a été beaucoup étudié à cause de son importance en arithmétique : nombre de décompositions d'un entier en somme de deux carrés. Plus généralement le cas où D est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ a été étudié en relation avec les propriétés des formes quadratiques. Les résultats que nous allons décrire sont moins bons que ceux que l'on connaît dans ces cas particuliers.

b) Le cas où D est défini par une équation $D = \{f \le 1\}$ où $f : \mathbb{R}^n \backslash 0 \to \mathbb{R}_*^+$ est une fonction C^∞ homogène de degré $\mu > 0$ nous a motivé au départ, car on peut alors interpréter $N(\lambda)$ comme la fonction spectrale de l'opérateur elliptique autoadjoint P sur le tore $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ défini par sa décomposition spectrale : $P(\exp(i\langle\nu,x\rangle) = f(\nu).\exp(i\langle\nu,x\rangle)$ $(\nu \in \mathbb{Z}^n)$. P est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre μ et de symbole principal $f(\xi)$. Les opérateurs de ce type servent de modèle pour l'étude d'autres opérateurs elliptiques en utilisant les opérateurs intéraux de Fourier : par exemple, le laplacien d'une variété riemannienne dont le flot géodésique est complètement intégrable. ([CV1]). Plus précisément, nous savons prouver que si g est une métrique riemannienne de révolution sur S^2 n'ayant qu'un seul équateur, il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2\backslash 0 \to \mathbb{R}_*^+$, C^∞ homogène de degré 2 et une bijection $j : \mathbb{N} \to \mathcal{R}$ avec $\mathcal{R} = \{(p+\frac{1}{2},q) \mid (p,q) \in \mathbb{Z}^2,\ |q| \le p\}$ telle que les valeurs propres λ_n du laplacien associé à g vérifient :

$$\lambda_n = f(j(n)) + O(1) . \qquad \text{(voir [CV}_2\text{]).}$$

c) On peut étudier de la même façon le problème suivant qui est une sorte de généralisation de la classique "méthode des trapèzes" à n dimensions : soit $f \in C^\infty(D;\mathbb{C})$ et $N_f(\lambda) = \sum_{\nu \in \lambda D} f(\frac{\nu}{\lambda})$ $(\nu \in \mathbb{Z}^n)$.

Il s'agit d'estimer $R_f(\lambda) = N_f(\lambda) - (\int_D f).\lambda^n$.

Les résultats que je décris maintenant sont le prolongement de résultats de Van der Corput ($n = 2$ et la courbure du bord ne s'annule pas) et de R. Randol ($n = 2$ et aussi le cas n quelconque et D strictement convexe). ([R_1], [R_2], [R_3] et [R_4]).

La méthode utilisée ici est très différente : au lieu d'utiliser pour majorer les intégrales oscillantes des méthodes basées sur la monotonie ou la convexité ([R_3] et [R_4]), nous utilisons la classification d'Arnold des singularités de fonctions numériques et de leurs déploiements (voir par exemple [A_1], [A_2], [A_3] et [D]).

Nous savons démontrer les deux théorèmes qui suivent :

<u>Théorème 1</u> : Supposons $n = 2$ et soit k l'ordre maximum d'annulation de la courbure sur le bord A de D ($k=0$ si la courbure ne s'annule pas ; $k = 1$ s'il n'y a que des points d'inflexion ordinaires,...). Alors si $k = 0$ ou 1 (c'est la situation "générique"), on a $R(\lambda) = O(\lambda^{2/3})$. Si $k \geq 1$, on a : $R(\lambda) = O(\lambda^{1-\frac{1}{k+2}})$.

De plus, si $k \geq 2$, et que la direction normale en au moins un point où la courbure s'annule à l'ordre k est rationnelle, la majoration précédente est en général la meilleure possible (ce résultat est prouvé dans [R_1] pour le cas où $D = \{x^{2k} + y^{2k} \leq 1\}$).

Par contre, si les directions normales au point où la courbure s'annule à un ordre ≥ 2, sont suffisamment irrationnelles, on a $R(\lambda) = O(\lambda^{2/3})$. Plus précisément si D_θ est le domaine D tourné d'un angle θ et $R_\theta(\lambda)$ est le reste correspondant, on a : $|R_\theta(\lambda)| \leq \varphi(\theta)\lambda^{2/3}$ où $\varphi(\theta) \in L^2(S^1)$, en particulier, pour presque toutes les valeurs de θ on a $|R_\theta(\lambda)| = O(\lambda^{2/3})$. (B. Randol m'a informé qu'une de ses élèves M. Tarnapolska-Weiss a obtenu récemment des résultats voisins).

<u>Théorème 2</u> : Supposons $n \leq 7$ et soit X une variété compacte orientable C^∞ de dimension $n-1$, il existe un ouvert dense Ω de l'ensemble des plongements de X dans $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie C^∞ tel que si $j \in \Omega$, et si D est le domaine de $\mathbb{R}^n$ de bord $j(X)$, on a $R(\lambda) = O(\lambda^{n-2+\frac{2}{n+1}})$: ce résultat "générique" est le même que celui qu'on obtient lorsqu'on fait l'hypothèse que la courbure de Gauss du bord A de D ne s'annule pas. (ce résultat est alors le meilleur possible en général pour $n = 2$, cf. [L] p.279).

Après avoir indiqué la méthode d'attaque de ce problème à partir de la formule de sommation de Poisson (Van der Corput, Randol), nous nous limiterons dans cet exposé à l'étude des majorations d'intégrales oscillantes associées à des déploiements de singularités simples d'Arnold, ce qui nous permettra de donner les idées de la preuve du théorème 1 et la preuve du théorème 2 pour $n \leq 6$ (le cas $n = 7$ étant plus délicat). Pour les démonstrations détaillées, nous renvoyons à notre article [CV_3] en préparation.

§ 1. LA METHODE DE LA FORMULE DE POISSON (Van der Corput, Randol).

Soit χ la fonction caractéristique de D et $\chi_\lambda = \chi(\frac{\cdot}{\lambda})$ celle de λD, on a $N(\lambda) = N(\lambda;D) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \chi_\lambda(\nu + a)$. On voudrait appliquer la formule de sommation de Poisson, mais auparavant on doit régulariser χ; pour cela on choisit une fonction $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$ à support dans la boule de rayon 1 et d'intégrale 1. On pose $\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ et

$N_\varepsilon(\lambda;D) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} (\chi_\lambda * \rho_\varepsilon)(\nu + a) = \mathrm{vol}(D)\lambda^n + R_\varepsilon(\lambda;D)$. Soit, pour $\rho \geq 0$,

$D_\rho = B(D,\rho)$ et pour $\rho < 0$, $D_\rho = \mathbb{R}^n \backslash B(\mathbb{R}^n \backslash D, -\rho)$. Pour ρ assez petit, le bord A_ρ de D_ρ est une variété C^∞ parallèle au bord $A = A_0$ de D. On a les encadrements :

$$N_\varepsilon(\lambda, D_{-\frac{\varepsilon}{\lambda}}) \leq N(\lambda;D) \leq N_\varepsilon(\lambda;D_{\frac{\varepsilon}{\lambda}}) .$$

On pose alors $\varepsilon = \lambda^{-\alpha}$ avec $\alpha = \frac{n-1}{n+1}$, en utilisant l'estimation $\mathrm{vol}(D_\rho) = \mathrm{vol}(D) + O(\rho^{n-1})$, on voit que :

$$|R(\lambda)| \leq \sup[R_\varepsilon(\lambda;D_{-\frac{\varepsilon}{\lambda}}), R_\varepsilon(\lambda, D_{\frac{\varepsilon}{\lambda}})] + O(\lambda^{n-2+\frac{2}{n+1}}) .$$

On est donc ramené au problème d'obtenir des majorations uniformes pour $R_\varepsilon(\lambda, D_\rho)$ avec $\varepsilon = \lambda^{-\alpha}$ et $|\rho| \leq C$. Remplaçant D_ρ par D et appliquant la formule de Poisson, il vient :

$$N_\varepsilon(\lambda;D) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \lambda^n \hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)\hat{\rho}(2\pi\varepsilon\nu)e^{-2\pi i\langle a,\nu\rangle}$$

Et donc :

$$R_\varepsilon(\lambda;D) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n\setminus 0} \lambda^n \hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)\hat{\rho}(2\pi\varepsilon\nu)e^{-2\pi i<a,\nu>}.$$

On est donc ramener au problème d'étudier la transformée de Fourier $\hat{\chi}(\tau x)$ ($\tau \in \mathbb{R}_*^+, x\in S^{n-1}$) de la fonction caractéristique du domaine D (ou D_ρ). Utilisant la formule de Stokes, il vient :

$$\hat{\chi}(\tau x) = \frac{i}{\tau}\int_A e^{-i\tau<x,\alpha>} i(x)d\alpha_1\wedge\ldots\wedge d\alpha_n .$$

Cette intégrale est une intégrale oscillante de la forme :

$$I_\tau(x) = \int_A e^{i\tau\varphi(x,\alpha)}a(x,\alpha)d\alpha$$

où $\varphi \in C^\infty(S^{n-1}\times A)$ et $a\in C^\infty(S^{n-1}\times A)$. On sait que, dans la théorie des intégrales oscillantes la phase φ joue le rôle essentiel. Faisons quelques remarques à son sujet :

a) $C_\varphi = \{(x,\alpha)\,|\,x$ est normal en α à $A\}$; si $\tilde{n}: A \to S^{n-1}$ est l'application de Gauss (normale extérieure), $C_\varphi = \{(\pm\tilde{n}(\alpha),\alpha)\,|\,\alpha\in A\}$ et donc les singularités de la projection $\pi : C_\varphi \to S^{n-1}$ sont les singularités de l'application n de Gauss, ainsi qu'on le voit sur le diagramme commutatif suivant où $F^\pm = \pm\tilde{n}\times \mathrm{Id}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "F^\pm"] \arrow[dr, "\pm\tilde{n}"'] & & C_\varphi \arrow[dl, "\pi"] \\ & S^{n-1} & \end{tikzcd}$$

En particulier si la courbure de Gauss ne s'annule pas, π est de rang maximum et on obtient ([D]) : $\hat{\chi}(\tau x) = O(\tau^{-\frac{n+1}{2}})$.

b) Le bord A_ρ de D_ρ est défini par $A_\rho = \{\alpha + \rho\tilde{n}(\alpha)\,|\,\alpha\in A\}$, on voit alors facilement que la variété lagrangiennne Λ_ρ associée à φ_ρ est égale à Λ_o : $\Lambda_o = \{(\pm\tilde{n}(\alpha),<\alpha,.>\restriction T_{\pm\tilde{n}(\alpha)}S^{n-1})\,|\,\alpha\in A\}$. On en déduit que

φ_ρ et $\varphi(x,\alpha) = \langle x,\alpha\rangle$ sont des fonctions phases équivalentes et donc que l'on peut écrire : $\hat{\chi}_\rho(\tau x) = \int_A e^{-i\tau\langle x,\alpha\rangle} a(x,\alpha,\rho)d\alpha$ où $a \in C^\infty(S^{n-1} \times A \times]-C,+C[)$: on n'aura donc pas de difficultés pour majorer $\hat{\chi}_\rho$ si on sait majorer $\hat{\chi}_o$: il suffira d'avoir des estimations uniformes dans les intégrales oscillantes quand l'amplitude varie de façon C^∞.

§ 2. MAJORATIONS D'INTEGRALES OSCILLANTES

Dans ce paragraphe, nous utilisons les résultats d'Arnold ([A_1], [A_2] et [A_3]) et de Duistermaat ([D]) pour obtenir des majorations d'intégrales oscillantes associées à des déploiements de singularités simples (A_{m+1}, D_{m+1}, E_6, E_7, E_8). Rappelons ([D] p.254) que si $f(\alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{R}^k$) est un germe de singularité isolée en 0 et $f_j(\alpha)$ une base d'un supplémentaire de l'idéal jacobien J_f de f dans $\mathcal{U}(0)$, un déploiement universel de f est donné par :

$$\varphi(x,\alpha) = f(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\alpha).$$

De plus on peut choisir pour f un polynôme et pour f_j des monômes en α. Soit $I_\tau(x) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\tau\varphi(x,\alpha)} a(x,\alpha)d\alpha$ où $a \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k)$, on rappelle qu'on peut montrer, en utilisant le théorème de préparation de Malgrange, que :

$$I_\tau(x) = \sum_{j=o}^{n} a_j(x,\tau)J_{\tau,j}(x)$$, où les $a_j(x,\tau)$ sont des symboles classiques de degré 0 en τ et $J_{\tau,j}(x) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\tau\varphi(x,\alpha)} f_j(\alpha)d\alpha$

(en posant $f_o(\alpha) = 1$). Ces intégrales sont bien définies au sens des intégrales oscillantes ([D]) ou bien par passage dans le complexe ([M] p.247). Pour majorer $I_\tau(x)$, il suffit donc de majorer les $I_{\tau,j}(x)$. Pour cela on utilise dans le cas où $f(\alpha)$ est une singularité simple les propriétés de quasi-homogénéité : il existe des nombres r_i, $0 < r_i < 1$

tels que $f(\theta^{r_1}\alpha_1,\dots,\theta^{r_k}\alpha_k) = \theta f(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ et comme les f_j sont des monômes en α, on a : $f_j(\theta^{r_1}\alpha_1,\dots,\theta^{r_k}\alpha_k) = \theta^{s_j} f_j(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, et on vérifie ([D]) que $0 < s_j < 1$.

Nous aurons besoin des deux théorèmes suivants :

<u>Théorème 3</u> : Supposons que $\varphi(x,.)$ n'admette pour tout x voisin de x_o que des singularités simples dans le support de a, alors, si $C_\varphi = \{(x,\alpha) | d_\alpha \varphi = 0\}$ on a dans un voisinage de x_o la majoration :

$$|I_\tau(x)| \leq C\,\tau^{-k/2} \sum_{(x,\alpha)\in C_\varphi \cap \mathrm{Supp}(a)} |\det d^2_{\alpha,\alpha}\varphi(x,\alpha)|^{-1/2}.$$

<u>Remarque</u> : Cette majoration a déjà été établie par Randol pour les fonctions phases associées à un domaine D analytique de dimension 2 ou strictement convexe (n quelconque) ($[R_3]$ et $[R_4]$) par des méthodes très différentes. Il serait intéressant de généraliser la classe de fonction où on peut l'appliquer.

<u>Théorème 4</u> : Soit $\varphi(x,\alpha)$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}^k)$ une fonction phase localement équivalente (à adjonction près d'une forme quadratique non dégénérée indépendante de x) au déploiement universel d'une singularité simple de codimension ≤ 5 (A_2, A_3, A_4, D_4, A_5, D_5, A_6, D_6, E_6) et $I_\tau(x)$ une intégrale oscillante associée à φ. Alors si W_r (r = 0, 1, 2, 3, 4, 5) désigne la variété équisingulière de codimension r de $\mathbb{R}^n$ (sous-variété des x de $\mathbb{R}^n$ tels que $\varphi(x,.)$ admette des singularités de codimension r), on a, si d est une distance riemannienne sur $\mathbb{R}^n$,

$|I_\tau(x)| \leq \varphi_p(x)\,\tau^{-\frac{k}{2}+\varepsilon_p}$; ici ε_p désigne l'indice de singularité d'Arnold en codimension p

$$(\varepsilon_p = 0, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{12} \text{ pour } p = 0,1,\dots,5)$$

et $\varphi_p(x)$ est donnée par :

$$\varphi_p(x) = C.\,d(x,W_{p+1})^{-\mu^p_{p+1}} \dots \, d(x,W_5)^{-\mu^p_5}$$

(avec la convention $d(x,\emptyset) = 1$) où les μ^p_k se calculent par récurrence sur k et vérifient : $\nu_k^p = \mu_{p+1}^p + \ldots + \mu_k^p = \sup(\beta_j^k)(\varepsilon_k - \varepsilon_p)$ où

$\beta_j = \dfrac{1}{1-s_j}$ et le sup. est pris sur les exposants de quasi-homogénéité s_j intervenant dans les singularités simples de codimension k. En particulier $\varphi_p(x)$ a la propriété suivante :

$$\int_{(d(x,W_p) \leq \varepsilon) \cap (\mathrm{Supp}\, a)} |\varphi_p(x)|\, dx = O(\varepsilon^{\alpha_{n,p}}) \quad (p \geq 1)$$

où $\alpha_{n,p}$ se calcule par récurrence sur n : $\alpha_{p,p} = p$ et

$$\alpha_{n,p} = \inf(\alpha_{n-1,p}\, ; (\inf \beta_j^n)(n - \Sigma s_j) - \nu_n^p) \; ;$$

$\varphi_o(x)$ est localement intégrable dans $\mathbb{R}^n$, ce qui revient à montrer que $\alpha_{n,o}$ défini pour les formules précédentes est > 0.

Nous pouvons résumer ces résultats dans les tableaux suivants des ν_n^p et $\alpha_{n,p}$.

I) <u>Tableau des</u> ν_n^p

p \ n	1	2	3	4	5
0	1/4	1/2	1	3/2	5/2
1	╳	1/6	1/2	5/6	3/2
2	╳	╳	1/4	1/2	1
3	╳	╳	╳	1/6	1/2
4	╳	╳	╳	╳	1/4

II) Tableau des $\alpha_{n,p}$

$p \backslash n$	1	2	3	4	5
0	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4
1	1	1	1	1	1
2		2	2	2	2
3			3	79/30	79/30
4				4	3
5					5

Remarque : Soit p tel que $W_{p+1} = \ldots = W_{p+q} = \emptyset$, on a $I_\tau(x) = O(\tau^{-\frac{k}{2}+\varepsilon_p})$. Cette propriété a déjà été prouvée par Arnold et Duistermaat et s'étend évidemment à des déploiements non universels.

Les théorèmes 3 et 4 se prouvent par récurrence sur la codimension des singularités, en utilisant le fait que les singularités du déploiement universel $\varphi(x,a)$ pour $x \neq 0$ sont des singularités simples de codimension strictement plus petite. En utilisant la propriété universelle du déploiement universel il est facile de voir qu'il suffit de prouver le théorème 3 pour un déploiement universel. Pour prouver ces majorations on étudie seulement

$$K_\tau(x) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\tau\rho(x,\alpha)}\, d\alpha .$$

Faisant le changement de variables $\alpha_i = \theta^{r_i} \alpha_i'$, on obtient :

$$K_\tau(x) = \theta^{\Sigma r_i} \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\tau\theta(f(\alpha) + \sum_1^n x_j\, \theta^{-(1-s_j)} f_j(\alpha))}\, d\alpha.$$

On pose alors $\theta = \Sigma x_j^{\beta_j} = r$ $(\beta_j = \frac{1}{1-\beta_j})$ et $X_j = x_j r^{-(1-s_j)}$,

on note $X = (X_j)$ et $\Sigma = \{\Sigma X_j^{\beta_j} = 1\}$, on obtient :

$$K_\tau(x) = (\Sigma x_j^{\beta_j})^{\Sigma r_i} K_{\tau\theta}(X) \qquad (X \in \Sigma)$$

On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence pour majorer $K_{\tau\theta}(X)$ car il n'y a dans $K_{\tau\theta}$ que des singularités de codimension $< n$.

<u>Preuve du théorème 3</u> : Par hypothèse de récurrence, on obtient :

$$|K_\tau(x)| \leq C\tau^{-k/2} \cdot r^{-\varepsilon_n} \cdot \sum_{(X,\alpha) \in \widetilde{C}_\varphi} |\det d^2_{\alpha,\alpha} \varphi(X,\alpha)|^{-1/2}$$

où $\widetilde{C}_\varphi = C_\varphi \cap \Sigma$.

Or pour développer K_τ pour la phase stationnaire, on peut faire le changement de variable qui ramène à $K_{\tau\theta}(X)$: on en déduit, le développement asymptotique étant le même que :

$$|\det d^2_{\alpha,\alpha} \varphi(x,\alpha)|^{-1/2} = r^{-\varepsilon_n} |\det d^2_{\alpha,\alpha} \varphi(X,\tilde{\alpha})|^{-1/2}$$

avec des notations claires et donc le théorème 3.

<u>Preuve du théorème 4</u> : Utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$|K_\tau(x)| \leq r^{-(\varepsilon_n - \varepsilon_p)} \widetilde{\varphi}_p(X) \cdot \tau^{-\frac{k}{2} + \varepsilon_p} .$$

Si $\widetilde{W}_k = W_k \cap \Sigma$, on peut donc prendre :

$$\varphi_p(x) = C.d(X,\widetilde{W}_{p+1})^{-\mu^p_{p+1}} \ldots d(X,\widetilde{W}_{n-1})^{-\mu^p_{x-1}} \cdot r^{-(\varepsilon_n - \varepsilon_p)} .$$

On utilise alors les relations suivantes :

$$C.r^{1/\inf \beta_j} . d(X,W_k) \leq d(x,W_k) \leq C' r^{1/\sup \beta_j} . d(X.W_k)$$

et $r \geq C.d(x,0)^{\sup \beta_j}$.

On en déduit facilement que μ_n^p satisfait la relation de récurrence annoncée dans le théorème 4. Pour majorer $\int_{d(x,W_p) \leq \varepsilon} \varphi_p(x)dx$, on utilise les coordonnées polaires quasi-homogènes (r,X) $(X \in \Sigma, r \in [0,1])$, les inégalités précédentes et la majoration $\left|\frac{D(x)}{D(r,X)}\right| \leq C.r^{n-1-\Sigma s_j}$.

On obtient alors :

$$\int_{d(x,W_p)\leq\varepsilon} \varphi_p(x)dx \leq C \int_o^1 r^{n-1-\Sigma s_j - \frac{1}{\inf \beta_j} \cdot \nu_n^p} \Big(\int_{d(X,\widetilde{W}_p)\leq \inf(C',r^{-\frac{1}{\inf \beta_j}})} \widetilde{\varphi}_p(X)dX\Big)dr.$$

Utilisant l'hypothèse de récurrence, $\int_{d(X,\widetilde{W}_p)\leq\varepsilon'} \widetilde{\varphi}_p(X)dX = O(\varepsilon'^{\alpha_{n-1,p}})$

on obtient la relation de définition de $\alpha_{n,p}$ dans le théorème 4.

§ 3. IDEES DE LA PREUVE DU THEOREME 1

On utilise deux majorations de $\hat{\chi}(\tau x)$.

(i) Si la courbure s'annule à l'ordre k en un point α_o de A, il est clair que $\varphi(x,\alpha)$ est un déploiement de A_{k+1} et on utilise la majoration uniforme en $\tau^{-1-\frac{1}{k+1}}$ (cf. remarque après le théorème 4). Donc si k est l'ordre maximum d'annulation de la courbure du bord, on a : $|\hat{\chi}(\tau x)| \leq C\tau^{-1-\frac{1}{k+2}}$.

(ii) Là où la courbure ne s'annule pas on utilise le théorème 3 ; si on désigne par $K(\alpha)$ la courbure au point α, on obtient ainsi :

$$|\hat{\chi}(\tau x)| \leq C\tau^{-\frac{3}{2}} \sum_{\widetilde{n}(\alpha)=\pm x} |K(\alpha)|^{-1/2}$$

Il reste à minorer $|K(\alpha)|$ en fonction de la distance de $x = \pm\widetilde{n}(\alpha)$ à $W_1 = \{\pm\widetilde{n}(\alpha) \mid K(\alpha) = 0\}$.

On obtient ainsi :

$$|\hat{\chi}(\tau x)| \leq C.\tau^{-3/2}.[d(x,W_1)]^{-\frac{k}{2(k+1)}}$$

(Majoration obtenue par une méthode indépendante dans [R_3]).

Pour majorer $R_\varepsilon(\lambda)$ on utilise ces deux inégalités en séparant la somme en deux morceaux : soit $A = \{\nu \mid d(\nu, \mathbb{R}^+ W_1) \leq 1\}$ et $B = \mathbb{Z}^2 \setminus A$.

Pour majorer $\sum\limits_{\nu \in A}$, on utilise (i), pour majorer $\sum\limits_{\nu \in B}$ on utilise ii)

Pour montrer que l'estimation est la meilleure possible si $n(\alpha)$ a une pente rationnelle en un point où K s'annule à l'ordre k, on calcule au premier ordre la somme $\sum\limits_{\nu \in A}$ et on montre qu'on obtient

$\lambda^{1-\frac{1}{k+2}}\varphi(\lambda)$ où φ est une fonction périodique non nulle de λ. Au contraire $\sum\limits_{\nu \in B}$ est toujours un $O(\lambda^{2/3})$. Enfin la majoration de $R_\theta(\lambda)$ se prouve en faisant l'hypothèse que la pente β de $\tilde{n}(\alpha)$ en un point où $K(\alpha)$ s'annule à un ordre ≥ 2 vérifie des inégalités du type $|\beta - \frac{p}{q}| \geq \frac{C}{q^{2+\varepsilon'}}$ $(\forall p, q \in \mathbb{Z})$.

§ 4. PREUVE DU THEOREME 2 POUR $n \leq 6$

Il faut d'abord énoncer un théorème sur les domaines génériques :

Théorème 5 : Soit X une variété compacte orientable de dimension n-1 $(n \leq 6)$, il existe un ouvert dense Ω de l'ensemble des prolongements C^∞ de X dans $\mathbb{R}^n$ tel que si $j \in \Omega$, la fonction phase $\varphi(x,\alpha) = \langle x,\alpha \rangle$ $x \in S^{n-1}, \alpha \in j(X)$ est localement stable, c'est-à-dire est localement équivalente au déploiement universel d'une singularité simple de codimension $\leq n-1$.

Ce théorème se montre sans difficultés en étudiant l'application $j \to \Lambda_\varphi$ qui à un prolongement de X dans $\mathbb{R}^n$ associe la sous variété lagrangienne Λ_φ de T^*S^{n-1}. Localement cette application est une submersion sur l'ensemble des sous variétés lagrangiennes de T^*S^{n-1} de classe de Liouville égale à 0 et dont la fibre de dimension 1 consiste à prendre des plongements parallèles entre eux (voir § 1). On se ramène alors aux théorèmes sur les immersions lagrangiennes stables énoncés dans [D].

Soit $W_p = \{x \in S^{n-1} \mid \varphi(x,.)$ a des singularités de codimension $p\}$, B_p (resp B'_p) $= \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, \mathbb{R}^+ W_p) \leq 1$ (resp. $\frac{3}{2}$)$\}$.
Et $A_p = B_p \setminus \bigcup\limits_{q>p} B_q$. (d est la distance euclidienne de $\mathbb{R}^n$).

Pour $\nu \in A_p$, on utilise la majoration du théorème 4 :

$$|\hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)| \leq |\lambda|\|\nu\|^{-\frac{n+1}{2}+\varepsilon_p} \cdot \varphi_p(\frac{\nu}{\|\nu\|}) .$$

Comme $d(\nu, \mathbb{R}^+ W_{p+1}) \geq 1$, il est clair que pour $y \in B(\nu, \frac{1}{2})$, on a :

$\varphi_p(\frac{\nu}{\|\nu\|}) \leq C\,\varphi_p(\frac{y}{\|y\|})$: en effet φ_p est un produit de puissances de fonctions distances à W_{p+1}, W_{p+2},... Utilisant le fait que si $\nu \neq \nu'$ on a $B(\nu,\frac{1}{2}) \cap B(\nu',\frac{1}{2}) = \emptyset$ et que si $\nu \in A_p$, on a $B(\nu,\frac{1}{2}) \subset B'_p$, on peut majorer $\sum_{\nu \in A_p}$ pour une intégrale sur B'_p

$$\sum_{\substack{\nu \in A_p \\ \nu \neq 0}} |\hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)|\,|\hat{\varphi}(2\pi\varepsilon\nu)| \leq C \int_{B'_p \cap \{\|y\| \geq 1\}} \frac{(|\lambda|\|y\|)^{-\frac{n+1}{2}+\varepsilon_p}}{(1+\lambda^{-\alpha}\|y\|)^N}\, \varphi_p(\frac{y}{\|y\|})\,dy.$$

On peut alors évaluer cette intégrale par passage en coordonnées polaires (r,x), il vient :

$$\sum_{\nu \in A_p, \nu \neq 0} \leq C. \int_1^{+\infty} \frac{(\lambda r)^{-\frac{n+1}{2}+\varepsilon_p}}{(1+\lambda^{-\alpha} r)^N} \times \Big(\int_{d(x,W_{p+1}) \leq \frac{3}{2r}} \varphi_p(x)\,dx\Big) r^{n-1}\,dr .$$

On majore l'intégrale de $\varphi_p(x)$ à l'aide du théorème 4 et on obtient :

$$\sum_{\nu \in A_p, \nu \neq 0} \leq C . \int_1^{+\infty} (\lambda r)^{-\frac{n+1}{2}+\varepsilon_p} . r^{n-1-\alpha_{n-1,p}} . (1+\lambda^{-\alpha} r)^{-N}\,dr.$$

On voit que la condition à vérifier pour obtenir le théorème 2 est :

(*) $$\varepsilon_p \leq \frac{n-1}{2n}\,\alpha_{n-1,p} .$$

On vérifie aisément que cette condition est satisfaite en regardant le tableau des $\alpha_{n,p}$.

Dans le cas $n = 7$, il apparaît deux difficultés :

a) La singularité E_7 de codimension 6 est simple : on peut faire les calculs du théorème 4, mais ils conduisent à une fonction $\varphi_o(x)$ non intégrable. On remplace φ_o par $\Psi_o = d(x,W_1)^{-\mu_1^o} \ldots d(x,W_5^o)^{-\mu_5} \cdot r^{-1/6}$ avec $r = \sum_1^6 x_j^{\beta_j}$; Ψ_o est localement intégrable, mais on ne peut plus utiliser l'argument précédent qui a permis de remplacer $\sum_{\nu \in A_o}$ pour une intégrale.

On utilise à la place un raisonnement basé sur la monotonie de r : si $x_j \leq x'_j$ $(\forall j)$, on a $r \times r'$.

b) Il apparaît aussi génériquement la singularité P_8 unimodulaire de codim 7, mais qui apparaît déjà en codimension 6, car elle fait partie d'une famille à un paramètre de singularités de même codimension non équivalentes entre elles. Ce déploiement qui apparaît n'est pas universel, mais a une propriété de transversalité par rapport à la famille à un paramètre, qui fait qu'on peut le décrire facilement : on peut alors adapter sans problème les raisonnements qui conduisent aux théorèmes 3 et 4 : en effet P_8 est quasi-homogène.

Pour $n = 8$, apparaît la singularité P_9 qui n'est plus quasi-homogène et que je ne sais pas comment étudier.

<u>Remarque</u> : Le théorème 2 est vrai toutes les fois que $\varphi(x,\alpha)$ est localement le déploiement universel de A_{m+1} ou D_{m+1} $(\forall n)$: mais c'est loin d'être générique.

BIBLIOGRAPHIE

[A_1] V. I. Arnold : Funct. Analysis 6, 1972, p.61-62.

[A_2] V. I. Arnold : Funct. Analysis 6, 1972, p.3-25.

[A_3] V. I. Arnold : Russ. Math. Survey 28, 1973, p.19-48.

[CV_1] Y. Colin de Verdière : Quasi-modes sur les variétés riemanniennes, Inventiones (à paraître).