M. S. Baouendi
C. Goulaouic

Solutions analytiques de l'équation d'Euler d'un fluide compressible

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 22, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A21_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

SOLUTIONS ANALYTIQUES DE L'EQUATION D'EULER D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE

par M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

Exposé n° XXII

17 Mai 1977

On s'intéresse ici à des résultats du type "Théorème de Cauchy-Kovalewsky" pour des équations pseudo-différentielles non linéaires ; en fait, dans cet exposé, on se restreint à un exemple significatif (pour lequel on donne une idée succinte des démonstrations) qui est l'équation d'Euler pour un fluide non visqueux compressible sur une variété riemannienne compacte analytique sans bord.

Soit Γ une telle variété ; si E est un fibré vectoriel analytique sur Γ, on note $\mathcal{A}(\Gamma,E)$ les sections analytiques de ce fibré ; on note $\mathcal{A}(\Gamma)$ l'espace des fonctions analytiques sur Γ, $T\Gamma$ le fibré tangent à Γ et ∇ la connexion riemannienne de Γ. Soit $T > 0$; on cherche à résoudre le système (où (t,x) désigne le point courant de $[-T,T] \times \Gamma$) :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \nabla_u u = \dfrac{\text{grad}.p}{\rho} + f \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad}\ \rho . u = 0 \\ \text{div } u = 0 \\ \rho(0,x) = \rho_o(x) \\ u(0,x) = u_o(x) \end{cases}$$

où grad, div désignent respectivement grad_x, div_x ; dans (1) on peut remplacer $\nabla_u u$ par $\text{div}(u \otimes u)$.

On a le résultat :

<u>Théorème 1</u> : Soient $f \in C([-T,T], \mathcal{A}(\Gamma,T\Gamma))$, $\rho_o \in \mathcal{A}(\Gamma)$, $\rho_o > 0$ et $u_o \in \mathcal{A}(\Gamma,T\Gamma)$, $\text{div } u_o = 0$. Il existe $\varepsilon > 0$ et une unique fonction $u \in C^1([-\varepsilon,\varepsilon], \mathcal{A}(\Gamma,T\Gamma))$, une unique fonction $\rho \in C^1([-\varepsilon,\varepsilon], \mathcal{A}(\Gamma))$ et une fonction $p \in C([-\varepsilon,\varepsilon], \mathcal{A}(\Gamma))$ déterminée à une constante près, satisfaisant le système (1) sur $]-\varepsilon,\varepsilon[\times \Gamma$.

De plus si f est aussi analytique par rapport à t, les fonctions u, ρ, p sont aussi analytiques par rapport à t.

Dans le cas de données C^∞, Marsden [2] a démontré l'existence et l'unicité de solutions C^∞ du système (1).

Lorsque ρ_o est constant, le système (1) est celui d'un fluide non visqueux incompressible pour lequel l'analogue du théorème 1 a été montré dans [1]. La difficulté nouvelle ici est la "forte non linéarité" du problème pseudo-différentiel auquel on réduit le système (1).

§ 1. REDUCTION DE (1) PAR ELIMINATION DE LA PRESSION

On réduit (1) en projetant sur les u à divergence nulle, ce qui en même temps élimine p. Pour cela on note :

$$A_\rho = \operatorname{div} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \qquad \text{pour } \rho > 0 ,$$

$$Q_\rho = \operatorname{grad} A_\rho^{-1} \operatorname{div}$$

(Q_ρ est bien défini et est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 dans $\mathcal{a}(\Gamma, T\Gamma)$),

$$\Lambda_\rho = I - \frac{1}{\rho} Q_\rho ;$$

on a, pour $u \in \mathcal{a}(\Gamma, T\Gamma)$ et $p \in \mathcal{a}(\Gamma)$,

i) $\Lambda_\rho u = u$ si $\operatorname{div} u = 0$

ii) $\operatorname{div} \Lambda_\rho u = 0$

iii) $\Lambda_\rho \left(\frac{\operatorname{grad} p}{\rho}\right) = 0.$

On vérifie aisément que (1) équivaut à (2) (3) :

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Lambda_\rho \operatorname{div}(u \otimes u) - \Lambda_\rho f = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho \,.\, u = 0 \\ u(0,x) = u_o(x) \quad \text{avec } \operatorname{div} u_o = 0 \\ \rho(0,x) = \rho_o(x) > 0. \end{cases}$$

(3) $p = A_\rho^{-1} \operatorname{div} (\operatorname{div}(u \otimes u) - f)$, défini à une constante additive près.

On se propose donc maintenant de résoudre le système (2).

§ 2. RAPPELS SUR UNE FORMULATION ABSTRAITE DU THEOREME DE CAUCHY

Soient $(E_s)_{0<s\leq s_0}$ une chaîne décroissante d'espaces de Banach, $T < 0$, $R > 0$, $V_0 \in E_{s_0}$, $\mathcal{F}$ une fonction continue de $[-T,T] \times \{V \in E_s \,;\, \|V - V_0\|_s < R\}$ dans $E_{s'}$, pour tous $0 < s' < s \leq s_0$, telle qu'il existe $C > 0$ vérifiant

$$(4) \qquad \sup_{|t|<T} \|\mathcal{F}(t,V) - \mathcal{F}(t,V')\|_{s'} \leq \frac{C}{s-s'} \|V - V'\|_s$$

pour tous V, V' dans E_s avec $\|V - V_0\|_s < R$ et $\|V' - V_0\|_s < R$.

On suppose de plus que la fonction

$$(5) \qquad t \mapsto \mathcal{F}(t,V_0) \text{ est continue sur } [-T,T] \text{ à valeurs dans } E_{s_0} .$$

Alors un résultat de Nishida [4] (améliorant un théorème de Nirenberg [3]) permet d'affirmer qu'il existe $a > 0$ et une unique fonction $V \in C^1 (]-a(s_0 - s), a(s_0 - s)[\,, E_s)$ pour $0 < s < s_0$ vérifiant $\|V - V_0\|_s < R$ et

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{F}(t,V) = 0 \\ \\ V(0) = V_0 \quad . \end{cases}$$

On va réduire le système (2) à la forme (6) ; pour cela on pose

$$V = \binom{u}{\rho}$$

et on définit la chaîne (E_s) comme suit :
on prend $X_1,\ldots,X_r$, r champs de vecteurs analytiques réels sur Γ qui engendrent $T\Gamma$ en chaque point. On note, pour $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)$ où $\alpha_j \in \{1,\ldots,r\}$

$$X^\alpha = X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} \ldots X_{\alpha_\ell} \quad ; \quad \ell = |\alpha| .$$

On choisit une norme $|||\ \ |||$ sur $C^{1/2}(\Gamma)$ (l'espace des fonctions höldériennes d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ), qui en fait une algèbre de Banach.

Pour $s > 0$, on note

$$F_s = \{u \in C^\infty(\Gamma)\ ; \|u\|_s = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \sup_{|\alpha|=k} |||X^\alpha u||| < \infty\}\ ;$$

on vérifie que (F_s) est une chaîne décroissante d'algèbres de Banach et que l'on a

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \bigcup_{s > o} F_s\ .$$

Plus généralement, si E est un fibré analytique riemannien sur Γ, on note

$$F_s(E) = \{u \in C^\infty(\Gamma,E); \|u\|_s = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \sup_{|\alpha|=k} |||\nabla_X^\alpha u||| < \infty\}$$

où $|||\ \ |||$ désigne une norme sur $C^{1/2}(\Gamma,E)$ et $\nabla_X^\alpha = \nabla_{X_{\alpha_1}} \cdots \nabla_{X_{\alpha_\ell}}$.

On remarque aussi que $(F_s(E))$ est une chaîne décroissante d'espaces de Banach, vérifiant $\mathcal{A}(\Gamma,E) = \bigcup_{s>o} F_s(E)$ et telle que l'on ait :

$$\|fu\|_s \leq \|f\|_s \|u\|_s \quad \text{pour tous } f \in F_s,\ u \in F_s(E).$$

On prend enfin

$$E_s = F_s(T\Gamma) \times F_s\ .$$

On utilisera les résultats suivants :

<u>Lemme 1</u> : Soient E, E' deux fibrés riemanniens analytiques sur Γ et P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre d ($d \in \mathbb{N}$) opérant de $\mathcal{A}(\Gamma,E)$ dans $\mathcal{A}(\Gamma,E')$.
Il existe $s_o > 0$, $C > 0$ tels que l'on ait, pour tous $0 < s' < s \leq s_o$,

$$\|P\|_{\mathcal{L}(F_s(E),F_{s'}(E'))} \leq \frac{C}{(s-s')^d}\ .$$

Pour une démonstration de ce lemme (dans le cas scalaire) on peut voir [1].

Lemme 2 : Soient E et E' deux fibrés riemanniens analytiques sur Γ, $u_o \in \mathcal{A}(\Gamma,E)$ et Ω un ouvert de E contenant $u_o(x)$ pour tout $x \in \Gamma$; soit $f : \Omega \to E'$, analytique et respectant la fibration. Alors il existe $s_o > 0$, $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que : pour tout $s \in \left]0,s_o\right]$, pour tous u,v dans $F_s(E)$ vérifiant

$$\|u-u_o\|_s < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|v-u_o\|_s < \varepsilon ,$$

les fonctions $x \mapsto f(u(x))$ et $x \mapsto f(v(x))$ sont dans $F_s(E')$ et vérifient

$$\|f(u(.)) - f(v(.))\|_s \le C\, \|u-v\|_s .$$

On ne donne pas ici la démonstration de ce lemme.

§ 3. IDEE DE LA RESOLUTION DE (2).

On utilise les lemmes :

Lemme 3 (formule de la résolvante) : Soient ρ_1, ρ_2 dans $\mathcal{A}(\Gamma)$ et strictement positifs ; on a

$$Q_{\rho_1} - Q_{\rho_2} = Q_{\rho_2}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) Q_{\rho_1} .$$

Démonstration : Soient $f \in \mathcal{A}(\Gamma,T\Gamma)$ et u une solution de $A_{\rho_1} u = \operatorname{div} f$; on a $\operatorname{grad} u = Q_{\rho_1} f$. $A_{\rho_2} u = (A_{\rho_2} - A_{\rho_1})u + \operatorname{div} f$,

$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} A_{\rho_2}^{-1}(A_{\rho_2} - A_{\rho_1})u + \operatorname{grad} A_{\rho_2}^{-1} \operatorname{div} f$; comme $A_{\rho_2} - A_{\rho_1} = \operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\operatorname{grad}$, on obtient :

$$(Q_{\rho_1} - Q_{\rho_2})f = Q_{\rho_2}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\operatorname{grad} u$$

$$(Q_{\rho_1} - Q_{\rho_2})f = Q_{\rho_2}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)Q_{\rho_1} f.$$

<u>Lemme 4</u> : Soit $\rho_o \in \mathcal{A}(\Gamma)$ et strictement positif. Il existe $s_o > 0$, $\varepsilon > 0$, $C_1 > 0$ tels que, pour tout $s \in]0, s_o]$ et tout $\rho \in F_s$ vérifiant $\|\rho - \rho_o\|_s < \varepsilon$, on ait :

$$\frac{1}{\rho} \in F_s \ ,$$

$$Q_\rho \in \mathcal{L}(F_s(\mathbb{T}\Gamma), F_s(\mathbb{T}\Gamma)) \text{ et}$$

$$\|Q_\rho\|_{\mathcal{L}(F_s(\mathbb{T}\Gamma), F_s(\mathbb{T}\Gamma))} \leq C_1 \ .$$

<u>Démonstration</u> : Il résulte du lemme 2 que $\frac{1}{\rho}$ appartient à F_s pourvu que s et $\|\rho - \rho_o\|_s$ soient assez petits.

En utilisant le lemme 3 on obtient

$$Q_{\rho_o} = (I - Q_{\rho_o}(\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho}))Q_\rho \ .$$

Pour s et $\|\rho - \rho_o\|_s$ assez petits, il résulte des lemmes 1 et 2 :

$$\|Q_{\rho_o}(\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho})\|_{\mathcal{L}(F_s(\mathbb{T}\Gamma), F_s(\mathbb{T}\Gamma))} \leq \frac{1}{2}$$

et alors $I - Q_{\rho_o}(\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho})$ est inversible et la majoration annoncée résulte de

$$Q_\rho = \sum_{n=o}^{\infty} (Q_{\rho_o}(\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho}))^n Q_{\rho_o} \ .$$

On peut maintenant écrire (2) sous la forme (6) en posant

$$\begin{cases} \mathcal{F}(t,V) = \begin{pmatrix} \Lambda_\rho \ \mathrm{div}(u \otimes u) - \Lambda_\rho f \\ \mathrm{grad}\,\rho . u \end{pmatrix} \\ \\ V_o = \begin{pmatrix} u_o \\ \rho_o \end{pmatrix} \ , \end{cases}$$

et il reste à vérifier que les hypothèses (4) (5) sont satisfaites avec le choix fait de la chaîne (E_s) et de $\mathcal{F}$. La vérification de (5) est immédiate. Pour vérifier (4) on traite successivement les différents termes de $\mathcal{F}$ en utilisant systématiquement les lemmes 1, 2, 3 et 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Problèmes de Cauchy pseudo-différentiels analytiques non linéaires ; Séminaire de l'Ecole Polytechnique 1975-76, exposé 13.

[2] J. E. Marsden : Well posedness of the equations of a non-homogeneous perfect fluid. Comm. in P. D. E. 1 (1976) 215-230.

[3] L. Nirenberg : An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kovalewsky theorem ; J. Diff. Geometry 6 (1972) 561-576.

[4] T. Nishida : A note on the Nirenberg's theorem as an abstract form of the non linear Cauchy-Kowalevski theorem in a scale of Banach space. To appear in J. of Diff. Geom.