M. FRISCH

Croissance asymptotique des solutions de l'équation des ondes sur une variété riemannienne compacte à courbure négative

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 21, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A20_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

CROISSANCE ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DE L'EQUATION DES ONDES SUR UNE VARIETE RIEMANNIENNE COMPACTE A COURBURE NEGATIVE

par M. FRISCH

Exposé n° XXI

19 Avril 1977

1) Introduction et énoncé du résultat

Soit M une variété riemannienne compacte de dimension d. On suppose que la courbure sectionnelle σ sur M est négative ou nulle, ou, si $d = 2$, qu'il n'y a pas de points conjugués sur M, ce qui est une hypothèse plus faible.

On s'intéresse alors au comportement asymptotique des solutions $u(x,t) : M \times R \longrightarrow ℂ$ de l'équation des ondes sur M:

$$(1) \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Le résultat de cet article est le suivant:

Théorème 1.1

Toute solution $u(x,t)$ de (1) vérifie la majoration

$$(2) \quad \begin{array}{l}\forall x \in M \\ \forall t \in R\end{array} \quad |u(x,t)| \leqslant C \exp(b|t|)\left(||u(x,0)||_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}} + \left|\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right|\right|_{\Lambda_{\frac{d-3}{2}+\varepsilon}}\right)$$

où $||u(x,0)||_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}}$ désigne la norme lipschitzienne d'ordre $\frac{d-1}{2}+\varepsilon$ (c.f. [F]) de la fonction $u(x,0)$ sur M, et où les constantes C et b ne dépendent que de M.

Remarque 1.2

Si la dimension d est impaire, on peut même écrire:

$$(3) \quad \begin{array}{l}\forall x \in M \\ \forall t \in R\end{array} \quad |u(x,t)| \leqslant C \exp(b|t|)\left(||u(x,0)||_{C^{\frac{d-1}{2}}} + \left|\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right|\right|_{C^{\frac{d-3}{2}}}\right)$$

Ce résultat précise celui de [C.V.F] où l'on prouve, sans hypothèse de courbure, pour ε positif, l'existence d'un poids $\omega(t) : R \longrightarrow R^+$ avec

$$(4) \quad \begin{array}{l}\forall x \in M \\ \forall t \in R\end{array} \quad |u(x,t)| \leqslant \omega(t)\left(||u(x,0)||_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}} + \left|\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right|\right|_{\Lambda_{\frac{d-3}{2}+\varepsilon}}\right)$$

On rappelle [C.V.F.] que si $\varepsilon < 0$, aucun contrôle du type (2) ou même (4) n'est possible, et que si $\varepsilon > \frac{1}{2}$ les majorations (2) et (4) n'ont plus d'intérêt: en effet les solutions (sans terme linéaire en t) vérifiant pour $\varepsilon' > 0$, $||u(x,0)||_{\Lambda_{\frac{n}{2}+\varepsilon'}} \leq 1$ et $||\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)||_{\Lambda_{\frac{n-2}{2}+\varepsilon'}} \leq 1$ sont uniformément bornées, comme on peut le montrer à l'aide du lemme de Sobolev.

La démonstration du théorème utilise une solution approchée explicite du problème de Cauchy pour l'équation des ondes sur M. Cette solution n'est en général que locale mais se trouve être globale si la courbure sectionnelle est négative ou nulle (il n'y a pas alors de points conjugués). Le calcul de cette solution remonte à Hadamard [H] (voir aussi [R]), mais nous nous servirons de la version moderne due à P. Bérard [B] qui donne à ces calculs des motivations très claires en liaison avec la théorie des opérateurs intégraux de Fourier de Hörmander.

Le plan de cet article est le suivant: au §2 on a rassemblé les lemmes de géométrie riemannienne utilisés. Au §3, on énonce les résultats de [B] relatifs à la solution approchée du problème de Cauchy; on majore celle-ci au §4 et on termine par la majoration du reste au §5.

2) Lemmes de géométrie riemannienne

Soit $\tilde{M}$ le revêtement universel de M, Γ le groupe des automorphismes du revêtement $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$. Notons $\overline{xy}$ la distance riemannienne sur $\tilde{M}$. Soit $-a^2$ la borne inférieure de la courbure sectionnelle σ sur M.

Les hypothèses portant sur M et σ impliquent que pour tout $x \in \tilde{M}$, l'application exponentielle $\exp_x : T_x\tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$ est un difféomorphisme C^∞. On note $\Theta(x,y)$ le déterminant de l'application linéaire tangente à $\exp_x$ au point $\exp_x^{-1}(y)$ et on détermine les fonctions $u_k : \tilde{M} \times \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ par les formules:

$$u_o(x,y) = \Theta^{-\frac{1}{2}}(x,y)$$

$$u_{k+1}(x,y) = \Theta^{-\frac{1}{2}}(x,y) \int_o^1 s^k\, \Theta^{+\frac{1}{2}}(x,\exp_x s \exp_x^{-1} y)\Delta_2 u_k(x,\exp_x s \exp_x^{-1} y)ds$$

où Δ_2 désigne le laplacien par rapport à la seconde variable (cf. [B.G.M.] p. 208 et suivantes, où ces fonctions servent à calculer une solution fondamentale de l'équation de la chaleur). Les fonctions $\Theta(x,y)$, $u_k(x,y)$ et $\overline{xy}^2$ sont indéfiniment dérivables sur $\tilde{M} \times \tilde{M}$

Lemme 1.1

Pour tous entiers k et k', il existe des constantes C et h telles que

$$\forall x \in \tilde{M},\ \forall y \in \tilde{M} \quad |\Delta^{k'} u_k(x,y)| \leqslant C\, e^{h\overline{xy}}$$

Le lemme est démontré dans [C.V.] p. 92 et suivantes sous les hypothèses $d = 2$ et $\sigma \leqslant 0$; dans [B] il est démontré précisément sous les hypothèses de notre article.

Lemme 2.2

Soit $\tilde{M}_o \subset \tilde{M}$ une partie bornée et posons pour $t > 0$

$$\Phi(t,x) = \mathrm{Card}\{\gamma \in \Gamma \mid \exists y \in \tilde{M}_o,\ \overline{x\gamma(y)} \leqslant t\}$$

On a alors:

$$\forall x \in \tilde{M},\ \forall t > 0 \quad \Phi(t,x) \leqslant C \quad \exp((d-1)at)$$

La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme 6 p. 91 de [C.V.].

Lemme 2.3

([C.V.] p.94) - Il existe une fonction $\phi : \tilde{M} \longrightarrow [0,1]$ indéfiniment dérivable à support compact, telle que pour toute fonction $f : M \to \mathbb{C}$ on ait:

$$\int_M f(x')v_M(x') = \int_{\tilde{M}} f\circ\pi(x)\ \phi(x)\ v_{\tilde{M}}(x)$$

où v_M et $v_{\tilde{M}}$ désignent les mesures canoniques sur M et $\tilde{M}$.

3) Enoncé des résultats de [B] relatifs à la solution approchée du problème de Cauchy.

On désigne par P_1 le problème de Cauchy pour l'équation des ondes sur M (Δ opérateur négatif):

$$P_1 \quad \begin{cases} (\Delta - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2})(e(t,x,y)) = \square\, e(t,x,y) = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} e(t,x,y) = \delta(x-y) \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\partial e}{\partial t}(t,x,y) = 0 \end{cases}$$

Nous aurons également besoin de considérer le problème analogue :

$$P_2 \left[\begin{array}{l} \Box\, e(t,x,y) = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} e(t,x,y) = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} \frac{\partial e}{\partial t}(t,x,y) = \delta(x-y) \end{array}\right.$$

Pour les résoudre, on utilise des régularisées canoniques de distributions, au sens de Guelfand-Shilov ([G.S.]): si α est un réel non entier négatif, on note $(x)_-^\alpha$ la distribution sur $\mathbb{R}$ régularisée canonique de la fonction f définie par:

$$\left|\begin{array}{l} f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x > 0 \\ f(x) = x^\alpha \quad \text{si} \quad x < 0 \end{array}\right.$$

Si $\gamma \in \Gamma$ la distribution $(\overline{x\gamma(y)}^2 - t^2)_-^\alpha$ sur $\tilde{M} \times \tilde{M} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ est alors définie comme l'image réciproque de la distribution $(x)_-^\alpha$ par la submersion $(x,y,t) \longrightarrow \overline{x\gamma(y)}^2 - t^2$. Une expression du type

$$g(x,y,t) = \sum_{\gamma\in\Gamma} u_k(x,\gamma(y))(\overline{x\gamma(y)}^2 - t^2)_-^\alpha$$

est pour tout t une somme finie en vertu du lemme 1.1, et définit en fait une distribution sur $M \times M \times (\mathbb{R}-\{0\})$: en effet de $u_k(x,y) = u_k(\gamma x, \gamma y)$ on déduit $g(\gamma_1 x; \gamma_2 y, t) = g(x,y,t)$ pour tous γ_1 et γ_2 et si $(x,y) \in M^2$, on peut effectuer la sommation en remplaçant x et y par des représentants quelconques dans $\tilde{M}$. On les choisira toutefois dans une partie bornée fixe $\tilde{M}_o \subset M$ et on se permetra de les noter encore x et y. Nous sommes maintenant en mesure de donner la solution approchée du problème P_1:

<u>Proposition 3.1</u>

Soit la distribution sur $M \times M \times (\mathbb{R} - \{0\})$ définie par

$$e_N(t,x,y) = c_o \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{u_k(x,\gamma(y))}{4^k} |t| \left. \frac{(\overline{x\gamma(y)}^2 - t^2)_-^{k-\alpha-2}}{\Gamma(k-\alpha-1)} \right|_{\alpha = \frac{d-3}{2}}$$

Pour un choix convenable de la constante c_o on a:

$$\left[\begin{array}{l} \Box e_N(t,x,y) = c_o \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} (-1)^N \dfrac{\Delta_y u_N(x,\gamma(y))}{4^N} |t| \dfrac{(\overline{x\gamma(y)}^2 - t^2)_-^{N-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}}{\Gamma(N - \frac{d}{2} + \frac{1}{2})} \\ \lim\limits_{t\to 0} e_N(t,x,y) = \delta(x-y) \\ \lim\limits_{t\to 0} e_N(t,x,y) = 0 \end{array}\right.$$

Remarque 3.2

Si d est impair, $k - \alpha - 2$ peut être entier négatif. L'expression:

$$\left.\frac{(\overline{x\gamma(y)})^2 - t^2)_-^{k-\alpha-2}}{\Gamma(k-\alpha-1)}\right|_{\alpha = \frac{d-3}{2}}$$

désigne alors la limite ([G.S.] p. 56):

$$\lim_{\alpha \to \frac{d-3}{2}} \frac{(\overline{x\gamma(y)})^2 - t^2)_-^{k-\alpha-2}}{\Gamma(k-\alpha-1)} = (-1)^{\frac{d-1}{2}-k}\,\delta^{(\frac{d-1}{2}-k)}(\overline{x\gamma(y)}^2 - t^2)$$

Indiquons de même la solution du problème P_2:

Proposition 3.3

Soit la distribution sur $M \times M \times (\mathbb{R} - \{0\})$ définie par:

$$e_N(t,x,y) = c_o \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{u_k(x,\gamma(y))}{4^k} \operatorname{sgn}(t) \left.\frac{(\overline{x\gamma(y)}^2 - t^2)_-^{k-\alpha-1}}{\Gamma(k-\alpha)}\right|_{\alpha = \frac{d-3}{2}}$$

Pour un choix convenable de la constante c_o, on a

$$\begin{cases} \square\, e_N(t,x,y) = c_o(-1)^N \sum_{\gamma\in\Gamma} \dfrac{\Delta_y u_N(x,\gamma(y))}{4^N} \operatorname{sgn}(t) \dfrac{(\overline{x\gamma(y)}^2 - t^2)_-^{N-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}}}{\Gamma(N - \frac{d}{2} + \frac{3}{2})} \\ \lim_{t\to 0} e_N(t,x,y) = 0 \\ \lim_{t\to 0} \dfrac{\partial e_N}{\partial t}(t,x,y) = \delta(x-y) \end{cases}$$

4) Majoration de la solution approchée

Nous nous contenterons de démontrer le théorème dans le cas particulier d'une solution u de conditions initiales:

$$(5) \quad \begin{cases} u(x,0) = f(x) \in \Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

Le cas général se traite, bien sûr, par superposition.

Nous nous proposons de montrer que pour tout entier N on a:

Proposition 4.1

$$\left|\int_M e_N(t,x,y) f(y)\, dy\right| \leqslant C_N \exp(b|t|)\, \|f\|_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}}$$ où e_N est donnée par la proposition 3.1.

Au paragraphe 5, on verra que si N est choisi assez grand, il est facile d'obtenir une majoration du même type pour le reste $u(x,t) - \int_M e_N(t,x,y)f(y)dy$. La démonstration du théorème sera alors complète.

<u>Preuve de la proposition 4.1</u>

Utilisons le lemme 2.3 :

$$\int_M e_N(t,x,y)f(y)dy = \int_{\tilde M} e_N(t,x,y)\phi(y)\, f\circ\pi(y)\, dy = c_o \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{k=0}^{N} A_{k,\gamma}$$

en posant

$$A_{k,\gamma} = \frac{(-1)^k}{4^k}|t| \int_{\tilde M} u_k(x,\gamma(y)) \left.\frac{(\overline{x\gamma(y)}^2 - t^2)_-^{k-\alpha-2}}{\Gamma(k-\alpha-1)}\right|_{\alpha = \frac{d-3}{2}} \phi(y) f\circ\pi(y)dy.$$

<u>a) Cas $d = 2n$ pair</u>

Majorons d'abord le terme correspondant à $k = 0$ pour $\gamma \in \Gamma$ fixé. Cela revient à étudier la fonction:

$$g(x,t) = \int_{\tilde M} u_o(x,\gamma(y))(\overline{x\gamma(y)}^2 - t^2)_-^{-\frac{d+1}{2}} \phi(y)f\circ\pi(y)dy$$

Nous allons effectuer un passage en "coordonnées polaires" en intégrant sur l'espace tangent $T_x\tilde M$ ([B.G.M.] Prop.CIII 2 p.55): si $m \in T_x\tilde M$ on pose $\exp_x m = y$ et $\overline{x\gamma(y)} = r$. On a alors:

$$g(x,t) = \int_{T_x\tilde M} u_o(x,\gamma(\exp_x m))(r^2-t^2)_-^{-\frac{d+1}{2}} \phi(\exp_x m)f\circ\pi(\exp_x m)\Theta(x,\exp_x m)dm$$

$$= \int_0^\infty r^{d-1}(r^2-t^2)_-^{-\frac{d+1}{2}} \bar h_x(r)dr$$

en posant

$$h_x(m) = u_o(x,\gamma(\exp_x m))\phi(\exp_x m)f\circ\pi(\exp_x m)\ \Theta(x,\exp_x m)$$

et

$$\bar h_x(r) = \int_{S^{n-1}} h_x(rw)dw \quad \text{avec} \quad \bar h_x(0) = h(0) \text{ vol } S^{n-1}.$$

Dans toute la suite, on se restreint au choix $t > 0$; en posant encore

$$(6) \qquad v(r) = \bar h_x(r) \frac{r^{d-1}}{(r+t)^{\frac{d+1}{2}}}$$

On a finalement:

$$g(x,t) = \int_0^t (r-t)_-^{-\frac{d+1}{2}} v(r)dr.$$

Le lemme essentiel est le suivant :

Lemme 4.2

Il existe des constantes C et c ne dépendant que de M, telles que:

$$||v||_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}([0,t])} \leqslant C\,\frac{\exp ct}{t^{1+\varepsilon}}\,||f||_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}}$$

Voyons comment le lemme entraine la proposition 4.1. Explicitons pour cela la définition de la distribution $(x)_-^{\alpha}$ ([G.S.]p. 47):

$$g(x,t) = \int_0^t (r-t)^{-\frac{2n+1}{2}}\left[v(r)-v(t)-(r-t)v'(t)-\ldots-\frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,v^{(n-1)}(t)\right]dr$$

Or il existe θ avec $0<\theta<t$, tel que

$$v(r)-v(t)-\ldots-\frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,v^{(n-1)}(t) = \frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,(v^{(n-1)}(\theta)-v^{(n-1)}(t))$$

et donc en remarquant que $v^{(n-1)}\in\Lambda_{1/2+\varepsilon}([0,t])$ et qu'on peut se limiter au cas $\varepsilon\leq 1/2$ (cf. l'introduction), on a pour $0<r<t$:

$$\left|v(r)-v(t)\ldots-\frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,v^{(n-1)}(t)\right| \leqslant \frac{|r-t|^{n-1/2+\varepsilon}}{(n-1)!}\,||v||_{\Lambda_{n-\frac{1}{2}+\varepsilon}([0,t])}$$

$$\leqslant C\,\frac{\exp ct}{t^{1+\varepsilon}}\,|r-t|^{n-1/2+\varepsilon}\,||f||_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}}$$

donc:

$$(A_{o,\gamma}) = \left|\frac{t}{\Gamma(-\frac{d-1}{2})}\,g(t,x)\right| \leqslant C'\,\frac{\exp ct}{t^{\varepsilon}}\int_o^t \frac{dr}{|r-t|^{1-\varepsilon}}\,||f||_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}}$$

$$\leqslant C'\,\exp(ct)\,||f||_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}}$$

Du lemme 2.2 on déduit

$$\left|\sum_{\gamma\varepsilon\Gamma} A_{o,\gamma}(x,t)\right| \leqslant C''\,\exp(ct+(d-1)at)\,||f||_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}}$$

On obtient finalement la majoration cherchée pour l'expression

$$\int_M e_N(t,x,y)f(y)dy = c_o \sum_{\gamma\varepsilon\Gamma}\sum_{k=0}^{N} A_{k,\gamma}$$

en remarquant pour les calculs effectués pour $A_{o,\gamma}$ sont à fortiori valables pour $A_{k,\gamma}$, les distributions intervenant étant plus régulières que celles de $A_{o,\gamma}$.

Il s'agit maintenant de démontrer le lemme 4.2. Ce lemme résulte de (6) et de la combinaison des 3 lemmes suivants:

Lemme 4.3

Pour $\alpha>0$ on a $||f_1f_2||_{\Lambda_\alpha} \leqslant C_\alpha ||f_1||_{\Lambda_\alpha}\,||f_2||_{\Lambda_\alpha}$

Lemme 4.4

$$\left\| \frac{r^{d-1}}{(r+t)^{\frac{d+1}{2}}} \right\|_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}([0,t])} \leqslant \frac{C}{t^{1+\varepsilon}}$$

Lemme 4.5

$$\|\overline{h_x}\|_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}([0,t])} \leqslant C \exp(ct) \ \|f\|_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}}$$

Le lemme 4.3 est évident. Montrons le lemme 4.4.

Si $d = 2$ nous devons prouver:

$$\left\| \frac{r}{(r+t)^{3/2}} \right\|_{\Lambda_{\frac{1}{2}+\varepsilon}([0,t])} \leqslant \frac{C}{t^{1+\varepsilon}}$$

le calcul est sans difficulté. On peut par exemple poser $f_1(r) = r$, $f_2(r) = 1/(r+t)$, $f_3(r) = \frac{1}{\sqrt{r+t}}$ et utiliser le:

Lemme 4.6

$$\|f_1f_2f_3\|_{\Lambda_\alpha} \leqslant \|f_1\|_{\Lambda_\alpha} \|f_2\|_\infty \|f_3\|_\infty + \|f_2\|_{\Lambda_\alpha} \|f_3\|_\infty \|f_1\|_\infty + $$
$$+ \|f_3\|_{\Lambda_\alpha} \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty$$

Pour d quelconque on se ramène en effectuant un nombre entier de dérivations à des calculs du même type.

Il reste à prouver le lemme 4.5. Pour cela, il suffit de montrer:

$$\|h_x(.)\|_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}(B_{x,\gamma,t})} \leqslant C \exp(ct) \ \|f\|_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}}$$

où l'on a posé $B_{x,\gamma,t} = \{m \in T_x\tilde{M} \mid \overline{x\gamma(\exp_x m)} \leqslant t\}$

L'exponentielle étant un difféomorphisme indéfiniment dérivable, cela revient à montrer qu'en posant:

$v_x(y) = u_o(x,\gamma(y)) \ \phi(y) \ f\circ\pi(y) \ \Theta(x,y)$ et

$B'_{x,\gamma,t} = \{y \in \tilde{M} \mid x\gamma(y) \leqslant t\}$ on a:

$$(7) \quad \|v_x(.)\|_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}(B'_{x,\gamma,t})} \leqslant C \exp(ct) \ \|f\|_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}}$$

et (7) est prouvé par le lemme 4.3 et les remarques suivantes:

i) $f\circ\pi \in \Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}(\tilde{M})$

ii) On a $\phi(.)\ \Theta\ (x,.) \in C_o^\infty(\tilde{M})$ donc pour tout entier K on peut trouver une constante C_K indépendante de $x \in \tilde{M}_o$ avec

$$||\phi(.)\ \Theta\ (x,.)||_{C^K(\tilde{M})} \leqslant C_K$$

iii) Du lemme 2.1 on déduit pour tout entier K

$$||u_o(x,\gamma(.)||_{C^K(\tilde{M})} \leqslant C'_K \exp(h_K \overline{x\gamma(y)})$$

et donc

$$||u_o(x,\gamma(.)||_{C^K(B'_{x,\gamma,t})} \leqslant C'_K \exp(h_K t)$$

b) Cas $d = 2n+1$ impair

Procédant comme en a) nous étudions

$$g(x,t) = \int_{\tilde{M}} u_o(x,\gamma(y)) \left.\frac{(\overline{x\gamma(y)}^2 - t^2)_-^{-\alpha-2}}{\Gamma(-\alpha-1)}\right|_{\alpha=n-1} \phi(y) f\circ\pi(y)dy$$

$$= \int_{\tilde{M}} u_o(x,\gamma(y))\ \delta^{(n)}(\overline{x\gamma(y)}^2 - t^2)(-1)^n\ \phi(y)f\circ\pi(y)dy$$

$$= \int_{T_x\tilde{M}} u_o(x,\gamma(\exp_x m))\ \delta^{(n)}(r^2-t^2)(-1)^n\ \phi(\exp_x m)f\circ\pi(\exp_x m)\Theta(x,\exp_x m)dm$$

$$= \int_0^\infty \delta^{(n)}(r^2-t^2)\ \overline{h_x(r)}\ \ r^{2n}dr$$

Or on a ([G.S.]) p. 182)) :

$$\delta^{(n)}(r^2-t^2) = \frac{1}{2t}\left(\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\right)^n (\delta(r+t) + \delta(r-t))$$

et donc

$$g(x,t) = \frac{1}{2t}\sum_{K=0}^{n} P_K(t)\ \overline{h_x}^{(K)}(t)$$

où les P_K sont des polynômes. Par suite:

$$|A_{o,\gamma}| = |t\ g(x,t)| \leqslant C\exp(ct)\ ||f||_{C^n} = C\exp(ct)\ ||f||_{C^{\frac{d-1}{2}}}$$

la fin de la démonstration de la proposition 3.1 dans ce cas est alors la même qu'en a).

5) Majoration du reste

Considérant toujours une solution $u(x,t)$ de (1) de condition initiales (5), il reste pour compléter la démonstration du théorème 1.1 à prouver la proposition suivante:

Proposition 5.2

Si $N > d+2$, on a

$$\left|u(x,t) - \int_M e_N(t,x,g)f(g)dy\right| \leqslant C\ \exp(b\ t) \sup_{x\in M} |f(x)|$$

Pour démontrer cette proposition, nous pourons nous contenter d'évaluer des normes de Sobolev. Le calcul qui suit est essentiellement celui du paragraphe 39 de [B]. Posons:

$$v(x,t) = u(x,t) - \int_M e_N(t,x,y)\ f(y)dy$$

On a alors:

$$(8) \qquad \square\, v(x,t) = -\int_M \square\, e_N(t,x,y)\ f(g)dy$$

et d'autre part on a $v(x,0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0$. Par suite:

$$v(x,t) = \int_o^t \frac{\sin((\theta-t)\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}} \quad v(x,\theta)d\theta$$

Mais pour tout t et tous s, $\exp t\sqrt{-\Delta}$ définit un opérateur unitaire dans $H^s(M)$, donc:

$$\left|\left|\frac{\sin((\theta-t)\ \sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}} \quad v(.,t)\right|\right|_{H^{s+1}(M)} \leqslant C||\sin((\theta-t)\ \sqrt{-\Delta})\square\, v(.,t)||_{H^s(M)}$$

$$\leqslant 2C||\square\, v(.,t)||_{H^s(M)}$$

et donc

$$(9)\ ||v(.,t)||_{H^{s+1}(M)} \leqslant 2C\ t \sup_{\theta\varepsilon[0,t]} ||\square\, v(.,\theta)||_{H^s(M)}$$

Utilisons alors le lemme 2.3:

$$||\square\, v(.,\theta)||_{H^s(M)} = ||(1-\Delta.)^{s/2} \quad v(.,\theta)||_{L^2(M)} = ||\sqrt{\phi(.)}(1-\Delta.)^{s/2}\square\, v(.,\theta)||_{L^2(\tilde{M})}$$

Donc d'après la proposition 3.1, et (8):

$$||\Box\, v(.,\theta)||_{H^s(M)} =$$

$$= ||c_o \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{\tilde{M}} \sqrt{\phi(.)}\,(1-\Delta.)^{s/2} | \frac{\Delta_y u_N(.,\gamma(y))}{4^N} \frac{(\overline{.\gamma(y)}^2 - \theta^2)_-^{N-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}}{\Gamma(N-\frac{d}{2}-\frac{1}{2})} \phi(y) f\circ\pi(y)dy||_{L^2(\tilde{M})}$$

Ayant supposé $N > d+2$, il nous est possible de choisir un entier pair s tel que:

$$(10)\quad \frac{d}{2} - 1 < s < N - \frac{d}{2} - \frac{1}{2}$$

Il est alors aisé de majorer polynomialement en θ l'expression suivante qui est en fait une fonction continue:

$$\phi(.) = (1-\Delta.)^{s/2} (\overline{.\gamma(y)}^2 - \theta^2)_-^{N-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}$$

Par suite:

$$||\ v(.,\theta)||_{H^s(\tilde{M})} \leqslant C \exp((h+(d-1)a)\theta) \sup_{x\in M} |f(x)|$$

d'après les lemmes 2.1 et 2.2. Finalement on déduit de (9):

$$||v(.,t)||_{H^{s+1}(M)} \leqslant C \exp(bt) \sup_{x\in M} |f(x)|$$

et comme $s+1 > \frac{d}{2}$ d'après (10), la proposition 5.1 résulte maintenant du lemme de Sobolev.

Terminons en précisant quelles majorations donnent ces méthodes appliquées en cas du tore $T^d = R^d/_{Z^d}$, dont la courbure est nulle: comme on a $u_o(x,y) = 1$ et $u_k(x,y) = 0$ pour $k \geqslant 1$, il n'y a pas de reste. Majorant dans R^d le nombre des points entiers contenus dans une sphère de rayon t par $O(t^d)$ (c.f. lemme 2.2), on obtient:

$$|u(x,t)| \leqslant C(1+(t))^d\ ||u(x,0)||_{\Lambda_{\frac{d-1}{2}+\varepsilon}(T^d)}$$

pour toute solution u de (1) avec $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$.

Ce poids n'est donc pas le meilleur possible (c.f. [F]). Nous ne savons d'ailleurs rien du problème du meilleur poids dans le cas général où $\sigma < 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[B.] Bérard,P: On the wave equation on a compact riemannian manifold without conjugate points. A paraître.
Résumé au C.R.A.S. t. 283, 1976, 45-48.

[B.G.M.] Berger,M.; Gauduchon P.; Mazet E.; Le spectre d'une variété riemannienne. Lecture Notes in Math. 194, Springer 1971.

[C.V.] Colin de Verdière , Y.; Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I, Comp. Math. vl.27, Fasc. 1, 1973.

[C.V.F.] Colin de Verdière , Y. et Frisch,M.; Régularité lipschitzienne et solutions de l'équation des ondes sur une variété riemannienne compacte. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. t.9, 1976, 539-565.

[F] Frisch, M.; Propriétés asymptotiques des vibrations du tore. J. Math. pures et appl., 54, 1975, 285-304.

[G.S.] Guelfand, I.M. et Shilov, G.E.; Les distributions, tome 1, Dunod 1962.

[H.] Hadamard, J.; Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Paris (1932).

[R.] Riesz, M.; L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Math. 81 (1949).