

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. KASHIWARA

P. SCHAPIRA

Problème de Cauchy pour les systèmes d'équations différentielles et microdifférentielles dans le domaine complexe

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 20,
p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977___A19_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

PROBLEME DE CAUCHY POUR LES SYSTEMES D'EQUATIONS
DIFFERENTIELLES ET MICRODIFFERENTIELLES DANS
LE DOMAINE COMPLEXE

par M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA

INTRODUCTION

Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux modules cohérents sur l'anneau \mathcal{D}_X des opérateurs différentiels (d'ordre fini) sur une variété analytique complexe de X , Y une sous-variété analytique complexe de X , \mathcal{M}_Y et \mathcal{N}_Y les systèmes induits par \mathcal{M} et \mathcal{N} sur Y . Notons \mathcal{N}^∞ le module engendré par \mathcal{N} sur l'anneau \mathcal{D}_X^∞ des opérateurs différentiels d'ordre infini. Nous démontrons sous une hypothèse de nature géométrique reliant Y et les variétés caractéristiques de \mathcal{M} et \mathcal{N} (dans T^*X le fibré cotangent à X), que les morphismes naturels :

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^i(\mathcal{M}, \mathcal{N}^\infty)|_Y \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{D}_Y}^i(\mathcal{M}_Y, \mathcal{N}_Y^\infty)$$

sont, pour tout i , des isomorphismes. En fait nous démontrons un théorème plus général, analogue au précédent, mais concernant des modules cohérents sur l'anneau \mathcal{E}_X des opérateurs microdifférentiels sur T^*X . Pour cela nous utilisons les outils et les techniques de M. Kashiwara [5], et M. Sato, M. Kashiwara, T. Kawai [13], ainsi qu'un théorème de Cauchy-Kowalewski pseudo-différentiel de J. M. Bony et P. Schapira [2]. Comme applications, nous retrouvons l'extension aux systèmes du théorème de Cauchy-Kowalewski, dans la formulation due à M. Kashiwara [5] ainsi que le théorème de Y. Hamada [3], C. Wagschal [15], Y. Hamada, J. Leray, W. Wagschal [4]; mais outre que nous obtenons celui-ci pour des systèmes quelconques (non nécessairement "déterminés"), notre hypothèse sur la variété caractéristique du système est beaucoup plus faible que chez ces auteurs ("non micro-caractéristique" à la place de "multiplicités constantes"). De plus un théorème de M. Sato et M. Kashiwara [12] nous permet de traiter, même dans le cas de systèmes déterminés de multiplicités constantes, des situations qui échappent à [4]. Enfin notre théorème (et les résultats de [6] et [9]) nous permet de traiter le cas où les données de Cauchy sont des fonctions holomorphes dans le complémentaire d'hyper-surfaces avec singularités. Nous ne traitons ici qu'une classe d'exemples de ce type.

§ 1. PRELIMINAIRES ET RAPPELS (cf. [13]).

Nous désignons par X une variété analytique complexe, munie du faisceau \mathcal{O}_X des fonctions holomorphes. Nous notons \mathcal{D}_X le faisceau (d'anneaux) des opérateurs différentiels d'ordre fini, et \mathcal{D}^∞ celui des opérateurs d'ordre infini.

Si Z est une sous-variété de X de codimension d , le faisceau $\mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbf{R}}$ sur T_Z^*X , le fibré conormal à Z dans X , est défini grâce à la transformation comonoidale par :

$$\mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbf{R}} = \mathcal{H}_{T_Z^*X}^d (\pi^{-1} \mathcal{O}_X)^a$$

où a désigne l'application antipodale et π la projection

$$(X - Z) \sqcup T_Z^*X \rightarrow X .$$

Le premier espace étant muni de la topologie de co-éclaté. Le faisceau $\mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbf{R}}$ est localement constant sur les orbites de l'action de \mathbf{R}_+ .

Si on identifie X à la diagonale de $X \times X$ par la première projection, et T^*X au fibré conormal à la diagonale de $X \times X$, on peut définir le faisceau $\mathcal{E}_X^{\mathbf{R}}$ sur T^*X par :

$$\mathcal{E}_X^{\mathbf{R}} = \mathcal{C}_{X|X \times X}^{\mathbf{R}} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times X}} \Omega^{(0,n)}$$

où $\Omega^{(0,n)}$ désigne le faisceau des formes différentielles holomorphes de type $(0,n)$, n étant la dimension de X . Si on note γ la projection de $T^*X - T_X^*X$ sur P^*X , on peut définir un faisceau \mathcal{E}_X^∞ par :

$$\mathcal{E}_X^\infty | T^*X - T_X^*X = \gamma^{-1} \gamma_* \mathcal{E}_X^{\mathbf{R}}$$

$$\mathcal{E}_X^\infty | T_X^*X = \mathcal{E}_X^{\mathbf{R}} | T_X^*X .$$

Le faisceau \mathcal{E}_X^∞ n'est autre que le faisceau des opérateurs microdifférentiels (d'ordre infini). On note \mathcal{E}_X le sous-faisceau de \mathcal{E}_X^∞ les opérateurs d'ordre fini. En identifiant X à la section nulle T_X^*X on a :

$$\mathcal{E}_X^\infty | T_X^*X = \mathcal{D}_X^\infty , \quad \mathcal{E}_X | T_X^*X = \mathcal{D}_X .$$

Remarque : Dans [13] le faisceau $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{R}}|_X$ est seulement construit sur $S_{\mathbb{Z}}^*X$, le fibré conormal en sphères, mais le lecteur adaptera lui-même la construction à $T_{\mathbb{Z}}^*X$. Quant aux faisceaux \mathcal{E}_X^{∞} et \mathcal{E}_X ils sont seulement construits sur le fibré projectif P^*X dans [13] sont notés \mathcal{P}_X et \mathcal{P}_X^f , et leurs sections s'appellent "opérateurs pseudo-différentiels".

Si Y est une sous-variété de X le faisceau $\mathcal{E}_{Y \rightarrow X}$ est un $(\mathcal{E}_Y, \mathcal{E}_X)$ -bimodule, et $\mathcal{E}_{X \leftarrow Y}$ un $(\mathcal{E}_X, \mathcal{E}_Y)$ -bimodule. En coordonnées, si Y est défini par les équations $x_1 = \dots = x_\ell = 0$, on a des isomorphismes :

$$\mathcal{E}_{Y \rightarrow X} \simeq \mathcal{E}_X / x_1 \mathcal{E}_X + \dots + x_\ell \mathcal{E}_X$$

$$\mathcal{E}_{X \leftarrow Y} \simeq \mathcal{E}_X / \mathcal{E}_X x_1 + \dots + \mathcal{E}_X x_\ell$$

Ce sont des faisceaux portés par $T_X^*X \times Y$. Rappelons maintenant que si

\mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module cohérent défini sur un ouvert \mathcal{U} de T^*X , sa variété caractéristique, notée $SS(\mathcal{M})$, désigne simplement son support dans \mathcal{U} . On dit alors qu'une sous-variété Y de X est non caractéristique pour \mathcal{M} si la projection

$$\rho : T_X^*X \times Y \rightarrow T^*Y$$

est propre (et donc finie) sur $SS(\mathcal{M})$. Dans ce cas le module \mathcal{M}_Y induit par \mathcal{M} sur Y , et défini par

$$\mathcal{M}_Y = \rho_*(\mathcal{E}_{Y \rightarrow X} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{M})$$

est un \mathcal{E}_Y -module cohérent. On pose :

$$\mathcal{M}^{\mathbf{R}} = \mathcal{E}_X^{\mathbf{R}} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{M}, \quad \mathcal{M}^{\infty} = \mathcal{E}_X^{\infty} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{M}.$$

Rappelons que $\mathcal{E}_X^{\mathbf{R}}$ et \mathcal{E}_X^{∞} sont fidèlement plats sur \mathcal{E}_X et que si Y est non caractéristique :

$$(\mathcal{M}^{\mathbf{R}})|_Y = (\mathcal{M}_Y)^{\mathbf{R}}, \quad (\mathcal{M}^{\infty})|_Y = (\mathcal{M}_Y)^{\infty}$$

Les faisceaux $C_{Z|X}^{\mathbf{R}}$ sont des faisceaux de $\mathcal{E}_X^{\mathbf{R}}$ -modules de support T_Z^*X et sont invariants par transformation canonique. Plus précisément soit X et \tilde{X} deux variétés analytiques complexes de même dimension, Z et \tilde{Z} deux sous-variétés de X et \tilde{X} (de codimensions éventuellement distinctes), ϕ une transformation canonique complexe homogène définie au voisinage de $x^* \in T_Z^*X$, telle que $\phi(T_Z^*X) = T_{\tilde{Z}}^*\tilde{X}$. Alors une fois quantifiée, ϕ définit (au voisinage de x^* et de $\phi(x^*)$) un isomorphisme de $\mathcal{E}_X^{\mathbf{R}}$ sur $\mathcal{E}_{\tilde{X}}^{\mathbf{R}}$ et de $C_{Z|X}^{\mathbf{R}}$ sur $C_{\tilde{Z}|\tilde{X}}^{\mathbf{R}}$, ce deuxième isomorphisme étant compatible avec le premier.

§ 2. DIRECTIONS MICROCARACTERISTIQUES

Nous allons généraliser une définition introduite dans un cas particulier par J. M. Bony [1] (cf. aussi [14] pour une autre utilisation de cette notion).

Soit W une variété analytique complexe, V une sous-variété lisse de W , S un ensemble analytique de W (V et S sont évidemment complexes). Le "cône tangent à S le long de V ", noté $C_V(S)$, est un sous-ensemble fermé conique de $T_V(W)$ le fibré normal à V dans W . On peut le définir en coordonnées locales de la manière suivante.

Supposons $W = \mathbb{C}^N$, $V = \{x \in W ; x_1 = \dots = x_\ell = 0\}$. Soit $x \in V$, $\theta \in T_x(W)$. Alors θ n'appartient pas à $C_V(S)$ s'il existe un cône ouvert de sommet l'origine, invariant par V , contenant θ et ne rencontrant pas S au voisinage de x .

Si f est une fonction holomorphe au voisinage de V , on peut définir $\sigma_V(f)$, son symbole le long de V , comme une section de $T_V(W)$. Dans la situation précédente, si f s'annule exactement à l'ordre r sur V (i.e. : r est le plus petit entier tel que toutes les dérivées de f d'ordre $< r$ sont nulles sur V), f s'écrit

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha(x) x'^\alpha \quad \text{où } x' = (x_1, \dots, x_\ell)$$

et on pose, pour $(x, \theta) \in T_V(W)$:

$$\sigma_V(f)(x, \theta) = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha(x) \theta^\alpha .$$

Lemme 2.1 [cf.16] : Soit \mathcal{J} le faisceau d'idéaux des fonctions holomorphes nulles sur S . Alors :

$$C_V(S) = \{(x, \theta) \in T_V(W) ; \sigma_V(f)(x, \theta) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{J}\}.$$

Revenons maintenant à la situation et aux notations du paragraphe 1. On identifie $T(T^*X)$ et $T_\Delta(T^*X \times T^*X)$, où Δ désigne la diagonale de $T^*X \times T^*X$.

Définition 2.2 : Soit \mathcal{M} et \mathcal{N} deux \mathcal{E}_X -modules cohérents sur un ouvert \mathcal{U} de T^*X et θ un vecteur de $T(\mathcal{U})$. On dit que θ est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ si :

$$\theta \notin C_\Delta(SS(\mathcal{M}) \times SS(\mathcal{N})).$$

Si le support de \mathcal{N} est une variété lisse V il revient au même de dire que θ n'appartient pas à $C_V(SS(\mathcal{M}))$ (dans $T_V(\mathcal{U})$). Dans ce cas on dit que θ est non microcaractéristique pour \mathcal{M} sur V , ou si \mathcal{M} est de la forme $\mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X.P$ que θ est non microcaractéristique pour P sur V . Si r est l'ordre d'annulation de P_m , le symbole principal de P , sur V , et si $\theta \in T_{x^*}(T^*X)$, il résulte du lemme 2.1 que θ est microcaractéristique pour P sur V si et seulement si

$$P_m(x^* + \varepsilon\theta) = o(\varepsilon^r)$$

On retrouve donc la définition de J. M. Bony [1].

Si Y est une sous-variété de X on dit que Y est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ s'il en est ainsi de tout vecteur non nul $\theta = H_f$, où H_f désigne le champ hamiltonien de f , et où f est nulle sur Y .

Si Y est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ en $x^* \in T^*X$ et si \mathcal{M} et \mathcal{N} sont non nuls en x^* , Y est non caractéristique pour \mathcal{M} et pour \mathcal{N} .

Si $\mathcal{N} = \mathcal{O}_X$, $SS(\mathcal{N}) = T^*X$ et on vérifie immédiatement que Y est non microcaractéristique pour le couple $(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ en $x \in T^*_X X \times Y$ si et seulement si Y est non caractéristique pour le \mathcal{D}_X -module \mathcal{M} au voisinage de x .

§ 3. ENONCE DES THEOREMES

Si Y est une sous-variété de X on note ρ et $\tilde{\omega}$ les applications naturelles :

$$\rho : T^*_X X \times Y \rightarrow T^*Y$$

$$\tilde{\omega} : T^*_X X \times Y \rightarrow T^*X$$

On suppose Y de codimension d dans X . On utilisera, comme dans [13], le langage des catégories dérivées.

Théorème 3.1 : Soit \mathcal{M} et \mathcal{N} deux \mathcal{E}_X -modules cohérents définis sur un ouvert \mathcal{U} de T^*X . On suppose la sous-variété Y de X non microcaractéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Alors le morphisme naturel de faisceaux sur $T^*_X X \times Y$:

$$\tilde{\omega}^{-1} \mathbf{R}\mathcal{K}\text{om}_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^{\mathbf{R}}) \rightarrow \mathbf{R}\mathcal{K}\text{om}_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_{X \leftarrow Y}) \otimes_{\rho^{-1}\mathcal{E}_Y}^{\mathbf{L}} (\mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbf{R}} \otimes \mathcal{N}) [d]$$

est un isomorphisme.

Le théorème est encore vrai si on remplace $\mathcal{N}^{\mathbf{R}}$ et $\mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbf{R}}$ par \mathcal{N}^{∞} et $\mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\infty}$. Si on replace sur $T^*_X X$, on obtient :

Théorème 3.2 : Soit \mathcal{M} et \mathcal{N} deux \mathcal{D}_X -modules cohérents. On suppose Y non microcatactéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ au voisinage de $T^*_X X \times Y$. Alors le morphisme naturel :

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^i(\mathcal{M}, \mathcal{N}^{\infty})|_Y \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{D}_Y}^i(\mathcal{M}_Y, \mathcal{N}_Y^{\infty})$$

est, pour tout i , un isomorphisme.

§ 4. ESQUISSE DE DEMONSTRATION DU THEOREME 3.1

On commence par démontrer le lemme suivant, cas particulier du théorème avec $\mathcal{U} = C_{Z|X}$.

Lemme 4.1 : Soient Y et Z deux sous-variétés de X , transverses. Soit \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module cohérent défini au voisinage d'un point $x^* \in T_Z^*X \times Y$.

On suppose :

- Y est non microcaractéristique pour \mathcal{M} sur T_Z^*X
- $SS(\mathcal{M}) \cap \rho^{-1}(\rho(x^*)) \subset \{x^*\}$.

Alors on a l'isomorphisme :

$$\mathbf{R}\mathcal{K}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, C_{Z|X}^{\mathbf{R}})_{x^*} \simeq \mathbf{R}\mathcal{K}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_Y, C_{Z \cap Y|Y}^{\mathbf{R}})_{\rho(x^*)} .$$

Pour démontrer ce lemme on se ramène d'abord au cas où Y est une hypersurface de X et \mathcal{M} est réduit à une seule équation, $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X / \mathcal{E}_X P$, en utilisant la technique mise au point dans [5].

Une transformation canonique, et l'adjonction d'une variable supplémentaire permet, comme dans [14], de se ramener au cas où Y et Z sont des hypersurfaces de \mathbb{C}^n et où il existe une variété régulière involutive Λ avec $T_Z^*X \subset \Lambda \subset \text{Car}(P)$. On est alors ramené, grâce au théorème 3.3 de [8], à résoudre un problème de Cauchy pour un opérateur intégral différentiel ce que l'on fait à l'aide du théorème 3.1.2 de [2].

Pour traiter le cas général, on remarque que :

$$\mathbf{R}\mathcal{K}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{U}^{\mathbf{R}}) = \mathbf{R}\mathcal{K}om_{\mathcal{E}_{X \times X}}(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}^*, C_{X|X \times X}^{\mathbf{R}})$$

où $\mathcal{N}^* = \mathbf{R}\mathcal{K}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{E}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1}$ désigne le système dual de \mathcal{N} (le produit $\hat{\otimes}$ est défini dans [13 chapitre 2, §3]).

On considère les injections $Y \times Y \subset Y \times X \subset X \times X$. Alors $Y \times X$ est transverse à X dans $X \times X$ et on peut appliquer le lemme 4.1. Pour restreindre ensuite le système à $Y \times Y$ on applique la proposition 3 de [7].

§ 5. APPLICATIONS

a) Si on applique le théorème 3.2 avec $\mathcal{N} = \mathcal{O}_X$ on retrouve un théorème de M. Kashiwara [5] qui généralise aux systèmes le théorème de Cauchy-Kowalewski.

Proposition 5.1 : Soit \mathcal{M} un \mathcal{D} -module cohérent, Y une sous-variété de X non caractéristique pour \mathcal{M} . Alors les morphismes :

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_Y \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{D}_Y}^j(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)$$

sont, pour tout j, des isomorphismes.

b) Le théorème 3.1 permet d'étendre aux systèmes les résultats de [3], [15], [4], et ceci sous une hypothèse plus faible que l'hypothèse de multiplicité constante faite par ces auteurs (cf. aussi [11]).

Soit Z une hypersurface lisse de X. Nous noterons $\mathcal{O}_{Z|X}^1$ le module :

$$\mathcal{O}_{Z|X}^1 = \mathcal{D}_X \text{Log } \varphi$$

où φ désigne une équation (locale) de Z. Cette définition est licite car on vérifie immédiatement que $\mathcal{D}_X \text{Log } \varphi$ ne dépend ni de la fonction φ choisie, ni de la détermination du logarithme.

Si $(Z_i)_{i=1}^r$ sont des hypersurfaces de X nous noterons $\sum_{i=1}^r \mathcal{O}_{Z_i|X}^1$ le

faisceau sur X défini par la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^{r-1} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{Z_i|X}^1 \rightarrow \sum_{i=1}^r \mathcal{O}_{Z_i|X}^1 \rightarrow 0$$

où la deuxième flèche désigne l'application :

$$(f_i)_{i=1}^{r-1} \rightarrow (f_1, f_2 - f_1, \dots, -f_{r-1}).$$

On définit de même $\mathcal{O}_{Z|Y}^1$ pour une hypersurface Z de Y.

Proposition 5.2 : Soit Y une sous-variété de X , Z une hypersurface de Y , Z_i ($i = 1 \dots r$) des hypersurfaces de X transverses deux à deux et transverses à Y , avec $Z_i \cap Y = Z \ \forall i$.

Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent tel que :

$$a) \quad SS(\mathcal{M}) \cap \rho^{-1}(T_Z^*X) \subset \bigcup_{i=1}^r T_{Z_i}^*X$$

b) Y est non microcaractéristique pour \mathcal{M} sur chaque $T_{Z_i}^*X$ en dehors de

T_X^*X .

Alors pour tout j le morphisme

$$\text{ext}_{\mathcal{D}_X}^j(\mathcal{M}, \sum_i \mathcal{O}_{Z_i}^1 | X) | Z \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}_Y}^j(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Z^1 | Y) | Z$$

est un isomorphisme.

Remarque : On peut aussi traiter le cas où les données sont des sommes de fonctions holomorphes ramifiées quelconques, comme c'est le cas dans [4,15], en adaptant la démonstration de [10].

c) Le théorème précédent s'applique en particulier quand \mathcal{M} est un système défini par une matrice carrée $P = (P_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$. D'après un théorème de M. Sato et M. Kashiwara [12] il existe un symbole différentiel homogène $\det(P)$, tel que :

$$SS(\mathcal{M}) = \{(x, \xi) \in T^*X ; \det(P)(x, \xi) = 0\} .$$

Les conditions de la proposition 5.2 sont alors très faciles à vérifier. Supposons que X soit un ouvert de \mathbb{C}^n , muni des coordonnées (x_1, \dots, x_n) et que Y soit l'hypersurface d'équation $x_1 = 0$. Soit m l'ordre de $\det(P)$. On suppose donc :

$$- \forall i, \exists m_i \geq 0, D_x^\alpha D_\xi^\beta (\det P)(x, \xi) = 0 \text{ pour } |\alpha| + |\beta| < m_i,$$

$$(x, \xi) \in T_{Z_i}^*X .$$

$$- D_{\xi_1}^{m_i} (\det P)(x, \xi) \neq 0 \text{ pour } (x, \xi) \in T_{Z_i}^*X \times Y - T_X^*X .$$

$$- \sum_i m_i = m .$$

Il se peut que le système induit \mathcal{M}_Y soit difficile à calculer. Les propositions 5.1 et 5.2 permettent cependant d'énoncer :

Proposition 5.3 : Sous les hypothèses précédentes, si f est un N -uple de fonctions holomorphes au voisinage de $(Y-Z)$ dans X et si Pf se prolonge en un élément de $(\sum_i \mathcal{O}_{Z_i}^1|_X)^N$, il en sera de même de f au voisinage de Z .

d) Soit X un ouvert de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ muni des coordonnées $(x_1, \dots, x_p, t_1, \dots, t_q) = (x, t)$. Soit S une hypersurface de X , éventuellement singulière, définie par une équation $\varphi(t) = 0$, où φ est indépendante de x . Soit Y l'hypersurface d'équation $x_1 = 0$, P un opérateur différentiel d'ordre m tel que Y soit non caractéristique. On suppose que la partie principale de P s'écrit comme un polynôme en $D_{x_1}, \dots, D_{x_p}, \varphi(t)D_{t_1}, \dots, \varphi(t)D_{t_q}$.

Proposition 5.4 : Sous les hypothèses précédentes le problème de Cauchy $Pf = g, \gamma(f) = (h)$, (où $\gamma(f) = f|_Y, \dots, \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1} f|_Y$) admet une solution unique f holomorphe dans $X-S$ au voisinage de Y , pour toute donnée g holomorphe dans $X-S$ au voisinage de Y et (h) , m -uple de fonctions holomorphes dans $Y - Y \cap S$.

Démonstration : Notons (x, t, ξ, θ) les coordonnées dans T^*X . Soit Λ la variété de $T^*X : \Lambda = T_X^*X \cup (\xi = 0, \varphi(t) = 0)$. Alors $P_m(x, t, \xi, \theta)$ s'annule à l'ordre m sur Λ et $D_{\xi_1}^m P_m$ est différent de 0 sur $\Lambda \cap Y$. On en conclut, par un calcul facile, que Y est non microcaractéristique pour tout couple $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ de support contenu dans $(\text{Car}(P), \Lambda)$. Soit \mathcal{N} le \mathcal{D}_X -module des fonctions méromorphes à pôles sur S . C'est un \mathcal{D}_X -module cohérent et son support est contenu dans Λ (cf. [6]). Le module \mathcal{N}^∞ associé est égal au faisceau sur X des fonctions holomorphes sur $X - S$ [9]. Alors Y est non microcaractéristique pour le couple $(\mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X \cdot P, \mathcal{N})$ et il reste à appliquer le théorème 3.2, en remarquant que \mathcal{N}_Y^∞ est égal au faisceau sur Y des fonctions holomorphes sur $Y - Y \cap S$.

BIBLIOGRAPHIE
=====

- [1] J. M. Bony : Extension du théorème de Holmgren. Sem. Goulaouic-Schwartz 1975-76, exposé 17.
- [2] J. M. Bony, P. Schapira : Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 26, 1, 81-140 (1976).
- [3] Y. Hamada : The singularities of the solutions of the Cauchy problem. Publ. R. I. M. S., Kyoto University, 5, 20-40 (1969).
- [4] Y. Hamada, J. Leray, C. Wagschal : Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : Problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle. J. Math. Pures et Appl. 55, 297-352 (1976).
- [5] M. Kashiwara : Algebraic study of systems of partial differential equations (Thèse), Univ. of Tokyo, 1971 (en japonais).
- [6] M. Kashiwara : B-functions and holonomic systems. Inventiones Math. 38, 33-53 (1976).
- [7] M. Kashiwara, T. Kawai : On the boundary value problem for elliptic system of linear differential equations, II. Proc. Japan Acad. 49, 164-168 (1973).
- [8] M. Kashiwara, T. Kawai : Microhyperbolic pseudo-differential operators I, J. Math. Soc. Japan, 27, n° 3, 359-404 (1975).
- [9] Z. Mebkhout : Local cohomology of analytic spaces. Publ. R. I. M. S. 1976. A paraître.
- [10] P. Pallu de la Barrière, P. Schapira : Application de la théorie des microfonctions holomorphes au problème de Cauchy à données singulières. Sem. Goulaouic-Schwartz 1975-76, exposé 23.
- [11] J. Persson : On the Cauchy problem in \mathbb{C}^n with singular data. Sem. Math. Univ. Catania "Le Matematiche", vol. XXX.2. 339-362 (1975).
- [12] M. Sato, M. Kashiwara : The determinant of matrices of pseudo-differential operators. Proc. Japan Acad. 51, 17-19 (1975).
- [13] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kawai : Hyperfunctions and pseudo differential equations. Lecture Notes in Math. 287, Springer, 265-529 (1973).
- [14] P. Schapira : Propagation au bord et réflexion des singularités analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles II. Sem. Goulaouic-Schwartz 1976-77, Exposé 9 et article à paraître.

- [15] C. Wagschal : Sur le problème de Cauchy ramifié, J. Math. Pures et Appl. 53, 147-164 (1974).
- [16] H. Whitney : Tangents to an analytic variety, Ann. of Math. 81, 496-549, (1964).
-