Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

M. Kashiwara

P. Schapira

Problème de Cauchy pour les systèmes d'équations différentielles et microdifférentielles dans le domaine complexe

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 20, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A19_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 6 - 1 9 7 7

PROBLEME DE CAUCHY POUR LES SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET MICRODIFFERENTIELLES DANS LE DOMAINE COMPLEXE

par M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA

Exposé n^{o} XX

19 Avril 1977

INTRODUCTION

Soitent $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modules cohérents sur l'anneau $\mathcal{D}_X$ des opérateurs différentiels (d'ordre fini) sur une variété analytique complexe de X, Y une sous-variété analytique complexe de X, $\mathcal{M}_Y$ et $\mathcal{N}_Y$ les systèmes induits par $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sur Y. Notons $\mathcal{N}^\infty$ le module engendré par $\mathcal{N}$ sur l'anneau $\mathcal{D}_X^\infty$ des opérateurs différentiels d'ordre infini. Nous démontrons sous une hypothèse de nature géométrique reliant Y et les variétés caractéristiques de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ (dans T^*X le fibré cotangent à X), que les morphismes naturels :

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^\infty)|Y \to \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{N}_Y^\infty)$$

sont, pour tout i, des isomorphismes. En fait nous démontrons un théorème plus général, analogue au précédent, mais concernant des modules cohérents sur l'anneau $\mathcal{E}_X$ des opérateurs microdifférentiels sur T^*X. Pour cela nous utilisons les outils et les techniques de M. Kashiwara [5], et M. Sato, M. Kashiwara, T. Kawai [13], ainsi qu'un théorème de Cauchy-Kowalewski pseudo-différentiel de J. M. Bony et P. Schapira [2]. Comme applications, nous retrouvons l'extension aux systèmes du théorème de Cauchy-Kowalewski, dans la formulation due à M. Kashiwara [5] ainsi que le théorème de Y. Hamada [3], C. Wagschal [15], Y. Hamada, J. Leray, W. Wagschal [4]; mais outre que nous obtenons celui-ci pour des systèmes quelconques (non nécessairement "déterminés"), notre hypothèse sur la variété caractéristique du système est beaucoup plus faible que chez ces auteurs ("non micro-caractéristique" à la place de "multiplicités constantes"). De plus un théorème de M. Sato et M. Kashiwara [12] nous permet de traiter, même dans le cas de systèmes déterminés de multiplicités constantes, des situations qui échappent à [4]. Enfin notre théorème (et les résultats de [6] et [9]) nous permet de traiter le cas où les données de Cauchy sont des fonctions holomorphes dans le complémentaire d'hyper-surfaces avec singularités. Nous ne traitons ici qu'une classe d'exemples de ce type.

§ 1. PRELIMINAIRES ET RAPPELS (cf.[13]).

Nous désignons par X une variété analytique complexe, munie du faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes. Nous notons $\mathcal{D}_X$ le faisceau (d'anneaux) des opérateurs différentiels d'ordre fini, et $\mathcal{D}^\infty$ celui des opérateurs d'ordre infini.

Si Z est une sous-variété de X de codimension d, le faisceau $C^{\mathbb{R}}_{Z|X}$ sur $T^*_Z X$, le fibré conormal à Z dans X, est défini grâce à la transformation comonoïdale par :

$$C^{\mathbb{R}}_{Z|X} = \mathcal{H}^d_{T^*_Z X}(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)^a$$

où a désigne l'application antipodale et π la projection

$$(X - Z) \sqcup T^*_Z X \to X \quad .$$

Le premier espace étant muni de la topologie de co-éclaté. Le faisceau $C^{\mathbb{R}}_{Z|X}$ est localement constant sur les orbites de l'action de $\mathbb{R}_+$.

Si on identifie X à la diagonale de $X \times X$ par la première projection, et T^*X au fibré conormal à la diagonale de $X \times X$, on peut définir le faisceau $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$ sur T^*X par :

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X = \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X|X\times X} \otimes_{\mathcal{O}_{X\times X}} \Omega^{(o,n)}$$

où $\Omega^{(o,n)}$ désigne le faisceau des formes différentielles holomorphes de type (o,n), n étant la dimension de X. Si on note γ la projection de $T^*X - T^*_X X$ sur P^*X, on peut définir un faisceau $\mathcal{E}^\infty_X$ par :

$$\mathcal{E}^\infty_X | T^*X - T^*_X X = \gamma^{-1}\gamma_* \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$$

$$\mathcal{E}^\infty_X | T^*_X X = \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X \mid T^*_X X \quad .$$

Le faisceau $\mathcal{E}^\infty_X$ n'est autre que le faisceau des opérateurs microdifférentiels (d'ordre infini). On note $\mathcal{E}_X$ le sous-faisceau de $\mathcal{E}^\infty_X$ les opérateurs d'ordre fini. En identifiant X à la section nulle $T^*_X X$ on a :

$$\mathcal{E}^\infty_X | T^*_X X = \mathcal{D}^\infty_X \ , \ \mathcal{E}_X | T^*_X X = \mathcal{D}_X \quad .$$

Remarque : Dans [13] le faisceau $\mathcal{C}^{\mathbf{R}}_{Z|X}$ est seulement construit sur $S^*_Z X$, le fibré conormal en sphères, mais le lecteur adaptera lui-même la construction à $T^*_Z X$. Quant aux faisceaux $\mathcal{E}^{\infty}_X$ et $\mathcal{E}_X$ ils sont seulement construit sur le fibré projectif P^*X dans [13] sont notés P_X et P^f_X, et leurs sections s'appellent "opérateurs pseudo-différentiels".

Si Y est une sous-variété de X le faisceau $\mathcal{E}_{Y\to X}$ est un $(\mathcal{E}_Y,\mathcal{E}_X)$-bimodule, et $\mathcal{E}_{X\leftarrow Y}$ un $(\mathcal{E}_X,\mathcal{E}_Y)$-bimodule. En coordonnées, si Y est défini par les équations $x_1 = \dots = x_\ell = 0$, on a des isomorphismes :

$$\mathcal{E}_{Y\to X} \simeq \mathcal{E}_X / x_1\mathcal{E}_X + \dots + x_\ell\mathcal{E}_X$$

$$\mathcal{E}_{X\leftarrow Y} \simeq \mathcal{E}_X / \mathcal{E}_X x_1 + \dots + \mathcal{E}_X x_\ell \quad .$$

Ce sont des faisceaux portés par $T^*X \underset{X}{\times} Y$. Rappelons maintenant que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}_X$-module cohérent défini sur un ouvert $\mathcal{U}$ de T^*X, sa variété caractéristique, notée $SS(\mathcal{M})$, désigne simplement son support dans $\mathcal{U}$. On dit alors qu'une sous-variété Y de X est non caractéristique pour $\mathcal{M}$ si la projection

$$\rho : T^*X \underset{X}{\times} Y \to T^*Y$$

est propre (et donc finie) sur $SS(\mathcal{M})$. Dans ce cas le module $\mathcal{M}_Y$ induit par $\mathcal{M}$ sur Y, et défini par

$$\mathcal{M}_Y = \rho_*(\mathcal{E}_{Y\to X} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{M})$$

est un $\mathcal{E}_Y$-module cohérent. On pose :

$$\mathcal{M}^{\mathbf{R}} = \mathcal{E}^{\mathbf{R}}_X \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{M}, \quad \mathcal{M}^{\infty} = \mathcal{E}^{\infty}_X \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{M} \cdot$$

Rappelons que $\mathcal{E}^{\mathbf{R}}_X$ et $\mathcal{E}^{\infty}_X$ sont fidèlement plats sur $\mathcal{E}_X$ et que si Y est non caractéristique :

$$(\mathcal{M}^{\mathbf{R}})|_Y = (\mathcal{M}_Y)^{\mathbf{R}}, \; (\mathcal{M}^{\infty})|_Y = (\mathcal{M}_Y)^{\infty}$$

Les faisceaux $C^{\mathbb{R}}_{Z|X}$ sont des faisceaux de $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$-modules de support $T^*_Z X$ et sont invariants par transformation canonique. Plus précisément soit X et $\widetilde{X}$ deux variétés analytiques complexes de même dimension, Z et $\widetilde{Z}$ deux sous-variétés de X et $\widetilde{X}$ (de codimensions éventuellement distinctes), ϕ une transformation canonique complexe homogène définie au voisinage de $x^* \in T^*_Z X$, telle que $\phi(T^*_Z X) = T^*_{\widetilde{Z}}\widetilde{X}$. Alors une fois quantifiée, ϕ définit (au voisinage de x^* et de $\varphi(x^*)$) un isomorphisme de $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$ sur $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{\widetilde{X}}$ et de $C^{\mathbb{R}}_{Z|X}$ sur $C^{\mathbb{R}}_{\widetilde{Z}|\widetilde{X}}$, ce deuxième isomorphisme étant compatible avec le premier.

§ 2. DIRECTIONS MICROCARACTERISTIQUES

Nous allons généraliser une définition introduite dans un cas particulier par J. M. Bony [1] (cf. aussi [14] pour une autre utilisation de cette notion).

Soit W une variété analytique complexe, V une sous-variété lisse de W, S un ensemble analytique de W (V et S sont évidemment complexes). Le "cône tangent à S le long de V", noté $C_V(S)$, est un sous-ensemble fermé conique de $T_V(W)$ le fibré normal à V dans W. On peut le définir en coordonnées locales de la manière suivante.

Supposons $W = \mathbb{C}^N$, $V = \{x \in W \ ; \ x_1 = \dots = x_\ell = 0\}$. Soit $x \in V$, $\theta \in T_x(W)$. Alors θ n'appartient pas à $C_V(S)$ s'il existe un cône ouvert de sommet l'origine, invariant par V, contenant θ et ne rencontrant pas S au voisinage de x.

Si f est une fonction holomorphe au voisinage de V, on peut définir $\sigma_V(f)$, son symbole le long de V, comme une section de $T_V(W)$. Dans la situation précédente, si f s'annule exactement à l'ordre r sur V (i.e. : r est le plus petit entier tel que toutes les dérivées de f d'ordre $< r$ sont nulles sur V), f s'écrit

$$f(x) = \sum_{|\alpha| = r} a_\alpha(x) x'^\alpha \quad \text{où} \quad x' = (x_1, \dots, x_\ell)$$

et on pose, pour $(x,\theta) \in T_V(W)$:

$$\sigma_V(f)(x,\theta) = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha(x)\, \theta^\alpha \quad .$$

<u>Lemme 2.1</u> [cf.16] : Soit $\mathcal{J}$ le faisceau d'idéaux des fonctions holomorphes nulles sur S. Alors :

$$C_V(S) = \{(x,\theta) \in T_V(W) \; ; \sigma_V(f)(x,\theta) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{J}\}.$$

Revenons maintenant à la situation et aux notations du paragraphe 1. On identifie $T(T^*X)$ et $T_\Delta(T^*X \times T^*X)$, où Δ désigne la diagonale de $T^*X \times T^*X$.

<u>Définition 2.2</u> : Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}_X$-modules cohérents sur un ouvert $\mathcal{U}$ de T^*X et θ un vecteur de $T(\mathcal{U})$. On dit que θ est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ si :

$$\theta \notin C_\Delta(SS(\mathcal{M}) \times SS(\mathcal{N})) \cdot$$

Si le support de $\mathcal{N}$ est une variété lisse V il revient au même de dire que θ n'appartient pas à $C_V(SS(\mathcal{M}))$ (dans $T_V(\mathcal{U})$). Dans ce cas on dit que θ est non microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ sur V, ou si $\mathcal{M}$ est de la forme $\mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X.P$ que θ est non microcaractéristique pour P sur V. Si r est l'ordre d'annulation de P_m, le symbole principal de P, sur V, et si $\theta \in T_{x^*}(T^*X)$, il résulte du lemme 2.1 que θ est microcaractéristique pour P sur V si et seulement si

$$P_m(x^* + \varepsilon\theta) = o(\varepsilon^r)$$

On retrouve donc la définition de J. M. Bony [1].

Si Y est une sous-variété de X on dit que Y est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ s'il en est ainsi de tout vecteur non nul $\theta = H_f$, où H_f désigne le champ hamiltonien de f, et où f est nulle sur Y.

Si Y est non microcaractéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ en $x^* \in T^*X$ et si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont non nuls en x^*, Y est non caractéristique pour $\mathcal{M}$ et pour $\mathcal{N}$.

Si $\mathcal{N} = \mathcal{O}_X$, $SS(\mathcal{N}) = T^*_X X$ et on vérifie immédiatement que Y est non microcaractéristique pour le couple $(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ en $x \in T^*_X X \underset{X}{\times} Y$ si et seulement si Y est non caractéristique pour le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ au voisinage de x.

§ 3. ENONCE DES THEOREMES

Si Y est une sous-variété de X on note ρ et $\tilde{\varpi}$ les applications naturelles :

$$\rho : T^*X \times_X Y \to T^*Y$$

$$\tilde{\varpi} : T^*X \times_X Y \to T^*X$$

On suppose Y de codimension d dans X. On utilisera, comme dans [13], le langage des catégories dérivées.

<u>Théorème 3.1</u> : Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}_X$-modules cohérents définis sur un ouvert $\mathcal{U}$ de T^*X. On suppose la sous-variété Y de X non microcaractéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Alors le morphisme naturel de faisceaux sur $T^*X \times_X Y$:

$$\tilde{\varpi}^{-1}\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^{\mathbf{R}}) \to \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_{X \leftarrow Y}) \overset{L}{\underset{\rho^{-1}\mathcal{E}_Y}{\otimes}} (\mathcal{E}^{\mathbf{R}}_{Y \to X} \otimes \mathcal{N})[d]$$

est un isomorphisme.

Le théorème est encore vrai si on remplace $\mathcal{N}^{\mathbf{R}}$ et $\mathcal{E}^{\mathbf{R}}_{Y \to X}$ par $\mathcal{N}^{\infty}$ et $\mathcal{E}^{\infty}_{Y \to X}$. Si on replace sur $T^*_X X$, on obtient :

<u>Théorème 3.2</u> : Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{D}_X$-modules cohérents. On suppose Y non microcatactéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ au voisinage de $T^*X \times_X Y$. Alors le morphisme naturel :

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^{\infty})|Y \to \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{N}^{\infty}_Y)$$

est, pour tout i, un isomorphisme.

§ 4. ESQUISSE DE DEMONSTRATION DU THEOREME 3.1

On commence par démontrer le lemme suivant, cas particulier du théorème avec $\mathcal{N} = C_{Z|X}$.

Lemme 4.1 : Soient Y et Z deux sous-variétés de X, transverses. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent défini au voisinage d'un point $x^* \in T^*_Z X \underset{X}{\times} Y$.

On suppose :

- Y est non microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ sur $T^*_Z X$
- $SS(\mathcal{M}) \cap \rho^{-1}(\rho(x^*)) \subset \{x^*\}$.

Alors on a l'isomorphisme :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, C^{\mathbb{R}}_{Z|X})_{x^*} \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_Y, C^{\mathbb{R}}_{Z\cap Y|Y})_{\rho(x^*)} .$$

Pour démontrer ce lemme on se ramène d'abord au cas où Y est une hypersurface de X et $\mathcal{M}$ est réduit à une seule équation, $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P$, en utilisant la technique mise au point dans [5].

Une transformation canonique, et l'adjonction d'une variable supplémentaire permet, comme dans [14], de se ramener au cas où Y et Z sont des hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$ et où il existe une variété régulière involutive Λ avec $T^*_Z X \subset \Lambda \subset \mathrm{Car}(P)$. On est alors ramené, grâce au théorème 3.3 de [8], à résoudre un problème de Cauchy pour un opérateur intégro-différentiel ce que l'on fait à l'aide du théorème 3.1.2 de [2].

Pour traiter le cas général, on remarque que :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{X\times X}}(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}^*, C^{\mathbb{R}}_{X|X\times X})$$

où $\mathcal{N}^* = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{E}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1}$ désigne le système dual de $\mathcal{N}$ (le produit $\hat{\otimes}$ est défini dans [13 chapitre 2, §3]).

On considère les injections $Y\times Y \subset Y\times X \subset X\times X$. Alors $Y\times X$ est transverse à X dans $X\times X$ et on peut appliquer le lemme 4.1. Pour restreindre ensuite le système à $Y\times Y$ on applique la proposition 3 de [7].

§ 5. APPLICATIONS

a) Si on applique le théorème 3.2 avec $\mathcal{N} = \mathcal{O}_X$ on retrouve un théorème de M. Kashiwara [5] qui généralise aux systèmes le théorème de Cauchy-Kowalewski.

Proposition 5.1 : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module cohérent, Y une sous-variété de X non caractéristique pour $\mathcal{M}$. Alors les morphismes :

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)|Y \to \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y,\mathcal{O}_Y)$$

sont, pour tout j, des isomorphismes.

b) Le théorème 3.1 permet d'étendre aux systèmes les résultats de [3], [15], [4], et ceci sous une hypothèse plus faible que l'hypothèse de multiplicité constante faite par ces auteurs (cf. aussi [11]).

Soit Z une hypersurface lisse de X. Nous noterons $\mathcal{O}^1_{Z|X}$ le module :

$$\mathcal{O}^1_{Z|X} = \mathcal{D}_X \operatorname{Log} \varphi$$

où φ désigne une équation (locale) de Z. Cette définition est licite car on vérifie immédiatement que $\mathcal{D}_X \operatorname{Log} \varphi$ ne dépend ni de la fonction φ choisie, ni de la détermination du logarithme.

Si $(Z_i)^r_{i=1}$ sont des hypersurfaces de X nous noterons $\sum\limits_{i=1}^{r} \mathcal{O}^1_{Z_i|X}$ le faisceau sur X défini par la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_X^{r-1} \to \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}^1_{Z_i|X} \to \sum_{i=1}^{r} \mathcal{O}^1_{Z_i|X} \to 0$$

où la deuxième flèche désigne l'application :

$$(f_i)^{r-1}_{i=1} \to (f_1, f_2-f_1, \ldots, -f_{r-1}) .$$

On définit de même $\mathcal{O}^1_{Z|Y}$ pour une hypersurface Z de Y.

Proposition 5.2 : Soit Y une sous-variété de X, Z une hypersurface de Y, Z_i $(i = 1 \ldots r)$ des hypersurfaces de X transverses deux à deux et transverses à Y, avec $Z_i \cap Y = Z$ $\forall\, i$.
Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent tel que :

a) $SS(\mathcal{M}) \cap \rho^{-1}(T^*_Z X) \subset \bigcup_{i=1}^{r} T^*_{Z_i} X$

b) Y est non microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ sur chaque $T^*_{Z_i} X$ en dehors de $T^*_X X$.

Alors pour tout j le morphisme

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \sum_i \mathcal{O}^1_{Z_i|X})|_Z \to \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}^1_{Z|Y})|_Z$$

est un isomorphisme.

Remarque : On peut aussi traiter le cas où les données sont des sommes de fonctions holomorphes ramifiées quelquonques, comme c'est le cas dans [4,15], en adaptant la démonstration de [10].

c) Le théorème précédent s'applique en particulier quand $\mathcal{M}$ est un système défini par une matrice carrée $P = (P_{i,j})_{1 \le i,j \le N}$. D'après un théorème de M. Sato et M. Kashiwara [12] il existe un symbole différentiel homogène $\det(P)$, tel que :

$$SS(\mathcal{M}) = \{(x,\xi) \in T^*X \;;\; \det(P)(x,\xi) = 0\} .$$

Les conditions de la proposition 5.2 sont alors très faciles à vérifier. Supposons que X soit un ouvert de $\mathbb{C}^n$, muni des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ et que Y soit l'hypersurface d'équation $x_1 = 0$. Soit m l'ordre de $\det(P)$. On suppose donc :

- $\forall\, i, \exists\, m_i \ge 0$, $D^\alpha_x D^\beta_\xi(\det P)(x,\xi) = 0$ pour $|\alpha| + |\beta| < m_i$, $(x,\xi) \in T^*_{Z_i} X$.
- $D^{m_i}_{\xi_1}(\det P)(x,\xi) \neq 0$ pour $(x,\xi) \in T^*_{Z_i} X \times_X Y - T^*_X X$.
- $\sum_i m_i = m$.

Il se peut que le système induit $\mathcal{M}_Y$ soit difficile à calculer. Les propositions 5.1 et 5.2 permettent cependant d'énoncer :

Proposition 5.3 : Sous les hypothèses précédentes, si f est un N-uple de fonctions holomorphes au voisinage de (Y-Z) dans X et si Pf se prolonge en un élément de $(\sum_i \mathcal{O}^1_{Z_i|X})^N$, il en sera de même de f au voisinage de Z.

d) Soit X un ouvert de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ muni des coordonnées $(x_1,\dots,x_p,t_1,\dots,t_q) = (x,t)$. Soit S une hypersurface de X, éventuellement singulière, définie par une équation $\varphi(t) = 0$, où φ est indépendante de x. Soit Y l'hypersurface d'équation $x_1 = 0$, P un opérateur différentiel d'ordre m tel que Y soit non caractéristique. On suppose que la partie principale de P s'écrit comme un polynôme en $D_{x_1},\dots,D_{x_p}$, $\varphi(t)D_{t_1},\dots,\varphi(t)D_{t_q}$.

Proposition 5.4 : Sous les hypothèses précédentes le problème de Cauchy $Pf = g$, $\gamma(f) = (h)$, (où $\gamma(f) = f|Y,\dots,\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1} f|Y$) admet une solution unique f holomorphe dans X - S au voisinage de Y, pour toute donnée g holomorphe dans X-S au voisinage de Y et (h), m-uple de fonctions holomorphes dans $Y - Y \cap S$.

Démonstration : Notons (x,t,ξ,θ) les coordonnées dans T^*X. Soit Λ la variété de T^*X : $\Lambda = T^*_X X \cup (\xi = 0,\ \varphi(t) = 0)$. Alors $P_m(x,t,\xi,\theta)$ s'annule à l'ordre m sur Λ et $D^m_{\xi_1} P_m$ est différent de 0 sur $\Lambda \cap Y$. On en conclut, par un calcul facile, que Y est non microcaractéristique pour tout couple $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ de support contenu dans $(\mathrm{Car}(P),\Lambda)$. Soit $\mathcal{N}$ le $\mathcal{D}_X$-module des fonctions méromorphes à pôles sur S. C'est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent et son support est contenu dans Λ (cf.[6]). Le module $\mathcal{N}^\infty$ associé est égal au faisceau sur X des fonctions holomorphes sur X - S[9]. Alors Y est non microcaractéristique pour le couple $(\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X.P, \mathcal{N})$ et il reste à appliquer le théorème 3.2, en remarquant que $\mathcal{N}^\infty_Y$ est égal au faisceau sur Y des fonctions holomorphes sur $Y - Y \cap S$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony : Extension du théorème de Holmgren. Sem. Goulaouic-Schwartz 1975-76, exposé 17.

[2] J. M. Bony, P. Schapira : Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 26, 1, 81-140 (1976).

[3] Y. Hamada : The singularities of the solutions of the Cauchy problem. Publ. R. I. M. S., Kyoto University, 5, 20-40 (1969).

[4] Y. Hamada, J. Leray, C. Wagschal : Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : Problème de Cauchy ramifié, hyperbolocité partielle. J. Math. Pures et Appl. 55, 297-352 (1976).

[5] M. Kashiwara : Algebraic study of systems of partial differential equations (Thèse), Univ. of Tokyo, 1971 (en japonais).

[6] M. Kashiwara : B-functions and holonomic systems. Inventiones Math. 38, 33-53 (1976).

[7] M. Kashiwara, T. Kawai : On the boundary value problem for elliptic system of linear differential equations, II. Proc. Japan Acad. 49, 164-168 (1973).

[8] M. Kashiwara, T. Kawai : Microhyperbolic pseudo-differentiel operators I, J. Math. Soc. Japan, 27, n° 3, 359-404 (1975).

[9] Z. Mebkhout : Local cohomology of analytic spaces. Publ. R. I. M. S. 1976. A paraître.

[10] P. Pallu de la Barrière, P. Schapira : Application de la théorie des microfonctions holomorphes au problème de Cauchy à données singulières. Sem. Goulaouic-Schwartz 1975-76, exposé 23.

[11] J. Persson : On the Cauchy problem in $\mathbb{C}^n$ with singular data. Sem. Math. Univ. Catania "Le Mathematiche", vol. XXX.2. 339-362 (1975).

[12] M. Sato, M. Kashiwara : The determinant of matrices of pseudo-differential operators. Proc. Japan Acad. 51, 17-19 (1975).

[13] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kawai : Hyperfunctions and pseudo differential equations. Lecture Notes in Math. 287, Springer, 265-529 (1973).

[14] P. Schapira : Propagation au bord et réflexion des singularités analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles II. Sem. Goulaouic-Schwartz 1976-77, Exposé 9 et article à paraître.

[15] C. Wagschal : Sur le problème de Cauchy ramifié, J. Math. Pures et Appl. 53, 147-164 (1974).

[16] H. Whitney : Tangents to an analytic variety, Ann. of Math. 81, 496-549, (1964).