K. WATANABE

C. ZUILY

Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques à caractéristiques de multiplicité variable

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 15, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A14_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 6 - 1 9 7 7

UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR DES OPERATEURS ELLIPTIQUES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE

par K. WATANABE et C. ZUILY

Exposé n° XV

8 Février 1977

§ 1. INTRODUCTION

Etant donnés un opérateur différentiel P d'ordre m dans un voisinage V de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ et une hypersurface S passant par $x=0$ (donnée dans V par : $S = \{x \in V : f(x) = 0\}$, $df \neq 0$ sur S) non caractéristique pour P, le problème considéré ici consiste à se demander si

$$u \in C^m(V), \quad Pu = 0 \text{ dans } V \text{ et } u \equiv 0 \text{ dans } \{x \in V : f(x) < 0\}$$

impliquent que u est nulle dans tout un voisinage de l'origine. Cette question ayant été l'objet de nombreux articles (voir [1], [2] [3], [4], [6], [7], [9] etc...) rappelons quelques uns des résultats déjà obtenus. Pour cela considérons l'équation en τ : $p_m(x,\xi + \tau N) = 0$ où p_m est le symbole principal de P, pour $(x,\xi,N) \in V \times \Gamma_{\xi_o} \times \Gamma_{N_o}$ où $\xi_o \in \mathbb{R}^n$ est non parallèle à $N_o = \operatorname{grad} f(0)$ et Γ_{ξ_o} (resp Γ_{N_o}) est un voisinage conique de ξ_o (resp. N_o). Lorsque la multiplicité des racines est constante, les racines réelles sont simples les racines complexes au plus doubles et restent complexes, Calderon [1] a donné une réponse positive au problème, la surface S étant quelconque, sans condition sur les termes d'ordres inférieurs. Mizohata [4] et Hörmander [3] ont généralisé son résultat au cas des racines complexes doubles et régulières, P étant elliptique. Lorsque la multiplicité des caractéristiques est plus élevée, Zeman [9] a récemment obtenu des résultats , mais la multiplicité est toujours constante, la surface initiale est strictement convexe et la partie principale n'est pas quelconque.

En 1969, Goorjan [2] généralisant certains résultats de Hörmander [3], Mizohata [4]... a considéré le cas où

$$P = P_1 \ldots P_r + R$$

où $P_1,\ldots,P_r$ sont des opérateurs elliptiques à caractéristiques simples, R est d'ordre $\leq \left[\frac{r+1}{2}\right]$ et $S = \{x = (x_1,x') : x_1 = |x'|^2\}$.

Récemment Sussman [6] a étudié le cas des opérateurs elliptiques homogènes la surface initiale étant strictement convexe.
Enfin les contre exemples de Pliš montrent qu'en général il est nécessaire d'imposer des conditions sur les termes d'ordres inférieurs . (Voir remarque 2.)

§ 2. RESULTATS

Soit $P(x,D)$ un opérateur différentiel elliptique dans un voisinage V de l'origine, p_m son symbole principal, p son symbole total. Considérons les conditions suivantes :

[H.1] Pour tout $\xi_o \in \mathbb{R}^n$ non parallèle à $N_o = \operatorname{grad} f(0)$, il existe m fonctions C^∞, $\lambda_j(x,\xi,N)$, $j = 1,\dots,m$, dans un voisinage conique Γ de $(0, \xi_o, N_o)$ telles que

$$p_m(x,\xi+\tau N) = p_m(x,N)\prod_{j=1}^{m}(\tau-\lambda_j(x,\xi,N)) \quad \text{dans } \Gamma .$$

D'autre part soit r le maximum de la multiplicité de l'équation en τ

$$p_m(0;\xi + \tau N_o) = 0 \qquad \xi \text{ non parallèle à } N_o$$

On pose $q = \left[\frac{r+1}{2}\right]$ et

$$S(p_m,N_o) = \{q(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m-q} b_\alpha(x).\xi^\alpha +$$

$$+ \sum_{|\lambda|\ge 1}\ \sum_{2|\beta| + |\mu| \le |\lambda|} c_{\beta,\lambda,\mu}(x)\,\xi^\beta p^{(\lambda)}_{m(\mu)}(x,\xi) :$$

$$b_\alpha, c_{\beta,\lambda,\mu} \in L^\infty(V)\} .$$

On a noté ici $p^{(\lambda)}_{m(\mu)} = (\frac{\partial}{\partial\xi})^\lambda D^\mu_x\, p_m$.

[H.2] $p - p_m \in S(p_m,N_o)$.

On a alors le :

<u>Théorème 1</u> : Sous les hypothèses [H.1] et [H.2] il existe un voisinage W de l'origine tel que

$$u \in C^m(V) \quad Pu = 0 \quad \text{dans } V \text{ et } u = 0 \text{ dans } \{x \in V : f(x) < 0\}$$

impliquent que u est nulle dans W.

<u>Remarque 2</u>

a) Si $r \leq 2$, [H.2] est toujours satisfaite. En particulier le théorème s'applique à un opérateur elliptique d'ordre 4 à coefficients réels vérifiant [H.1], (voir [4]), la surface initiale étant quelconque.

b) Si [H.2] n'est pas satisfaite, le résultat est faux en général. En effet, Pliś [5] a montré qu'il existe une fonction f(t,x) de classe C^∞ telle que

$$P = \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\partial}{\partial x}\right)^6 + it^6\frac{\partial^5}{\partial x^5} - \frac{\partial^4}{\partial x^4} - f(t,x)$$

ne possède pas la propriété de l'unicité du problème de Cauchy pour $S = \{t = 0\}$.

c) Il en est de même lorsque [H.1] n'est pas satisfaite. Pliś a construit dans [5] un opérateur elliptique homogène d'ordre 4 à coefficients C^∞ et réels, possédant une solution de l'équation homogène à support dans une sphère.

§ 3 PREUVE DU THEOREME 1

Dans la suite, nous serons amenés à convexifier S par un changement de variables. Aussi commençons nous par étudier l'invariance des hypothèses. Seule celle de [H.2] n'est pas évidente.

Soit $\varphi : V_x \to \tilde{V}_y$ un difféomorphisme, $\Psi = \varphi^{-1}$. Soit $\tilde{P}$ le transformé de P, $\tilde{p}(y,\eta)$ (resp. $\tilde{p}_m$) son symbole total (resp. principal). On a alors la :

<u>Proposition 3</u> : Si $p - p_m \in S(p_m, N_o)$ alors $\tilde{p} - \tilde{p}_m \in S(\tilde{p}_m, \tilde{N}_o)$ où $\tilde{N}_o = {}^t\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)(\varphi(0)).N_o$.

Cette proposition découle du

<u>Lemme 4</u> : Il existe des polynômes en η, $f_\beta(y,\eta)$, $(\beta \in \mathbb{Z}^n)$, à coefficients dans $C^\infty(\tilde{V})$ d'ordre $\leq \frac{1}{2}|\beta|$ tels que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\sigma(\widetilde{D_x^\alpha})(y,\eta) = \sum_{\beta\leq\alpha} f_\beta(y,\eta)\sigma^{(\beta)}(D_x^\alpha)\{{}^t(\frac{\partial\varphi}{\partial x})(\Psi(y)).\eta\}$$

où $\sigma^{(\beta)} = (\frac{\partial}{\partial\xi})^\beta\sigma$.

Ce lemme est prouvé par récurrence sur $|\alpha|$ et fournit une expression explicite des f_β.

Par la transformation de Holmgren $x'_i = x_i$ $i = 1,\ldots,n-1$, $t = \langle x,N_o\rangle + A|x'|^2$ on se ramène au cas où $P = P(x',t;D_{x'},D_t)$ avec

(1)
$$p_m(x',t;\xi',\tau) = \prod_{j=1}^{m}(\tau - \lambda_j(x',t;\xi')) \text{ (microlocalement)}$$

la solution étant nulle pour $t \leq |x'|^2$; les hypothèses sont conservées. La méthode de démonstration de l'unicité repose sur des estimations de Carleman. Pour $j \in \mathbb{N}$ posons

$$|||u|||_j^2 = \sum_{p+q\leq j} \int_o^T \|D_t^p D_x^q u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} e^{k(t-T)^2} dt$$

Il est tout d'abord facile de voir qu'une estimation du type

(2)
$$|||u|||_o^2 \leq C_k |||Pu|||_o^2 \qquad u \in C_o^\infty(K)$$

où $\lim_{k\to\infty} C_k e^{-\varepsilon k} = 0$ $\forall\ \varepsilon > 0$, implique l'unicité. En effet soit $\zeta \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\zeta = 1$ pour $t \in]0,\frac{T}{3}[$, $\zeta = 0$ pour $t \in]\frac{2T}{3},\infty[$. Soit $T' < \frac{T}{3}$ et $v \in C^\infty$ telle que $Pv = 0$ et $\operatorname{supp} v \subset \{t > |x'|^2\}$. Comme $\zeta v \in \in C_o^\infty$ on a

$$\int_o^{T'} e^{k(t-T)^2}\|v\|^2_{L^2}dt \leq C_k \int_{T/3}^{T} e^{k(t-T)^2}\|P\zeta v\|^2_{L^2}dt$$

ce qui implique

$$\int_o^{T'}\|v\|^2_{L^2}\,dt \leq \lim_{k\to\infty}\left[C_k e^{k[\frac{4T^2}{9}-(T-T')^2]}\right]\int_{T/3}^{T}\|P\zeta v\|^2_{L^2}\,dt = 0$$

L'idée naturelle pour obtenir une estimation du type (2) est, compte tenu de la forme du symbole principal de P, de travailler avec l'opérateur $\partial_1 \circ \cdots \circ \partial_m$ où $\partial_i = D_t - \lambda_i(x,t;D_x)$, puis d'estimer $P_m - \partial_1 \circ \cdots \circ \partial_m$ et $P - P_m$ en fonction des ∂_i.

Inégalité de Carleman pour l'opérateur $Q = \partial_1 \circ \cdots \circ \partial_m$.

Introduisons quelques notations. $OP(T^r)$, pour $r \in \mathbb{R}$, désignera l'espace des O.P.D. dont le symbole est une fonction C^∞ en t à valeurs dans $S^r(V \times \mathbb{R}^n)$.

Ici $\partial_i = D_t - \lambda_i(x,t;D_x)$ avec $\lambda_i \in OP(T^1)$. On pose ensuite

$$\sigma = \{I = (i_1,\dots,i_k) : i_j \in (0,1,\dots,m),\quad i_j \neq i_\ell \text{ si } j \neq \ell\}$$

On notera $|I| = k$ et $I \subset J$ si $|I| = 0$ ou $\{i_k : 1 \le k \le |I|\} \subset \{j_k : 1 \le k \le |J|\}$.

Enfin $\partial_I = \begin{cases} \text{Identité si } |I| = 0 \\ \partial_{i_1} \circ \cdots \circ \partial_{i_k} \text{ si } I = (i_1,\dots,i_k). \end{cases}$

Théorème 5 : Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout k, $\frac{1}{T}$, kT^2 assez grands,

$$(3)\qquad |||u|||^2_{m-q} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \sum_{\substack{|I|=m-2j \\ I \in \sigma}} |||\partial_I u|||^2_j \le C\left(\frac{1}{k} + T^2\right) |||\partial_1 \circ \cdots \circ \partial_m u|||^2_0$$

pour tout $u \in C_0^\infty(]0,\frac{T}{2}[\times \mathbb{R}^{n-1})$.

Ce théorème est une conséquence de la

Proposition 6 : Il existe $C > 0$ telle que pour k, $\frac{1}{T}$, kT^2 assez grands :

$$(4)\qquad (kT^2)^{m-r-|\alpha|} k^{m-|\alpha|} |||u|||^2_{|\alpha|} + k(1+kT^2)^{-1} \sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_{\substack{I \in \sigma \\ |I|=m-2j}} |||\partial_I u|||^2_j \le$$

$$\le C\, |||\partial_1 \circ \cdots \circ \partial_m u|||^2_0$$

pour tous $|\alpha| \le m$ et tout $u \in C_0^\infty(]0,\frac{T}{2}[\times \mathbb{R}^{n-1})$.

En effet lorsque $|\alpha| \le m - q$, on a $(kT^2)^{m-r-|\alpha|} k^{m-|\alpha|} \ge \dfrac{k}{1 + kT^2}$.

Esquisse de la preuve de la proposition 6

La difficulté ici consiste dans le fait que la multiplicité des caractéristiques est variable. On commence par obtenir une inégalité de Carleman pour chaque ∂_i : c'est classique.

Lemme 7 [1] : Il existe $C>0$ telle que pour k, T^{-1}, kT^2 assez grands

$$(5)\qquad \begin{cases} |||u|||_o^2 \leq \frac{C}{k} |||\partial_i u|||_o^2 \\ |||u|||_1^2 \leq C(1+kT^2)|||\partial_i u|||_o^2 \\ |||u|||_o^2 \leq \frac{C}{k^2T^2} |||D_t u|||_o^2 \qquad \forall\, u \in C_o^\infty(]0,\frac{T}{2}[\times \mathbf{R}^{n-1}) . \end{cases}$$

On déduit des inégalités (5), à l'aide de plusieurs récurrences, l'inégalité :

$$(6)\qquad \sum_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} \sum_{|I|=m-2j} |||\partial_I u|||_j^2 \leq C(\frac{1}{k}+T^2)|||\partial_1\circ\cdots\circ\partial_m u|||_o^2 \quad \forall\, u\in C_o^\infty(]0,\frac{T}{2}[\times \mathbf{R}^{n-1})$$

On écrit ensuite $\partial_1\circ\cdots\circ\partial_m = P_1\circ\cdots\circ P_r + R$, où les P_i sont à caractéristiques distinctes et où $|||Ru|||_o^2$ peut être majoré par le premier membre de (6).

On prouve pour terminer, par récurrence sur r, que

$$(kT^2)^{m-r-|\alpha|}k^{m-|\alpha|}|||u|||_{|\alpha|}^2 \leq C|||P_1 \ldots P_r u|||_o^2 \quad u\in C_o^\infty(]0,\frac{T}{2}[\times R^{n-1}) .$$

On en déduit (4).

Etude de $P_m - \partial_1\circ\cdots\circ\partial_m$:

On a la

Proposition 8 : Il existe des O.P.D. Q_J dans $OP(T^{[\frac{m-|J|}{2}]})$ tels que :

$$(7)\qquad P_m(x,t;D_x,D_t) = \partial_1\circ\cdots\circ\partial_m + \sum_{\substack{J\in\mathcal{E}\\ |J|\leq m-1}} Q_J \circ \partial_J$$

Elle résultera du lemme suivant

<u>Lemme 9</u> : Pour tout $Q \in OP(T^{\ell})$, tout $I \in \mathfrak{G}$ il existe $Q_{I,J,\ell} \in OP(T^{\ell + [\frac{|I|-|J|}{2}]})$ tels que

$$(8) \qquad Q \otimes P_I = Q \circ \partial_I + \sum_{\substack{|J|<|I| \\ J\subset I}} Q_{I,J,\ell} \circ \partial_J$$

On a noté ici P_I l'O.P.D. de symbole $(\tau - \lambda_{i_1}(x,t;\xi))\ldots(\tau-\lambda_{i_k}(x,t;\xi))$, $I = (i_1,\ldots,i_k)$ et $Q \otimes P_I$ l'O.P.D. dont le symbole est $q \times \sigma(P_I)$.

<u>Esquisse de la preuve du lemme 9</u>

On raisonne par récurrence sur $|I|$. Pour $|I| = 1$ c'est vrai car

$$Q \otimes \partial = Q \circ \partial + R \quad \text{avec } R \in OP(T^{\ell})$$

Supposons (8) vrai à l'ordre $|I| - 1$. On a d'autre part

$$(9) \qquad \sigma(Q \circ \partial_I) = \sigma(Q).\sigma(P_I) + \sum_{\substack{|J|<|I| \\ J\subset I}} \sigma(Q_{I,J} \otimes P_J)$$

Admettons (9) un instant, alors grace à la récurrence on obtient

$$(10) \qquad \sigma(Q \circ \partial_I) = \sigma(Q \otimes P_I) + \sum_{\substack{|J|<|I| \\ J\subset I}} \sigma \Big(\sum_{\substack{K\subset J \\ |K|\leq|J|}} Q_{I,J,K} \circ \partial_K\Big)$$

où $Q_{I,J,K} \in OP(T^{\ell + [\frac{|I|-|J|}{2}] + [\frac{|J|-|K|}{2}]})$ ce qui prouve (8) à l'ordre $|I|$.

<u>Preuve de (9)</u>

L'égalité est évidente pour $|I| = 1$. On utilise alors les deux lemmes suivants

<u>Lemme 10</u> : Soit $Q = \sum_{j=0}^{m} Q_j \circ D_t^j$ et $\partial = D_t - \Lambda$, $Q_j \in OP(T^{r_j})$, $\Lambda \in OP(T^1)$.

Alors pour tout $N \geq 1$ il existe $b_{N,j} \in OP(T^{r+1-N})$, $r = \max_j(r_j)$, tel que :

$$(11) \qquad \sigma(Q \circ \partial) = \sum_{j=0}^{m} b_{N,j}\, \tau^j + \sum_{|\alpha| < N} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\alpha!k!}\, \sigma^{(\alpha,k)}(Q)\sigma_{(\alpha,k)}(\partial) \, .$$

<u>Lemme 11</u> : Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $I \in \mathfrak{S}$, $|I| = j$, il existe $a_{j,I,J} \in (T^{j-|J|})$ tels que

(12) $$\tau^j = \sum_{J \subset I} a_{j,I,J}\, \sigma(P_I)$$

Le lemme 10 résulte de la formule usuelle donnant $\sigma(Q \circ \partial)$ et le lemme 11 se démontre aisément par récurrence sur $|I|$.

Revenant à la preuve de (9), en écrivant $\partial_I = \partial_{I_o} \circ \partial$ on a

$$R \circ \partial_{I_o} = \sum_{j=o}^{|I_o|} R_j \circ D_t^{|I_o|-j} \quad , \; R_j \in OP(T^{\ell+j})$$

En utilisant (11) et l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\sigma(R \circ \partial_I) = \sum_{|\alpha|<N} \sum_{k=o}^{|I_o|} C_{k,\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{k} \{\sigma(R) \times \sigma(P_{I_o}) + \sum_{\substack{|J|<|I_o| \\ J \subset I_o}} \gamma_{I_o,J}\, \sigma(P_J)\}\, \sigma_{(\alpha,k)}(\partial) + \sum_{k=o}^{|I_o|} b_{N,k}\, \tau^k$$

On utilise alors pour conclure la formule de Leibniz et le lemme 11. Ce qui termine la démonstration du lemme 9.

<u>Etude de</u> $P - P_m$ <u>en fonction des</u> ∂_i

On a la

<u>Proposition 12</u> : Pour tous $\lambda, \mu, \beta = (\beta', \beta'') \in \mathbb{N}^{n+1}$ avec $1 \le |\lambda|$, $2|\beta| + |\mu| \le |\lambda|$ on a :

(13) $$P_{m(\mu)}^{(\lambda)}(x,t,D_x D_t) \circ D_x^{\beta'} \circ D_t^{\beta''} = \Sigma_1\, Q_{\ell,j,I}\, D_t^j \circ \partial_I + \Sigma_2\, R_{k,J} \circ \partial_J$$

où $Q_{\ell,J,I} \in OP(T^{\ell})$, $R_{K,J} \in OP(T^k)$ et les sommes Σ_i $i = 1,2$ sont finies et prises sur $j \in \mathbb{N}^*$, ℓ, $k \in \mathbb{Z}$, $I, J \in \mathfrak{S}$ tels que

$$2j + 2\max(\ell, 0) + |I| \le m, \quad 2k + |J| \le m, \quad |J| \le m-1$$

Cette proposition résulte du

Lemme 13 : Sous les hypothèses de la proposition 12, il existe $a^{\lambda,\beta}_{\ell,j,I} \in T^{\ell}$, $b^{\lambda,\beta}_{k,J} \in T^{k}$ (où $2|\beta| \leq |\lambda|$) tels que si $\eta = (\xi,\tau)$ on a :

$$(14) \quad p_m^{(\lambda)}(x,t,\eta).\eta^{\beta} = \Sigma_1 \, a^{\lambda,\beta}_{\ell,j,I}(x,t;\xi).\tau^{j}\sigma(P_I)(x,t;\eta) + \\ + \Sigma_2 \, b^{\lambda,\beta}_{k,J}(x,t;\xi)\sigma(P_J)(x,t;\eta)$$

où Σ_i, $i = 1,2$ sont finies et prises sur $j \in \mathbb{N}\setminus 0$, $\ell, k \in \mathbb{Z}$, $I, J \in \mathfrak{S}$

$$2j + 2\mathrm{Max}(\ell,0) + |I| \leq m - |\lambda| + 2|\beta|$$

$$2k + |J| \leq m - |\lambda| + 2|\beta|, \quad |J| \leq m-1$$

La preuve de ce lemme est très technique et se fait par récurrence sur $|\lambda|$. Nous renvoyons à [8] pour les détails.

En utilisant les propositions 8 et 12 et le théorème 5, on peut déjà en déduire une inégalité de Carleman pour P dans le cas où l'hypothèse [H.1] est globale en ξ. Sinon on microlocalise le symbole principal P_m pour pouvoir l'écrire comme en [H.1] on montre comme ci-dessus l'inégalité de Carleman, puis on conclut à l'aide d'une partition de l'unité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. P. Calderon : Amer. J. of Math. Vol. 53 (19 8) p.16-36 .

[2] P. M. Goorjan : Trans. Amer. Math. Soc. 146 (1969) p.493.

[3] L. Hörmander : Math. Scand. 7 (1959) p.177.

[4] S. Mizohata : Proc. Japan Acad. Vol. 34 (1958) p.687.

[5] A. Pliś : Comm. pure and appl. Math. 14 (1961) p.599.

[6] M. Sussman : Bull. Am. Math. Soc. 81 (1975).

[7] K. Watanabé : Tohoku Math. J. 23 (1971) p.473.

[8] K. Watanabé - C. Zuily : C. R. A. S. Paris, t.283 (1976) et article à paraître.

[9] M. Zeman : Preprint.
