

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. DERRIDJ

D. TARTAKOFF

## Régularité analytique globale des solutions du problème de Neumann pour l'opérateur $\bar{\partial}$

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1975-1976), exp. n° 4,  
p. 1-11

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1975-1976\\_\\_\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976___A5_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

REGULARITE ANALYTIQUE GLOBALE DES SOLUTIONS  
DU PROBLEME DE NEUMANN POUR L'OPERATEUR  $\bar{\delta}$

par M. DERRIDJ et D. TARTAKOFF



§ 1. INTRODUCTION

Le problème de Neumann pour  $\bar{\partial}$  permet d'obtenir dans un ouvert  $\Omega$  convenable de  $\mathbb{C}^n$   $n \geq 2$ , la solution de  $\bar{\partial}u = f$ , qui est orthogonale aux fonctions holomorphes. Il est intéressant donc d'étudier la régularité de  $u$ , lorsque  $f$  a une certaine régularité. En particulier J. J. Kohn a étudié ce problème dans le cadre de  $C^\infty(\bar{\Omega})$ , d'abord dans un domaine strictement pseudo-convexe, ensuite dans certains domaines faiblement pseudo-convexes [4] [5].

Ensuite la régularité Gevrey a été étudiée par D. Tartakoff [6] pour les formes de degré  $(p,q)$ ,  $q \geq 2$  et par M. Derridj pour toutes les formes  $(p,q)$  (donc  $q \geq 1$ ) [1].

Le problème de la régularité analytique restait entièrement posé. Dans cet article, nous étudions la régularité analytique globale des solutions  $u$  du problème de Neumann

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\partial} \bar{\partial}^* + \bar{\partial}^* \bar{\partial})u = f \\ \text{condition de Neumann} \end{array} \right.$$

dans le compact  $\bar{\Omega}$ , lorsque  $\Omega$  vérifie certaines hypothèses en particulier lorsque  $\Omega$  est un ouvert strictement pseudo-convexe.

Remarquons que le problème de la régularité analytique locale est plus fort que celui de la régularité analytique globale.

Ici nous nous restreignons à des ouverts de  $\mathbb{C}^n$ . Mais on peut considérer des variétés analytiques réelles munies d'une structure presque complexe intégrable (voir [2]).

§ 2. NOTATIONS ET DEFINITIONS

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 2$ , défini par 
$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \{r < 0\} \\ |dr| = 1 \text{ au voisinage} \\ \text{de } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

$r$  analytique réelle.

Soit  $(L_1, \dots, L_{n-1}, L_n)$  un système libre de champs de vecteurs holomorphes i.e.  $L_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial z_j}$ , analytiques réels, tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} L_i(r) = 0 \quad \text{près de } \partial\Omega \quad i = 1, \dots, n-1. \\ L_n(r) = 1 \end{array} \right.$$

En fait  $L_n$  a une écriture globale par exemple  $\{L_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_i}\}$ . Quant

aux  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , on peut les écrire localement, par exemple au voisinage d'un point  $z_0$  t.q  $\frac{\partial r}{\partial z_n}(z_0) \neq 0$ , on prend

$$L_i = \frac{\partial r}{\partial z_n} \frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\partial r}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_n}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Comme  $L_1, \dots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{n-1}, (L_n - \bar{L}_n)$ , forment une base de champs tangents au complexifié de l'espace tangent à  $\partial\Omega$  au voisinage d'un point de  $\partial\Omega$ , on peut écrire

$$[L_i, \bar{L}_j] = c_{ij} (L_n - \bar{L}_n) + \mathcal{L}(L_i, \bar{L}_i)_{i=1}^{n-1}, \quad i, j \leq n-1$$

$(c_{ij})$  est la matrice Levi. On dit que  $\Omega$  est strictement pseudo-convexe si  $(c_{ij})$  est définie positive en tout point de  $\partial\Omega$ .

Si  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  est le système de  $(1,0)$  formes, dual de  $(L_1, \dots, L_n)$  alors l'opérateur  $\bar{\delta}$  peut s'écrire sur une fonction  $u$

$$\bar{\delta}u = \sum_{i=1}^n L_i u \bar{\omega}_i$$

L'opérateur  $\bar{\delta}^*$  est l'adjoint de  $\bar{\delta}$  au sens de  $L^2(\Omega)$ ; on peut le définir pour une forme  $(0, q)$   $q \geq 1$  par

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{D}(\bar{\delta}^*) \Leftrightarrow u = \sum u_I \bar{\omega}_I \quad \bar{\omega}_I = \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_q} \\ \quad \quad \quad u_I = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ pour } n \in I \quad I = (i_1, \dots, i_q) \\ \\ (\bar{\delta}^* u, v) = (u, \bar{\delta} v), \quad \forall v \text{ forme de degré } (0, q-1). \end{array} \right.$$

On considère le Laplacien complexe :

$$\square u = [\bar{\delta} \bar{\delta}^* + \bar{\delta}^* \bar{\delta}] u$$

Si  $f \in L^2$ , est orthogonale aux formes harmoniques (i.e.  $\square v = 0$ ) alors il existe  $u$  telle que

$$\begin{array}{l} u \in \mathcal{D}(\bar{\delta}^*) \\ \bar{\delta} u \in \mathcal{D}(\bar{\delta}^*) \\ \square u = f \end{array} \quad \text{voir [3]} .$$

Nous allons montrer ici que, si  $\Omega$  est convenable (i.e.  $\partial\Omega$  est analytique réelle et vérifie certaines hypothèses englobant le cas où il y a stricte pseudo-convexité), alors  $f \in \mathcal{A}(\bar{\Omega})$  entraîne  $u \in \mathcal{A}(\bar{\Omega})$ . Ce théorème repose en fait sur un théorème "géométrique" dont nous donnerons la démonstration. Nous donnerons seulement l'idée de la démonstration du théorème final à partir du théorème "géométrique" en majorant les dérivées de  $u$  suivant la mauvaise direction. Quant aux dérivées dans les autres directions (à savoir  $L_1, \dots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{n-1}, \bar{L}_n$ ) qui sont "les directions elliptiques", on peut les majorer localement, ce que le lecteur conçoit fort bien .

§ 3. LE THEOREME "GEOMETRIQUE"

**Proposition 1** : Supposons que la forme de Lévi est non dégénérée,  $\partial\Omega$  analytique réelle. Il existe une fonction unique,  $\varphi$ , analytique au voisinage de  $\partial\Omega$ , valant 1 sur  $\partial\Omega$  telle que si

$$L'_n = \varphi L_n \quad , \quad L'_i = L_i \quad i = 1, n-1 .$$

alors la matrice  $(\alpha'_{ij})$  définie par

$$[L'_i, \bar{L}'_j] = \alpha'_{ij} L'_n + \dots$$

vérifie  $\det(\alpha'_{ij}) = 0$  au voisinage de  $\partial\Omega$ .

**Démonstration** : Notons  $\alpha_{ij} = [L_i, \bar{L}_j] |_{L_n}$  .

Calculons les  $\alpha'_{ij}$ , avec  $\varphi \neq 0$  au voisinage de  $\partial\Omega$ .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha'_{ij} = \varphi^{-1} \alpha_{ij} & i, j < n \\ \alpha'_{in} = \bar{\varphi} \varphi^{-1} \alpha_{in} & i < n \\ \alpha'_{ni} = \alpha_{ni} - \varphi^{-1} \bar{L}_i(\varphi) & i < n \\ \alpha'_{nn} = \bar{\varphi} \alpha_{nn} - \bar{\varphi} \varphi^{-1} \bar{L}_n(\varphi) \end{array} \right.$$

Alors  $\det(\alpha'_{ij}) = 0$  si le déterminant

$$\left| \begin{pmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{in} \\ \varphi \alpha_{ni} - \bar{L}_i(\varphi) & \varphi \alpha_{nn} - \bar{L}_n(\varphi) \end{pmatrix} \right| = 0$$

Comme  $\bar{L}_i$  est tangentiel pour  $i = 1, \dots, n-1$ , et que  $\bar{L}_n$  ne l'est pas et remarquant que le coefficient de  $\bar{L}_n(\varphi)$  est le déterminant de la forme de Lévi, donc non nul, on déduit que  $\partial\Omega$  est non-caractéristique pour l'équation différentielle obtenue en égalant le déterminant à 0. Le théorème de Cauchy

#### IV.5

Kovalewski assure l'existence de  $\varphi$ , au voisinage d'un point de  $\partial\Omega$ , unique telle que  $\varphi = 1$  sur  $\partial\Omega$ . Mais un calcul de déterminant montre que  $\det |c'_{ij}| = 0$  ne dépend pas du choix de  $(L_1, \dots, L_{n-1})$ ; on déduit qu'on peut globaliser (puisque  $L_n$  est global) et trouver  $\varphi$  au voisinage de  $\partial\Omega$ . A partir de maintenant on note  $\rightarrow L_n$ , le champ  $L_n$  précédent et  $T = L_n - \bar{L}_n$ , qui est global.

**Proposition 2** : Il existe des coefficients  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$  uniques au voisinage de  $\partial\Omega$ , analytiques réels tels que si

$$T' = T + \sum_1^{n-1} \alpha_j L_j + \sum_1^{n-1} \beta_j \bar{L}_j$$

alors

$$\otimes_i : [T', L_i] |_{L_n} = 0 \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\otimes'_i : [T', \bar{L}_i] |_{L_n} = 0 \quad i = 1, \dots, n-1.$$

au voisinage de  $\partial\Omega$ .

**Démonstration** :

$$[T', L_i] |_{L_n} = [T, L_i] |_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j [L_j, L_i] |_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j [\bar{L}_j, L_i] |_{L_n}$$

$$[T', L_i] |_{L_n} = [T, \bar{L}_i] |_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j [L_j, L_i] |_{L_n}.$$

comme la matrice  $[L_j, \bar{L}_i] |_{L_n}$  est non dégénérée, il existe bien des coefficients  $\alpha_j$  analytiques réels au voisinage de  $\partial\Omega$ , uniques, tels que

$$[T', \bar{L}_i] |_{L_n} = 0 \quad \text{au voisinage de } \partial\Omega,$$

en revenant à la première égalité et utilisant le même argument, on obtient des coefficients  $\beta_j$  uniques.

Remarquons qu'on a utilisé que les égalités :

$$0 = [T', L_i] |_{L_n} \quad \text{et} \quad [T', \bar{L}_i] |_{L_n} = 0$$

ne dépendent pas de l'écriture locale des  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ .



Remarquer que les  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  ont été déterminés uniquement en chaque point.

Proposition 3 : Soit  $T'$  déterminé par la proposition 2. Alors

$$\otimes_n : [T', L_n] |_{L_n} = 0 \text{ au voisinage de } \partial\Omega \text{ si et seulement si}$$

$$\otimes'_n : [T', \bar{L}_n] |_{L_n} = 0 \quad "$$

Démonstration : En effet :

$$\begin{aligned} [T', L_n - \bar{L}_n] |_{L_n} &= [T', T'] |_{L_n} - [T', \sum_1^{n-1} \alpha_i L_i + \sum_1^{n-1} \beta_i \bar{L}_i] |_{L_n} \\ &= [T', \sum_1^{n-1} \alpha_i L_i + \sum_1^{n-1} \beta_j \bar{L}_j] |_{L_n} \end{aligned}$$

ce qui est nul en utilisant la propriété de  $T'$ .

Proposition 4 : Une condition nécessaire et suffisante pour que les égalités

$\otimes_i$  et  $\otimes'_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  soit vraies est que

$$\det |\alpha_{ij}| = 0$$

Démonstration : D'après la proposition 3, il s'agit de vérifier

$\otimes_1, \dots, \otimes_n, \otimes'_1, \dots, \otimes'_{n-1}$ . Les conditions  $\otimes_i^{(1)}$   $i = 1, \dots, n$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \otimes_i [L_n, L_i] |_{L_n} - [\bar{L}_n, L_i] |_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j [L_j, L_i] |_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j [L_j, \bar{L}_i] |_{L_n} &= 0 \\ \otimes_n [L_n, \bar{L}_n] |_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j [L_j, L_n] |_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j [\bar{L}_j, L_n] |_{L_n} &= 0 \\ \otimes'_i [L_n, \bar{L}_i] |_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j [L_j, \bar{L}_i] |_{L_n} &= 0 \\ \otimes'_n [L_n, \bar{L}_n] |_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j [L_j, \bar{L}_n] |_{L_n} &= 0 \end{aligned}$$

ces dernières équations s'écrivent

$$\begin{cases} \alpha_{nn} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \alpha_{jn} = 0 \\ \alpha_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \alpha_{ji} = 0 \end{cases}$$

Comme  $\det(\alpha_{ji})_{j,i < n} \neq 0$ , ce système est résoluble si et seulement si  $\det(\alpha_{k,l}) = 0$ . Les propositions précédentes montrent que  $\alpha_j$  vérifiant  $\otimes'_i$  est unique et qu'alors  $\otimes_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont vérifiées.

**Théorème** : Supposons que  $\partial\Omega$  est analytique réelle et que la forme de Levi est non dégénérée. Il existe  $T'$  unique, analytique réel de la forme  $T' = T + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i L_i + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \bar{L}_i$  tel que

$$[T', L_i]_{L_n} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$[T', \bar{L}_i]_{L_n} = 0 \quad i = 1, \dots, n \text{ au voisinage de } \partial\Omega.$$

De plus  $\bar{T}' = -T$  sur  $\partial\Omega$  et  $[T', L_i]_{\bar{L}_n} = [T', \bar{L}_i]_{\bar{L}_n} = 0$  sur  $\partial\Omega$  pour  $i = 1, \dots, n$

**Démonstration** : La première partie est la résultante des 4 propositions précédentes. Montrons la 2ème partie.

Comme  $T'$  est tangential sur  $\partial\Omega$ , il en est de même de  $[T', L_i]$  et  $[T', \bar{L}_i]$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ . Donc sur  $\partial\Omega$ , on a bien  $\bar{T}' = -T$ , car sur  $\partial\Omega$  si on prend

$$T'' = T + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j L_j - \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\alpha}_j \bar{L}_j$$

ce  $T''$  conviendrait, et d'après l'unicité, on a  $T'' = T'$  sur  $\partial\Omega$ , donc on a bien  $\bar{T}' = -T$  sur  $\partial\Omega$ . Par suite  $T' = T'_0 + \gamma T_1$  où  $\bar{T}'_0 = -T'_0$  et  $T_1 \in \{\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{n-1}\}$   
 $\gamma = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

Ainsi

$$[T', L_i]_{\bar{L}_n} = [T'_0, L_i]_{\bar{L}_n} + [\gamma T_1, L_i]_{\bar{L}_n} = [\bar{T}'_0, \bar{L}_i]_{L_n} + [\gamma T_1, L_i]_{\bar{L}_n}$$

sur  $\partial\Omega$   $[\gamma T_1, L_i] \Big|_{\bar{L}_n} = 0$  et  $[\bar{T}'_0, \bar{L}_i] \Big|_{L_n} = - [T'_0, \bar{L}_i] \Big|_{L_n} = 0$  . D'où le résultat.

Régularité analytique globale : Nous nous contenterons des formes de degré (0,1). Nous ferons les hypothèses suivantes

$$1) \quad \sum_1^n \|\bar{L}_i u\| + \sum_1^{n-1} \|L_i u\| + K\|u\| \leq C(\|\bar{\partial}u\| + \|\bar{\partial}^* u\|) + C_K \|u\|_{-1}, \quad u \in (\bar{\partial}^*) \text{ à support petit.}$$

où K est une constante assez grande.

2) la forme de Lévi est non dégénérée.

3)  $\partial\Omega$  est analytique réelle.

Remarque : Les conditions 1) et 2) sont vérifiées si  $\Omega$  est strictement pseudo-convexe.

Théorème : Sous les hypothèses 1), 2), 3) si

$$\begin{cases} \square u = f \\ u \in \mathcal{D}(\square) \Rightarrow u \in \mathcal{Q}(\bar{\Omega}) \\ f \in \mathcal{Q}(\bar{\Omega}). \end{cases}$$

Corollaire : Soit  $f \in \mathcal{Q}(\bar{\Omega})$ ,  $\bar{\partial}f = 0$  et  $f \in \mathcal{N}(\bar{\partial}^*)$ , alors la solution de  $\bar{\partial}u = f$  orthogonale aux fonctions holomorphes est analytique réelle dans  $\bar{\Omega}$ . Nous ne donnerons que l'idée de la démonstration, surtout en quoi le théorème "géométrique" intervient.

Il suffit en fait de montrer que la restriction de u à  $\partial\Omega$  est analytique réelle sur  $\partial\Omega$ , puisque  $\square$  est un opérateur elliptique. Pour cela, il suffira de montrer que si on désigne par  $(Op)_q$  un opérateur de la forme

$$L_{i_1}^{q_1} \dots L_{i_j}^{q_j} T^{q_{j+1}} \dots L_{i_{j+2}}^{q_{j+2}} \dots L_{i_\ell}^{q_\ell} \quad q_1 + \dots + q_\ell = q .$$

$$\| (Op)_q u \| \leq C^{q+1}_q !$$

$$\| \bar{L}_n (Op)_q u \| \leq C^{q+1}_q !$$

ce qui entraîne bien  $\| (Op)_q u \|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C^{q+1} q!$  puisque  $L_n = \bar{L}_n + T$ .

1ère étape : On majore ainsi

$$\sum_1^n \|\bar{L}_i T^k u\| + \sum_1^{n-1} \|L_i T^k u\| + K \|T^k u\| \leq C^{k+1} k !$$

Cela se fait par récurrence. On introduit une partition de l'unité  $\sum \alpha_j = 1$  sur  $\bar{\Omega}$  telle que  $\text{supp } \alpha_j \subset \omega_j$  où  $\omega_j$  est un voisinage <sup>d'un point</sup> du bord sur lequel on a l'estimation (1). Alors, il s'agit d'estimer

$$\sum_{j=1}^N \sum_1^n \|\bar{L}_i \alpha_j T^k u\|^2 + \sum_1^{n-1} \|L_i \alpha_j T^k u\|^2 + K \|\alpha_j T^{k+1} u\|^2 \quad \text{par}$$

$$\sum_{j=1}^N (C \|\delta \alpha_j T^k u\|^2 + \|\delta^* \alpha_j T^k u\|^2 + \|\alpha_j T^k u\|_{-1}^2).$$

$\|\alpha_j T^k u\|_{-1}$  est facilement majoré . Regardons par exemple :

$$(\bar{\delta} \alpha_j T^k u, \delta \alpha_j T^k u) = (\bar{\delta} u, \bar{\delta} \bar{T}^k \alpha_j^2 T^k u) +$$

$$([\bar{\delta}, \alpha_j T^k] u, \delta \alpha_j T^k u) + (\bar{\delta} u, [\bar{T}^k \alpha_j, \delta] \alpha_j T^k u).$$

mais  $|(\bar{\delta} u, \bar{\delta} \bar{T}^k \alpha_j^2 T^k u)| = |(f, \bar{T}^k \alpha_j^2 T^k u)| = |(\alpha_j T^k f, \alpha_j T^k u)| \leq C_\varepsilon \|T^k f\|^2 + \|T^k u\|^2$  .

D'autre part :

$$([\bar{\delta}, \alpha_j] T^k u, \delta \alpha_j T^k u) = (\alpha_j' T^k u, \delta \alpha_j T^k u) + (\alpha_j [\bar{\delta}, T^k] u, \delta \alpha_j T^k u)$$

où  $\alpha_j'$  désigne une dérivée d'ordre 1 de  $\alpha_j$ . Majorons par exemple le premier terme. Mais le fait que T est global intervient ici de façon essentielle pour écrire

$$|(\alpha_j' T^k u, \delta \alpha_j T^k u)| \leq C \sum_{j=1}^N [C_\varepsilon \|\alpha_j T^k u\|^2 + \varepsilon \|\delta \alpha_j T^k u\|^2]$$

si  $\varepsilon$  est convenable,  $C_\varepsilon \|\delta \alpha_j T^k u\|^2$  est absorbé en passant à gauche, par  $\|\delta \alpha_j T^k u\|^2$ . D'autre part si K est assez grand (voir hypothèse 1))

$C C_\varepsilon \|\alpha_j T^k u\|^2$  est absorbé à gauche par  $K \|\alpha_j T^k u\|^2$ .

Passons au second terme : là il faut remarquer que

1)  $[\bar{\delta}, T^k]$  est "grosso modo" équivalent à  $k$  fois un terme de la forme de  $[\bar{\delta}, T] T^{k-1}$ . Donc il faut estimer  $(\alpha_{j,k} [\bar{\delta}, T] T^{k-1} u, \bar{\delta} \alpha_j T^k u)$  ou bien d'après le théorème géométrique  $(\alpha_{j,k} L T^{k-1} u, \bar{\delta} \alpha_j T^k u)$  où

$L \in \{L_1, \dots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{n-1}, \bar{L}_n\}$  ce qu'on peut estimer par

$C_\varepsilon^2 k^2 \|\alpha_j L T^{k-1} u\|^2 + \varepsilon \|\bar{\delta} \alpha_j T^k u\|^2$  ; le 2ème de ces deux termes sera absorbé par  $\|\bar{\delta} \alpha_j T^k u\|^2$  et le premier est majoré en utilisant la récurrence à l'étape  $k-1$ .

Les autres termes se majorent un peu de la même manière, quoiqu'il intervienne en plus quelques intégrations par parties. C'est là qu'on utilise la 2ème partie du théorème, à savoir que  $[\bar{\delta}, T]$  et  $[\bar{\delta}^*, T]$  sont tangentiels à  $\partial\Omega$ .

2ème étape : On montre qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\|(Op)_q u\| \leq C^{q+1} q!$$

$$\|\bar{L}_n (Op)_q u\| \leq C^{q+1} q!$$

Pour donner une idée de la démonstration, regardons par exemple un terme de la forme

$$\|\varphi L_i^p T^q u\|^2 \quad \text{où} \quad L_i \in \{L_1, \dots, L_{n-1}\}$$

on majore par  $(\bar{\delta} \varphi L_i^{p-1} T^q u, \bar{\delta} \varphi L_i^p T^q u)$  et en faisant des crochets. Comme dans la 1ère étape, on est amené à majorer par exemple

$$(\varphi' L_i^{p-1} T^q u, \bar{\delta} \varphi L_i^p T^q u) \quad \text{et} \quad (\varphi [\bar{\delta}, L_i^{p-1}] T^q u, \bar{\delta} \varphi L_i^p T^q u)$$

Maintenant pour  $\varepsilon$  convenable

$$C_\varepsilon \|\varphi' L_i^{p-q} T^q u\|^2 + \varepsilon \|\bar{\delta} \varphi L_i^p T^q u\|^2$$

se majore en faisant absorber  $\varepsilon \|\bar{\delta} \varphi L_i^p T^q u\|^2$  et en estimant  $C_\varepsilon \|\varphi' L_i^{p-1} T^q u\|^2$

en utilisant la récurrence et si  $\varphi$  est convenablement choisi. Remarquer qu'ici on peut estimer les choses localement car  $L_i$  est une "direction elliptique".

Maintenant il suffit du [7]

Lemme : Si  $\|Op(q)u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C^{q+1} q!$  alors  $\sup_{\partial\Omega} |D^\alpha u| \leq B^{\alpha+1} \alpha!$

On utilise pour cela que les opérateurs  $L_1, \dots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{n-1}$  et  $T$  qui sont tangentiels à  $\partial\Omega$  forment une base de champs de vecteurs tangents ; d'où on obtient

$$\|D^\alpha u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq A^{|\alpha|+1} \alpha!$$

Ensuite on utilise le théorème de Sobolev pour avoir le lemme.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Derridj : Gevrey regularity up to the boundary for the  $\bar{\partial}$ -Neumann problem; 1975 AMS Summer institute in several complex variables held in Williamstown Massachussets.
- [2] M. Derridj and D. S. Tartakoff : On the real analyticity of the solutions of the  $\bar{\partial}$ -Neumann problem. A paraître.
- [3] G. B. Folland and J. J. Kohn : The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex (Princeton University Press).
- [4] J. J. Kohn : Harmonic Integrals on strongly pseudo-convex manifolds I and II . Annals of Math. 78 (1963) and 79 (1964).
- [5] J. J. Kohn : Boundary behavior of  $\bar{\partial}$  on weakly pseudo-convex manifolds of dimension two. J. of Diff. Geometry 6 (1972).
- [6] D. S. Tartakoff : Gevrey hypoellipticity for subelliptic boundary value problems : C. P. A. M. 26 (1973).
- [7] D. S. Tartakoff : Global real analyticity for  $\square_b$  . A paraître.