Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. M. Bony

Propagation des singularités différentiables pour des opérateurs différentiels à coefficients analytiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 3, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

PROPAGATION DES SINGULARITES DIFFERENTIABLES POUR DES OPERATEURS DIFFERENTIELS A COEFFICIENTS ANALYTIQUES

par J. M. BONY

Exposé n° III 18 Novembre 1975

§ 1. INTRODUCTION

Cet exposé, qui résume [1], est consacré à l'étude des opérateurs (pseudo-) différentiels analytiques P dont la variété caractéristique est régulière, involutive, de codimension $n \geq 1$, et qui satisfont à une condition de Levi. Pour les hypothèses précises, voir le § 2.

Nous démontrons que si une distribution u vérifie $Pu \in \mathcal{C}^\infty$, le spectre singulier différentiable (wave front) de u se propage le long des n-feuilles bicaractéristiques. Nous démontrons également la résolubilité microlocale de P dans les distributions et dans les fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

Dans [B. S.], nous avons démontré des résultats du même type, sans condition de Lévi, pour le spectre singulier analytique des hyperfonctions. Il est ici indispensable de faire une telle hypothèse, le comportement des singularités différentiables étant fort différent en l'absence de condition de Lévi.

Dans [5], J. Sjöstrand a démontré les mêmes résultats que nous, lorsque l'opérateur P est à coefficients $\mathcal{C}^\infty$, mais avec des restrictions sur la multiplicité des caractéristiques complexes de P. Il s'agit là d'un phénomène qui n'a rien de technique. Si $P(x,D_x)$ est un opérateur elliptique que nous faisons opérer dans $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$ sur les distributions $u(x,t)$, il satisfait à nos hypothèses sur la variété caractéristique et à la condition de Levi. La propagation des singularités appliquée à $u(x)\delta(t)$, où u vérifie $Pu = 0$, entraîne que u s'annule identiquement si u est nulle au voisinage d'un point. Ce travail (coefficients analytiques) et celui de Sjöstrand (caractéristiques complexes au plus doubles), correspondent aux deux cas les plus typiques d'unicité du problème de Cauchy.

Cette remarque justifie également l'emploi de nos techniques : utilisation des valeurs au bord de fonctions holomorphes à croissance lente pour traiter de singularités différentiables. La transformation de Fourier prendrait plus difficilement en compte l'hypothèse d'analyticité des coefficients. En quelque sorte, notre méthode consiste à démontrer "avec paramètres", que les solutions d'équations elliptiques à coefficients analytiques sont restrictions de fonctions holomorphes.

Il est bien sûr impossible de donner en quelques pages autre chose qu'une idée très vague des démonstrations. Celles-ci suivent de très près [B.S.], mais il est nécessaire de contrôler précisément, à chaque étape, la croissance des fonctions holomorphes dont on doit prendre la valeur au bord.

§ 2. ENONCE DES RESULTATS

Soit $P(x,D_x)$ un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre μ, défini au voisinage d'un point (x_o,ξ_o) de $\mathbb{R}^\nu \times (\mathbb{R}^\nu \setminus \{0\})$. Soit P_μ son symbole principal et $V = \{x,\xi) \mid P_\mu(x,\xi) = 0\}$ sa variété caractéristique. Nous ferons les hypothèses suivantes sur P.

(2.1) V est une variété analytique réelle non singulière, de codimension n.

(2.2) $P_\mu(x,\xi)$ s'annule sur V exactement à l'ordre m, c'est-à-dire que pour tout point (x,ξ) de V et tout vecteur $(\Delta x,\Delta\xi)$ transverse en (x,ξ) à V, il existe $a \neq 0$ tel que l'on ait

$$P_\mu(x+\varepsilon\Delta x,\ \xi+\varepsilon\Delta\xi) = a\varepsilon^m + O(\varepsilon)\ .$$

(2.3) V est involutive, et la restriction de la 1-forme canonique $\sum_1^\nu \xi_i\, dx_i$ à V est partout non nulle.

Si $q_1(x,\xi),\dots,q_n(x,\xi)$ sont des fonctions homogènes de degré 1, s'annulant sur V, et dont les différentielles sont linéairement indépendantes sur V, la condition (1.1.3) signifie que

$$\{q_i,q_j\} = 0 \text{ sur } V, \text{ et}$$

$dq_1,\dots,dq_n$, $\Sigma\,\xi_i dx_i$ sont linéairement indépendantes sur V. Il résulte de la condition (2.2) que l'on peut écrire

$$P_\mu(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,\xi)q^\alpha(x,\xi)$$

avec $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ et $q^\alpha = q_1^{\alpha_1}\dots q_n^{\alpha_n}$, où les a_α sont homogènes de degré $\mu - m$ et vérifient

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,\xi)u^\alpha \neq 0, \quad \text{pour } (x,\xi)\in V \quad \text{et} \quad u = (u_1,\dots,u_n)\neq 0.$$

La condition suivante est la condition de Levi.

(2.4) Soient $Q_i(x,D_x)$, $i = 1,\dots,n$ des opérateurs pseudo-différentiels de symboles principaux respectifs $q_i(x,\xi)$, il existe alors des opérateurs pseudo-différentiels $A_\alpha(x,D_x)$, $0\leq |\alpha| \leq m$, d'ordre $\mu - m$, tels que

$$P(x,D_x) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} A_\alpha(x,D_x) \quad Q(x,D_x)^\alpha.$$

Cette condition, indépendante du choix des Q_i, est en fait une condition sur les termes d'ordres $\mu,\mu-1,\dots,\mu-m+1$ du symbole de P.

Nous aurons à utiliser les deux notions suivantes pour décrire les singularités d'une distribution u sur un ouvert ω. Nous aurons à montrer que le spectre singulier analytique de [S. K. K.] coïncide pour les distributions avec le support essentiel de Bros-Iagolnitzer [2], [3] et avec le front d'onde analytique de Hörmander [4].

<u>Spectre singulier analytique</u> SSA(u). C'est un sous-ensemble fermé de $\omega\times S^{\nu-1}$ caractérisé par la propriété suivante. Un point (x_o,ξ_o) n'appartient pas à SSA(u) si et seulement s'il existe un nombre fini de cônes Γ_α de R^ν, tels que $\xi_o \notin \Gamma_\alpha^o$, et des fonctions holomorphes f_α définies dans l'intersection de $\mathbb{R}^\nu + i\Gamma_\alpha$ et d'un voisinage de x_o, telles que l'on ait $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$ au voisinage de x_o. [On a noté ici Γ^o le polaire de Γ, et b(.) la valeur au bord].

<u>Spectre singulier différentiable</u> SSD(u) [ou wave front]. C'est un sous-ensemble fermé de $\omega\times S^{n-1}$ caractérisé par la propriété suivante. Un point (x_o,ξ_o) n'appartient pas à SSD(u) si on peut trouver une fonction $\varphi\in\mathcal{D}^\infty$, égale à 1 au voisinage de x_o, telle que $\widehat{\varphi u}(\xi)$ soit à décroissance rapide dans un voisinage conique de la direction ξ_o.

Rappelons enfin que, sous les hypothèses (2.1) et (2.3), les champs hamiltoniens H_{q_i} forment un système de Frobenius sur V et définissent localement un feuilletage de V par des feuilles de dimension n dites feuilles bicaractéristiques.

Théorème 1 : Supposons que P vérifie (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) au voisinage de (x_0,ξ_0). On a alors

a) (Existence $\mathcal{D}'$). Soit v une distribution définie au voisinage de x_0. Il existe alors une distribution u, définie au voisinage de x_0, telle que

$$(x_0,\xi_0) \notin SSA(Pu - v)$$

b) (Existence C^∞). Soit ψ une distribution définie au voisinage de x_0, telle que $(x_0,\xi_0) \notin SSD(\psi)$. Il existe alors une distribution φ, définie au voisinage x_0, telle que $(x_0,\xi_0) \notin SSD(\varphi)$ et $(x_0,\xi_0) \notin SSA(P\varphi - \psi)$.

c) (Propagation des singularités). Soit u une distribution définie au voisinage de x_0, telle que $(x_0,\xi_0) \notin SSD(Pu)$. Alors, au voisinage de (x_0,ξ_0), l'ensemble SSD(u) est réunion de feuilles bicaractéristiques.

Remarque : Pris à la lettre, l'énoncé précédent n'a de sens que si P est un opérateur différentiel. Si P est un opérateur pseudo-différentiel (au sens de ([S.K.K.]) qui n'est défini qu'au voisinage de (x_0,ξ_0), Pu désigne une distribution définie modulo des distributions dont le spectre singulier analytique ne contient pas (x_0,ξ_0). Le sens du théorème 1 est alors clair.

§ 3. LES ETAPES DE LA DEMONSTRATION

3.1 Il nous faut d'abord éclaircir quelques relations entre théorie des distributions et théorie des hyperfonctions. Un premier point consiste à démontrer que le spectre singulier analytique de [S. K. K.], le support essentiel de Bros-Iagolnitzer [3] et le analytic wave front de Hörmander [4] sont identiques pour toute distribution μ. En particulier, pour une distribution, on peut définir SSA(u) comme dans la définition donnée au § 2, mais en supposant les $f_\alpha(z)$ à croissance lente (c'est-à-dire, $|f_\alpha(x+iy)| \leq Cte\,|y|^{-N}$ pour un N convenable).

D'autre part, lorsque $K(x,y)$ et $u(y)$ sont des distributions dont le spectre singulier analytique vérifie des hypothèses convenables on peut définir $\int K(x,y)u(y)dy$ soit au sens des hyperfonctions [S.K.K.] soit au sens des distributions [F.I.O.1] . Il nous faut démontrer que ces deux définitions coïncident, ce qui contient le cas des opérateurs pseudo-différentiels et des transformations de contact quantifiées-opérateurs intégraux de Fourier.

En utilisant de telles transformations (qui transforment donc et le S.S.A., et le S.S.D.), on se ramène au cas d'un opérateur $P(x,t,D_x,D_t)$ dans $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^p_t$ du type suivant :

$$P(x,t,D_x,D_t) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} A_\alpha(x,t,D_x,D_t) D_x^\alpha$$

où les A_α sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0, définis pour (ξ,ζ) voisin de $\xi = 0$, $\zeta = \zeta_0 = (1,0,\ldots,0)$, avec

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,t,0,\zeta)\xi^\alpha \neq 0 \text{ pour } \xi \neq 0 \text{ et } \zeta \text{ voisin de } \zeta_0.$$

Nous aurons à démontrer pour P les résultats d'existence microlocale ainsi que le théorème de régularité qui impliquera la propagation des singularités :

<u>Théorème 2</u> : <u>Soit</u> $u(x,t)$ <u>une distribution solution de</u> $SSA(Pu) \not\ni (0,0,0,\zeta_0)$. <u>On peut alors trouver une distribution</u> $\tilde{u}(z,t)$ <u>dans</u> $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p$, <u>vérifient</u> $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\tilde{u} = 0$ <u>telle que l'on ait</u> $SSA[u - \tilde{u}|_{R^n \times R^p}] \not\ni (0,0,0,\zeta_0)$.

3.2 Comme dans [B.S.], le point essentiel sera la démonstration d'un théorème de Cauchy-Kowalewski pseudo-différentiel dans le domaine complexe. Nous devons ici non seulement contrôler la forme géométrique des domaines où il y a existence et unicité, mais aussi la croissance au bord des solutions (c'est là qu'intervient la condition de Levi).

Pour un opérateur P du type suivant (dans $\mathbb{C}^n_z \times \mathbb{C}^p_w$),
$P(z,w,D_z,D_w) = D^m_{z_n} + \sum_{\substack{0 \leq |\alpha| \leq m \\ \alpha_n < m}} A_\alpha(z,w,D_{z'},D_w) D^\alpha_{z'} D^{\alpha_n}_{z_n}$ où les A_α sont des

opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 ne dépendant pas de D_{z_n} , nous aurons à résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} P_\Sigma f = g \\ D^j_{z_n} f|_H = h_j \qquad j = 0,\dots,m-1 \end{cases}$$

où Σ et H sont les hyperplans d'équations respectives $w_1 = \sigma$ et $z_n = h$ et où P_Σ opère sur les fonctions holomorphes (par exemple $(D^{-1}_{w_1})_\Sigma f$ est la primitive de f s'annulant sur Σ)

Lorsque Ω est un ouvert z_n - k -Σ- plat et w - δ - H-plat avec k et δ assez petits (voir [B.S.]) on a les résultats suivants :

a) Si g et les h_j sont holomorphes dans Ω, il existe une et une seule f solution du problème de Cauchy, holomorphe dans Ω.

b) Si de plus Ω est contenu dans $\{(z,w) \mid \operatorname{Im} w_1 > 0\}$, et si on a $|g(z,w)| \leq Cte(\operatorname{Im} w_1)^{-N}$, $|h_j(z',w)| \leq Cte(\operatorname{Im} w_1)^{-N^1}$, on a une majoration presque du même type pour f.

c) Si on a $|D^\alpha_z D^\beta_w g| \leq C_{\alpha\beta}$ et $|D^{\alpha'}_{z'} D^\beta_w h_j| \leq C'_{\alpha'\beta}$, on a des majorations presque du même type pour f.

Les parties b) et c) utilisent de façon décisive la condition de Lévi, et serviront bien sûr à démontrer que les valeurs au bord des solutions f ainsi trouvées sont des distributions ou des fonctions C^∞.

Ces résultats se démontrent par une méthode d'approximations successives, mais nécessitent des estimations sur la manière dont les P_Σ opèrent sur les fonctions holomorphes passablement plus complexes que celles de [B.S.], en particulier pour la partie c) qui exige de contrôler les commutateurs. Or, si P et Q sont pseudodifférentiels, le commutateur $[P_\Sigma, Q_\Sigma]$ n'est pas égal à $[P,Q]_\Sigma$, il s'introduit en outre des opérateurs "de simple couche" sur Σ qu'il faut également estimer.

3.3 La fin de la démonstration suit de très près [B.S.], la différence essentielle étant que tous les arguments de cohomologie doivent être remplacés par des arguments de cohomologie à croissance. On "transforme" d'abord le théorème de Cauchy-Kowalewski en théorèmes d'existence et de prolongement dans le domaine complexe pour les solutions de

$P(z,w,D_z,D_w)f(z,w) = g(z,w)$. Puis on utilise la construction d'ouverts $z_n - k - \Sigma-$ plats et $w - \delta$ - H-plats coïncidant au voisinage de 0 avec des tubes $\mathbb{R}^{n+p} + i(G+\Gamma)$ (où G et Γ sont des cônes respectivement de $\mathbb{R}^{n+p}$ et $\mathbb{R}^n$) ainsi que divers arguments de décomposition, pour aboutir au résultat suivant

Théorème 3 : Soit G un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^{n+p}$ dont le polaire est un voisinage suffisamment petit de $\xi = 0$, $\zeta = \zeta_o$. On a alors :

a) Pour toute fonction g appartenant à $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^{n+p} + iG)$ [resp. $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{C}}\,(\mathbb{R}^{n+p} + iG)$], il existe f appartenant à $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^{n+p} + iG')$ [resp. $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{C}}\,(\mathbb{R}^{n+p} + iG')$] pour tout cône $G' \subset\subset G$, telle que l'on ait

$$SSA\,[Pb(f) - b(g)] \not\ni (0,0,0,\zeta_o)$$

b) Soit $f \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^{n+p} + iG)$ avec $SSA[Pb(f)] \not\ni (0,0,0,\zeta_o)$. On peut alors décomposer f en $f_1 + f_2$ avec, pour tout $G' \subset\subset G$:

- $f_1 \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^{n+p} + iG')$ et $SSA[b(f_1)] \not\ni (0,0,0,\zeta_o)$
- $f_2 \in \widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^{n+p} + iG' + i\mathbb{R}^n)$

On a noté $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^{n+p} + iG)$ l'espace des fonctions holomorphes dans l'intersection de $\mathbb{R}^{n+p}+iG$ et d'un voisinage de l'origine, vérifiant une majoration $|f(z,w)| \leq C(\operatorname{Im} w_1)^{-N}$ (leur valeur au bord est dans $\mathcal{D}'$), et on a noté $\widetilde{\mathcal{O}\mathcal{C}}(\mathbb{R}^{n+p} + iG)$ le sous-espace constitué des fonctions f bornées ainsi que toutes leur dérivées (leur valeur au bord est dans C^∞).

La partie existence du théorème 1 résulte de la partie a) du théorème 3. La partie b) de ce théorème permet de définir $\tilde{u}(z,t) = \lim_{s \to 0} f_2(z,t+is)$. C'est une distribution vérifiant $\partial/\partial \bar{z}_j \tilde{u} = 0$, et dont la restriction au réel ne diffère de b(f) que par $b(f_1)$ qui n'a pas de singularité en $(0,0,0,\zeta_o)$. Cela permet de démontrer le théorème 2.

Pour obtenir la propagation des singularités, il faut étendre les résultats de [F.I.0.2] sur la propagation des singularités pour les solutions $\tilde{u}$ de $\partial/\partial \bar{z}_j \tilde{u} = 0$. On montre en fait que si $(x_o,t_o,0,\zeta_o)$ n'appartient pas au spectre singulier différentiable de la restriction à $\mathbb{R}^{n+p}$ de $\tilde{u}$, on a $(x,t,0,\zeta_o) \notin SSD(\tilde{u})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony : Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs à coefficients analytiques. Astérisque (1976) (à paraître).

[B.S.] J. M. Bony et P. Schapira : Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles. Ann. Inst. Fourier Grenoble 26.1 (1976).
Voir aussi séminaire Goulaouic-Schwartz 1973-74 n° 21-22.

[2] J. Bros et D. Iagolnitzer : Tuboïdes et généralisation d'un théorème de Grauert. Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1975 n° 16.

[3] J. Bros et D. Iagolnitzer : Support essentiel et structure analytique des distributions. Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1975 n° 18.

[F.I.O.II] J. Duistermaat et L. Hörmander : Fourier Integral operators II. Acta Math. 128 (1972), 183-269.

[F.I.O.I.] L. Hörmander : Fourier Integral operators I. Acta Math. 127 (1971). 79-183.

[4] L. Hörmander : Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients. Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 329-358.

[S.K.K.] M. Sato, T. Kawai et M. Kashiwara : Hyperfunctions and pseudo-differential equations. Lect. Notes in Math. 287 (1973) Springer 265-529.

[5] J. Sjöstrand : Propagation of singularities for operators with multiple involutive characteristics (à paraître).