S. Alinhac

Inégalités L^2 pour un problème de Goursat

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 2, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU · 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

INEGALITES L^2 POUR UN PROBLEME DE GOURSAT

par S. ALINHAC

Exposé n° II

4 Novembre 1975

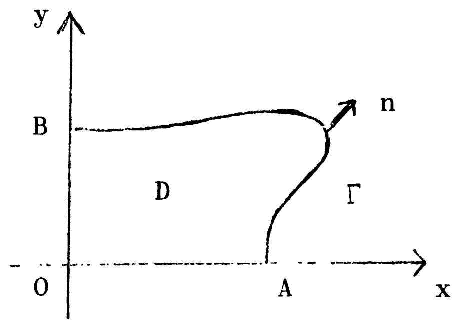
§ 0. INTRODUCTION

L'étude qui suit concerne le problème de Goursat hyperbolique dans le plan. Elle présente des conditions suffisantes très raisonnables, bien qu'en apparence assez curieuses, de correction de ce problème. Dans la présentation, on a mis l'accent sur les systèmes symétrisables et les techniques qui leur sont liées, quitte à passer rapidement sur certaines autres difficultés.

Une étude plus complète pourra être trouvée dans [2].

§ 1. GENERALITES ; PRINCIPAL RESULTAT

. On va étudier le problème de Goursat dans un domaine D du premier cadran, limité par deux segments OA et OB, et un arc Γ, continuement différentiable par morceaux, joignant A à B.



. L'opérateur P est de la forme

$$P(x,y,\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})u = \Big(\sum_{s=0}^{m} b_s(x,y)\frac{\partial^m}{\partial x^s \partial y^{m-s}}\Big)\frac{\partial^{k'+\ell'}u}{\partial x^{k'}\partial y^{\ell'}} + \sum_{k+\ell\leq m'-1} a_{k\ell}\,\frac{\partial^{k+\ell}u}{\partial x^k \partial y^\ell}$$

où k' et ℓ' sont des entiers non négatifs, $m' = m + k' + \ell'$ est l'ordre de P. Les coefficients b_s et $a_{k\ell}$ sont variables, $b_s \in C^1(\bar{D})$, $a_{k\ell}$ est borné dans $\bar{D}$. On fait, dans toute la suite, les deux hypothèses suivantes sur P:

(H) Pour tout $(x,y) \in \bar{D}$. $b_o(x,y) \neq 0$, $b_m(x.y) \neq 0$. et les racines du polynôme $\sum_{s=0}^{m} b_s(x.y)X^s$ sont réelles et distinctes ; on les note $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

(BD) Si $k+\ell = r \leq m'-1$, $a_{k\ell} \not\equiv 0$ implique $k \geq k'-(m'-r)$, $\ell \geq \ell'-(m'-r)$.

C'est là une condition de "bonne décomposition" de P par rapport aux facteurs multiples $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$.

. On se donne p, $0 \leq p \leq m$. La question est celle de l'existence et de l'unicité d'une solution u du problème

$$\begin{cases} Pu = f \;, \quad \left.\dfrac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=0} = 0 & i = 0,1,\dots,p+k'-1 = p'-1 \\ \left.\dfrac{\partial^j u}{\partial y^j}\right|_{y=0} = 0 & j = 0,\dots,q+\ell'-1 = q'-1 \;, \end{cases}$$

où l'on note $q = m-p$, $p' = m+k'$, $q' = q+\ell'$.

D'une fonction u qui vérifie les conditions de traces indiquées ci-dessus on dira, pour abréger, qu'elle a ses (p',q')-traces nulles.

. Le théorème principal est le suivant :
Soit, dans un domaine D comme ci-dessus, un opérateur P vérifiant les hypothèses (H) et (BD). on note

$$W = \begin{pmatrix} \alpha_1^{m-1} & \cdots & \alpha_m^{m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & & \alpha_m \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on fait sur les nombres $\alpha_j(0,0)$ les hypothèses algébriques suivantes :

i) au point (0.0), on a $0 < \alpha_1(0,0) < \dots < \alpha_m(0,0)$.

ii) au point (0,0), il existe m nombres $\lambda_1^o < 0,\dots,\lambda_p^o < 0$, $\lambda_{p+1}^o > 0,\dots,\lambda_m^o > 0$ tels que :

- la forme hermitienne de matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1^o & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^o \end{pmatrix}$ soit définie sur

l'espace vectoriel complexe engendré par les q premiers vecteurs colonne de W^{-1}.

- la forme hermitienne de matrice $\begin{pmatrix} -\alpha_1\lambda_1^o & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\alpha_m\lambda_m^o \end{pmatrix}$ soit définie positive sur l'espace vectoriel complexe engendré par les p derniers vecteurs colonne de W^{-1}.

Enfin. on suppose qu'en tout point de Γ, la normale $n=(n_1,n_2)$ n'est pas parallèle aux axes et que $\alpha_p < \frac{n_1}{n_2} < \alpha_{p+1}$. Alors :

α) Choisissons $\varphi \in C^1(\bar{D})$, à valeurs réelles, avec $\varphi'_x > 0$, $\varphi'_y > 0$ et $\alpha_p < \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} < \alpha_{p+1}$. Il existe $\tau_o > 0$, $C > 0$, tels que pour toute $u \in C^{m'}(\bar{D})$ qui a ses (p',q')-traces nulles, et pour $\tau \geq \tau_o$, on a l'inégalité a priori

$$(*) \quad \sum_{k+\ell \leq m'-1} \tau^{1+\frac{m'-1-(k+\ell)}{2}} \| e^{-\tau\varphi} \frac{\partial^{k+\ell} u}{\partial x^k \partial y^\ell} \|_{L^2(D)} \leq C \| e^{-\tau\varphi} Pu \|_{L^2(D)}$$

β) Pour toute $f \in L^2(D)$, il existe une $u \in L^2(D)$, telle que

. $Pu = f$

. u est p' - 1 fois continûment différentiable en x, q'-1 fois en y, et a ses (p',q')-traces nulles.

. Pour tous (k,ℓ), $k+\ell \leq m'-1$, $k \leq m+k'$, $\ell \leq m+\ell'$, $\frac{\partial^{k+\ell} u}{\partial x^k \partial y^\ell} \in L^2(D)$,

et on a l'inégalité (*).

§ 2. REDUCTION DU PROBLEME A L'ETUDE D'UN SYSTEME SYMETRISABLE .

Notons K_1 et K_2 les opérateurs

$$K_1 v(x,y) = \int_o^x v(s,y)\,ds, \quad K_2 v(x,y) = \int_o^y v(x,s)\,ds .$$

On prouve aisément la

<u>Proposition</u> : Il existe un (m+2, m+2) système différentiel du premier ordre de la forme $\mathcal{L}\mathcal{U} = A\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + B\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} + C\mathcal{U}$,

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_o \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \ddots & & & \\ & -1 & & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et C est une matrice dont tous les élements sont nuls, sauf ceux de la première ligne qui sont des polynômes en K_1 et K_2, tel que si $u \in C^{m'}(\bar{D})$ a ses (p',q')-traces nulles et vérifie $Pu = f$, les $m+2$ nouvelles fonctions $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_{m+k'}, \ldots . \mathfrak{U}_{k'-1})$, où $\mathfrak{U}_\ell = \dfrac{\partial^{m'-1} u}{\partial x^\ell \partial^{m'-1-\ell}}$, vérifient

$L\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = (f,0,\ldots,0)$ et les conditions de traces

$$(T_{p+1,q+1}) \quad \begin{cases} \text{sur } x=0, & \mathfrak{U}_{p'-1} = \ldots = \mathfrak{U}_{k'-1} = 0 \\ \text{sur } y=0, & \mathfrak{U}_{m+k'} = \ldots = \mathfrak{U}_{p'} = 0 . \end{cases}$$

Dans le cas général, l'intérêt de la réduction effectuée est que le système L ne possède les axes que comme caractéristiques <u>simples</u>, et non multiples comme l'opérateur P.

En fait, nous supposerons ici, pour alléger certaines preuves, que $k' = \ell' = 0$, ce qui conduit, en prenant cette fois comme inconnues <u>toutes</u> les dérivées partielles de u d'ordre m-1, à un (m,m) système L pour lequel les matrices A et B sont inversibles, les conditions de traces $(T_{p,q})$ étant alors

$$\begin{cases} \text{sur } x=0 \quad , & \mathfrak{U}_{p-1} = \ldots = \mathfrak{U}_o = 0 \\ \text{sur } y=0 \quad , & \mathfrak{U}_{m-1} = \ldots = \mathfrak{U}_p = 0 . \end{cases}$$

Avant d'expliquer comment on peut symétriser L en sorte que les conditions $(T_{p,q})$ soient "admissibles", rappelons quelques fait relatifs aux systèmes symétrisables.

§ 3. QUELQUES RAPPELS SUR LES SYSTEMES SYMETRISABLES

Nous renvoyons ici à la littérature classique sur ce sujet (par exemple [1], [3], [4], etc...) et en particulier à L. Sarason, dont nous utilisons le formalisme et les résultats.

Soit un système $L = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} + C$; s'il existe une matrice r inversible telle que rA et rB soient hermitiennes, on dira que r est un symétriseur pour L, et rL sera dit symétrique. L'adjoint formel de (rL) est l'opérateur

$$(rL)^* = -\frac{\partial}{\partial x}(rA) - \frac{\partial}{\partial y}(rB) + (rC)^* ,$$

sa matrice de bord en un point de ∂D de normale sortante $n = (n_1, n_2)$ est la matrice $\beta = n_1 rA + n_2 rB$. On a alors les relations :

$$2\mathrm{Re}(rLu,u)_D = 2\mathrm{Re}(\gamma u,u)_D + (\beta u,u)_{\partial D}$$

$$2\mathrm{Re}((rL)^* u,u)_D = 2\mathrm{Re}(\gamma u,u)_D - (\beta u,u)_{\partial D}$$

$$(rLu,v)_D = (u,(rL)^* v)_D + (\beta u,v)_{\partial D} ,$$

valables pour u et v régulières dans $\overline{D}$, les produits scalaires $(u,v)_D$ et $(u,v)_{\partial D}$ désignant les produits usuels $\int_D u\bar{v}\,dx$ et $\int_{\partial D} u\bar{v}\,d\sigma$, et

$$\gamma = rC - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(rA)}{\partial x} + \frac{\partial(rB)}{\partial y}\right)$$

Supposons maintenant que l'on puisse décomposer β en une somme $\beta = \beta_+ + \beta_-$ de deux matrices telles que :

i) $\ker \beta_\pm \supset \ker \beta$, $\mathrm{Im}\,\beta_\pm \subset \mathrm{Im}\,\beta$

ii) $m = 1/2(\beta_+ - \beta_-)$ est telle que $m + m^*$ est définie positive sur $\mathrm{Im}\,\beta$.

iii) $\mathrm{Im}\,\beta_+ \cap \mathrm{Im}\,\beta_- = 0$.

on a alors $\beta = 2(m - M)$, $-\beta = 2(m^* - M^*)$, en notant M et M^* les matrices $-\beta_-$ et β_+^* ; les relations précédentes s'écrivent

$$\mathrm{Re}(rLu,u)_D + \mathrm{Re}(Mu,u)_{\partial D} = \mathrm{Re}(\gamma u,u)_D + \mathrm{Re}(mu,u)_{\partial D}$$

$$\mathrm{Re}((rL)^* v,v)_D + \mathrm{Re}(M^* v,v)_{\partial D} = \mathrm{Re}(\gamma v,v)_D + \mathrm{Re}(mv,v)_{\partial D} .$$

On dit alors que M est une "matrice de bord admissible" pour rL (tandis que M^* en est une pour $(rL)^*$), à cause du théorème suivant (cf. [4]) :

Supposons $\gamma + \gamma^* > 0$, et soient $f \in L^2(D)$, $g \in L^2(\partial D) \cap \mathrm{Im}\,\beta$. Il existe alors un couple $(u\ \bar{u}) \in L^2(D) \times L^2(\partial D)$, vérifiant

$$(f,v)_D = (u,(rL)^* v)_D + (\beta\bar{u},v)_{\partial D}$$

(v régulière arbitraire) ("solution faible" de $rLu = f$) et $M\bar{u} = g$.

§ 4. DISCUSSION DES CONDITIONS AU BORD ET CHOIX D'UN SYMETRISEUR

Choisissons et fixons un champ $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, tel que $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$, $\alpha_p < \frac{\nu_1}{\nu_2} < \alpha_{p+1}$.

Des calculs élémentaires montrent alors que

$$s(A\nu_1 + B\nu_2)^{-1} A\, s^{-1} = D_\nu \quad , \quad s(A\nu_1 + B\nu_2)^{-1} B s^{-1} = \Delta_\nu \ ,$$

où $s = W^{-1}$. tandis que D_ν et Δ_ν sont des matrices diagonales

$$D_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu_1 - \nu_2\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\nu_1 - \nu_2\alpha_m} \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_\nu = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha_1}{\nu_1 - \nu_2\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{-\alpha_m}{\nu_1 - \nu_2\alpha_m} \end{pmatrix}$$

Il est clair que l'on peut substituer $(\frac{1}{\mu})s$ à s sans changer les relations précédentes, où

$$(\frac{1}{\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\mu_m} \end{pmatrix} \quad , \mu_i \text{ scalaires non nuls .}$$

La matrice $r_\mu = s^*(\frac{1}{\mu^2})s(A\nu_1 + B\nu_2)^{-1}$ (s^* = transposée hermitienne de s) est donc un symétriseur de L, qui dépend de m paramètres arbitraires (non nuls) $\mu_1,\dots.\mu_m$. En posant $\sigma_j = \dfrac{1}{\mu_j^2(\alpha_j - \frac{\nu_1}{\nu_2})}$, on voit que

$\sigma_1 < 0,\dots,\sigma_p < 0$, $\sigma_{p+1} > 0,\dots,\sigma_m > 0$, et

$$r\mu A = -\frac{1}{\nu_2} s^* \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_m \end{pmatrix} s, \quad r_\mu B = \frac{-1}{\nu_2} s^* \begin{pmatrix} -\alpha_1\sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\alpha_m\sigma_m \end{pmatrix} s.$$

Le problème est alors le suivant :
les conditions de traces $(T_{p,q})$ étant imposées, choisir le symétriseur r_μ, c'est-à-dire les m marametres σ_i avec les signes indiqués, en sorte qu'elles apparaissent comme "admissibles" pour le système symétrique $r_\mu L$, au sens indiqué au paragraphe 3.

. Plaçons nous par exemple en un point où $x = 0$: on a $\beta = -r_\mu A$, et β est inversible. En notant $E' = \langle e_1,\dots,e_q\rangle$, E" un supplémentaire de E' à choisir, u = u' + u" la décomposition correspondante de u, on pose $\beta_+ u = \beta u'$, $\beta_- u = \beta u''$. On a alors $2mu = \beta u' - \beta u''$, et
$2(mu,u) = (Dsu',su') - (Dsu'',su'') + (Dsu',su'') - (Dsu'',su')$, où

$D = \dfrac{1}{\nu_2} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m \end{pmatrix}$. <u>Supposons</u> alors qu'il est <u>possible</u> de choisir les σ_i en sorte que $D > 0$ sur sE'. On choisit pour E" le sous-espace tel que sE" est l'orthogonal pour D de sE'. Ce dernier étant maximal positif pour D (car D possède exactement q valeurs propres positives), $D < 0$ sur sE", et m est coercive. De plus, la condition $M\bar{u} = 0$ signifie exactement $(T_{p,q})$.

. De même en un point où $y = 0$, on obtient une décomposition adéquate de $\beta = -r_\mu B$ en <u>supposant</u> qu'il est <u>possible</u> de choisir les σ_i en sorte que

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1\sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\alpha_m\sigma_m \end{pmatrix} > 0$$

sur sF', où $F' = \langle e_{q+1},\dots,e_m\rangle$.

. Enfin, en un point de Γ, la matrice de bord β est définie positive (grâce à la condition $\alpha_p < \frac{n_1}{n_2} < \alpha_{p+1}$), et donc l'absence de conditions de traces est "admissible".

Examinons maintenant la condition requise sur $x = 0$:

. si l'on choisit $\sigma_1 = 0, \ldots, \sigma_p = 0$. $\sigma_{p+1} = 1, \ldots, \sigma_m = 1$, la condition $D > 0$ sur sE' équivaut à dire que le bloc carré $(q \times q)$ situé "en bas à gauche" dans la matrice s est inversible. On vérifie aisément que c'est le cas, et alors le choix $\sigma_{p+1} = \ldots = \sigma_m = 1$, $\sigma_1 < 0, \ldots, \sigma_p < 0$, mais très petits en valeurs absolues, est convenable.

. De même, on peut assurer (pour $y = 0$) que

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\alpha_m\sigma_m \end{pmatrix} > 0 \text{ sur } sF' \text{ en prenant } \sigma_1 = \ldots = \sigma_p = -1 .$$

$\sigma_{p+1} > 0, \ldots, \sigma_m > 0$ très petits.

. Enfin, au point (0.0), on prend $\sigma_i = \lambda_i^o$. choix convenable "des deux côtés" grâce à l'hypothèse du théorème.

Il ne reste plus qu'à "recoller" les σ_i à l'aide d'une partition de l'unité convenable, en observant que le choix fait en chaque point demeure valable dans un voisinage de ce point.

§ 5. FIN DE LA PREUVE DU THEOREME PRINCIPAL

Nous esquissons rapidement les différentes étapes :

. afin d'assurer la condition de coercivité (mentionnée au § 3) $\gamma + \gamma^* > 0$, on modifie les termes d'ordre zéro de $r_\mu L$ en le remplaçant par le système $L_\tau = e^{-\tau\varphi}(r_\mu L)e^{\tau\varphi}$, où $\tau > 0$, φ choisie comme au point α) du théorème. Cela a pour effet de remplacer γ par

$\gamma_\tau = e^{-\tau\varphi} r_\mu C e^{\tau\varphi} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(r_\mu A) + \frac{\partial}{\partial y}(r_\mu B)\right) - \tau\, r_\mu (A\varphi'_x + B\varphi'_\mu)$. Sachant que

$r_\mu(A\varphi'_x + B\varphi'_x) > 0$. tandis que la norme de $e^{-\tau\varphi} r_\mu C e^{\tau\varphi}$ dans $L^2(D)$ est bornée indépendamment de τ. on obtient la coercivité de γ_τ pour $\tau \geq \tau_o$: $\exists\, C > 0$.
$\gamma_\tau + \gamma_\tau^* \geq \tau C$.

. On déduit alors du théoreme cité en fin de § 3 l'existence d'une solution faible de L_τ vérifiant les conditions $(T_{p,q})$. Or le théoreme 3.1 de [4] nous dit que, dans le cas présent, toute solution <u>faible</u> est <u>forte</u>, c'est-à-dire limite de fonctions régulieres dans $\overline{D}$ telles que $u_n \to u$, $u_n|_{\partial D} \to \bar{u}$, $L_\tau u_n \to L_\tau u$ dans L^2. Cela permet d'obtenir une solution de $L\mathfrak{u} = \mathfrak{J}$ vérifiant $(T_{p,q})$ et l'inégailté de type Carleman

$$C\tau \|e^{-\tau\varphi}\mathfrak{u}\|_{L^2(D)} \leq \|e^{-\tau\varphi}\mathfrak{J}\|_{L^2(D)} .$$

Cela permet aussi le retour à l'opérateur P à partir du systeme L.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Agranovitch : Boundary value problems for systems of first order pseudo-differential operators. Russ. Math. Surveys 24, 1969.

[2] S. Alinhac : Le probleme de Goursat hyperbolique en dimension deux. A paraître aux Communications in P. D. E. 1975.

[3] K. O. Friedrichs : Pseudo-differential operators New York, Courant Institute of Math. Sciences.

[4] L. Sarason : On weak and strong solutions of boundary value problems. C. P. A. M. 15, 1962.