

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. TARTAR

Existence globale pour un système hyperbolique semi-linéaire de la théorie cinétique des gaz

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 1, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976___A2_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

EXISTENCE GLOBALE POUR UN SYSTEME HYPERBOLIQUE
SEMI LINEAIRE DE LA THEORIE CINETIQUE DES GAZ

par L. TARTAR

§ 1. INTRODUCTION

On considère en théorie cinétique des gaz des systèmes du type suivant :

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}_x U_i \cdot \vec{C}_i + \sum_{j,k} a_{i;j,k} U_j U_k = 0 & x \in \mathbb{R}^N \quad t \geq 0 \\ U_i(x,0) = U_{0i}(x) & i = 1, \dots, p \end{cases}$$

où les \vec{C}_i sont des vecteurs fixes distincts de \mathbb{R}^N et les $a_{i;j,k}$ des constantes réelles ($a_{i;j,k} = a_{i;k,j}$). Ce système décrit l'évolution d'un gaz dont les particules ne pourraient se propager qu'avec une des vitesses \vec{C}_i et où n'auraient lieu que des collisions binaires (les $a_{i;j,k}$ définissent la fréquence ainsi que le résultat probable de chaque collision).

$U_i(x,t)$ représente la densité au point x et au temps t des particules ayant la vitesse \vec{C}_i ; on a donc la contrainte

$$\textcircled{2} \quad U_i(x,t) \geq 0 \quad i = 1, p; \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

Dans chaque collision la quantité de mouvement et l'énergie cinétique doivent être conservées (les particules ont toutes la même masse dans ce modèle : d'autre part les particules n'ont pas de moment cinétique propre) ; ceci implique les relations suivantes

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} \sum_i a_{i;j,k} = 0 \\ \sum_i a_{i;j,k} \vec{C}_i = \vec{0} \\ \sum_i a_{i;j,k} |\vec{C}_i|^2 = 0 \end{cases} \quad j, k = 1, \dots, p$$

Les "collisions" de deux particules de même vitesse sont sans effet ; comme d'autre part, la collision d'une particule de vitesse \vec{C}_i et d'une de vitesse \vec{C}_j ne peut que faire diminuer le nombre des particules de ces deux types et augmenter celui des autres types, on a les inégalités

$$\textcircled{4} \quad \begin{cases} a_{i;j,k} \leq 0 & \text{si } i \neq j \text{ et } i \neq k \\ a_{i;i,j} \geq 0 & \text{si } i \neq j \\ a_{i;j,j} = 0 & \forall i, j \end{cases}$$

Par analogie avec l'équation de Boltzman, que les équations considérées ici sont censées approcher, on se restreint à des systèmes satisfaisant la condition suivante (liée à la notion d'entropie)

$$\textcircled{5} \quad \exists \alpha_i > 0 : \forall v_i \geq 0 \quad \sum_{i,j,k} a_{i;j,k} v_j v_k \text{Log} \frac{v_i}{\alpha_i} \geq 0$$

qui implique

$$\textcircled{6} \quad \forall i : \sum_{j,k} a_{i;j,k} \alpha_j \alpha_k = 0 \quad .$$

§ 2. EXISTENCE LOCALE ET PROPRIETES

Pour tous les systèmes $\textcircled{1}$ on peut obtenir facilement le résultat suivant :

Théorème 1 : Si $U_{oi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $i=1, \dots, p$, alors $\exists T_0 > 0$ tel que la solution existe et est unique dans $C^0([0, T_0[, (L^\infty(\mathbb{R}^N))^p)$. Si K_0 est l'enveloppe convexe de $\vec{0}, \vec{C}_1, \dots, \vec{C}_p$, alors la valeur de $U_i(x, t)$ ne dépend que des valeurs $U_{oj}(y)$ avec $y \in x + tK_0$, $j=1, \dots, p$ ■

Il suffit par exemple de considérer la méthode itérative :

$$\textcircled{7} \quad \begin{cases} \frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial t} + \vec{\text{grad}}_x U_i^{n+1} \cdot \vec{C}_i + \lambda U_i^{n+1} = \lambda U_i^n - \sum_{j,k} a_{i;j,k} U_j^n U_k^n \\ U_i^{n+1}(x, 0) = U_{oi}(x) \end{cases}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si on rajoute des conditions sur les coefficients, on obtient des propriétés supplémentaires de la solution :

Théorème 2 : Sous l'hypothèse $\textcircled{4}$, si $U_{oi} \geq 0$, $\forall i$, la solution vérifie $U_i(x, t) \geq 0$, $\forall i$. ■

Il suffit d'appliquer la méthode itérative (7) avec $\lambda > 0$ assez grand.

Théorème 3 : Sous l'hypothèse (3), si U_{oi} est à support compact $\forall i$, on a

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}^N} \sum_i U_i(x,t) dx = 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}^N} \sum_i U_i(x,t) \vec{C}_i dx = \vec{0} \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}^N} \sum_i U_i(x,t) |\vec{C}_i|^2 dx = 0 \end{array} \right.$$

Sous les hypothèses (4) et (5), si $U_{oi} \geq 0$ et est à support compact $\forall i$, on a

$$(5') \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}^N} \sum_i U_i \left(\text{Log} \frac{U_i}{\alpha_i} - 1 \right) dx \leq 0 \quad \blacksquare$$

Il suffit de multiplier les équations (1) respectivement par 1, \vec{C}_i , $|\vec{C}_i|^2$, $\text{Log} \frac{U_i}{\alpha_i} - 1$, de sommer en i et d'intégrer en x (ce calcul, justifié si les données sont régulières, s'étend si $U_{oi} \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$).

Théorème 4 : Si $U_{oi}(x+a) = U_{oi}(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^N \quad \forall i$, alors $U_i(x+a,t) = U_i(x,t) \quad \forall x \in \mathbf{R}^N, \quad \forall t \geq 0 \quad \forall i$.

Si $\forall i$ U_{oi} est indépendant de x_1 , alors $\forall i$ $U_i(x,t)$ est indépendant de x_1 . \blacksquare

Ceci résulte simplement de l'unicité de la solution. Dans le cas où les U_{oi} sont périodiques, on a l'analogie de (3') et (5') en remplaçant \mathbf{R}^N par une période.

§ 3. LE MODELE DE BROADWELL

Un système très simple (trop même!) satisfaisant (3) , (4) , (5) est le suivant :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial x} + a U_1 U_2 - b U_3 U_4 = 0 \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{\partial U_2}{\partial x} + a U_1 U_2 - b U_3 U_4 = 0 \\ \frac{\partial U_3}{\partial t} + \frac{\partial U_3}{\partial y} - a U_1 U_2 + b U_3 U_4 = 0 \\ \frac{\partial U_4}{\partial t} - \frac{\partial U_4}{\partial y} - a U_1 U_2 + b U_3 U_4 = 0 \end{array} \right.$$

avec $a, b > 0$.

(5) est vérifié si $a\alpha_1\alpha_2 = b\alpha_3\alpha_4$ car la quantité (5) s'écrit alors

$$(aU_1U_2 - bU_3U_4) \text{Log} \frac{aU_1U_2}{bU_3U_4} \geq 0$$

Ce système donnerait les densités de particules pour un gaz formé de 4 types de particules, se déplaçant avec les vitesses ± 1 parallèlement aux axes.

L'analogie dans R^3 de ce modèle serait

$$\textcircled{7} \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial x} + (a+b)U_1U_2 - cU_3U_4 - eU_5U_6 = 0 \\
 \frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{\partial U_2}{\partial x} + (a+b)U_1U_2 - cU_3U_4 - eU_5U_6 = 0 \\
 \frac{\partial U_3}{\partial t} + \frac{\partial U_3}{\partial y} - aU_1U_2 + (c+d)U_3U_4 - fU_5U_6 = 0 \\
 \frac{\partial U_4}{\partial t} - \frac{\partial U_4}{\partial y} - aU_1U_2 + (c+d)U_3U_4 - fU_5U_6 = 0 \\
 \frac{\partial U_5}{\partial t} + \frac{\partial U_5}{\partial z} - bU_1U_2 - dU_3U_4 + (e+f)U_5U_6 = 0 \\
 \frac{\partial U_6}{\partial t} - \frac{\partial U_6}{\partial z} - bU_1U_2 - dU_3U_4 + (e+f)U_5U_6 = 0
 \end{array} \right.$$

avec $a, b, c, d, e, f > 0$.

$$\textcircled{5} \text{ est vérifié si } (a+b)\alpha_1\alpha_2 - c\alpha_3\alpha_4 - e\alpha_5\alpha_6 = 0 \text{ et } \\
 -a\alpha_1\alpha_2 - (c+d)\alpha_3\alpha_4 - f\alpha_5\alpha_6 = 0.$$

Bien que $\textcircled{6}$ soit extrêmement simple, aucun théorème d'existence globale n'est connu pour ce système.

En utilisant le théorème 4, nous allons considérer le cas où les données initiales ne dépendent que de x et donc considérer le système simplifié.

$$\textcircled{6'} \quad \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{\partial U_2}{\partial x} = -\frac{\partial U_3}{\partial t} = -\frac{\partial U_4}{\partial t} = -f \\
 f = aU_1U_2 - bU_3U_4$$

Naturellement ce qui suit se généralise au système $\textcircled{7}$ avec données indépendantes de y et z .

§ 4. EXISTENCE GLOBALE POUR DES DONNEES "PETITES"

Le premier résultat non trivial d'existence globale a été obtenu par Nishida-Mimura [1].

Théorème 5 : $\forall k > 1 \quad \exists \varepsilon_0 > 0$ tel que si

$$\textcircled{8} \quad \sum_i \int_{\mathbf{R}} U_{oi}(x) dx \leq \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad 0 \leq U_{oi}(x) \leq M_0 \quad \forall i; \forall x \in \mathbf{R}$$

alors la solution de $\textcircled{6}'$ existe globalement et vérifie $0 \leq U_i(x,t) \leq kM_0$
 $\forall i; \forall x \in \mathbf{R} \quad \forall t \geq 0$.

Démonstration : Nous connaissons l'existence de la solution dans un intervalle $0 < t \leq T$, il suffit de montrer que $0 \leq U_i(x,t) \leq kM_0$ pour $x \in \mathbf{R}, 0 < t \leq T$ pour avoir l'existence globale.

$$\text{Posons } M = \sup_{i, x, t \in [0, T]} U_i(x, t).$$

$$\begin{aligned} \text{D'après } \textcircled{6}' \quad \text{on a } U_1(x, t) &= U_{o1}(x-t) - \int_0^t f(x-s, t-s) ds \\ &\leq M_0 + b \int_0^t U_3 U_4(x-s, t-s) ds \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \textcircled{9}_1 \quad U_1(x, t) \leq M_0 + bM \int_0^t U_3(x-s, t-s) ds$$

De même, on aura les majorations

$$\textcircled{9}_2 \quad U_2(x, t) \leq M_0 + bM \int_0^t U_4(x+s, t-s) ds$$

$$\textcircled{9}_3 \quad U_3(x, t) \leq M_0 + aM \int_0^t U_1(x, s) ds$$

$$\textcircled{9}_4 \quad U_4(x, t) \leq M_0 + aM \int_0^t U_2(x, s) ds$$

En intégrant l'identité $\frac{\partial}{\partial t} (U_1 + U_3) + \frac{\partial U_1}{\partial x} = 0$ sur le triangle

$\{(s, y) \mid 0 \leq s \leq t; x-t+s \leq y \leq x\}$ on obtient l'identité

$$\textcircled{10} \quad \int_0^t U_3(x-s, t-s) ds + \int_0^t U_1(x, s) ds = \int_{x-t}^x (U_{o1} + U_{o3})(y) dy$$

Donc (9)₁ et (10) impliquent $U_1(x,t) \leq M_0 + b M \epsilon_0$

(9)₃ et (10) impliquent $U_3(x,t) \leq M_0 + a M \epsilon_0$

En intégrant l'identité $\frac{\partial}{\partial t} (U_2 + U_4) - \frac{\partial U_2}{\partial x} = 0$ sur le triangle

$\{(s,y) \mid 0 \leq s \leq t ; x \leq y \leq x+t-s\}$ on obtient l'identité

$$(10) \quad \int_0^t U_4(x+s, t-s) ds + \int_0^t U_2(x, s) ds = \int_x^{x+t} (U_{02} + U_{04})(y) dy$$

(9)₂ et (10) impliquent $U_2(x,t) \leq M_0 + b M \epsilon_0$

(9)₄ et (10) impliquent $U_4(x,t) \leq M_0 + a M \epsilon_0$.

On a donc finalement

$$M = \sup_{i,x,t} U_i(x,t) \leq M_0 + \max(a,b) M \epsilon_0$$

et donc en prenant (11) $\epsilon_0 \leq \frac{k-1}{k \max(a,b)}$ on a

$$M \leq \frac{M_0}{1 - \epsilon_0 \max(a,b)} \leq k M_0 \quad . \quad \blacksquare$$

Corollaire 1 : Si $0 \leq U_{oi}(x) \leq M_0$, $\forall i ; x \in \mathbb{R}$ et si

$$(12) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_i \int_{x-T}^{x+T} U_{oi}(y) dy \leq \epsilon < \frac{1}{\max(a,b)}$$

alors la solution existe pour $0 \leq t \leq T$ et vérifie

$$0 \leq U_i(x,t) \leq \frac{M_0}{1 - \epsilon \max(a,b)} \cdot \forall i ; x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$$

Démonstration : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\tilde{U}_{oi}(y) = \begin{cases} U_{oi}(y) & \text{si } |x_0 - y| \leq T \\ 0 & \text{si } |x_0 - y| > T \end{cases}$

alors pour $k = \frac{1}{1 - \epsilon \max(a,b)}$, ϵ satisfait (11) et \tilde{U}_{oi} vérifie (8).

Donc la solution de (6') avec données initiales \tilde{U}_{oi} vérifie

$$0 \leq \tilde{U}_i(x, t) \leq \frac{M_0}{1 - \varepsilon \max(a, b)} \quad \forall i, x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

mais d'après le théorème 1, $U_i(x, t) = \tilde{U}_i(x, t)$ si $|x - x_0| + t \leq T$; ce qui donne l'estimation voulue. ■

Remarque 1 : On peut naturellement adapter cette démonstration à de nombreux systèmes.

L'inconvénient majeur de ce résultat (ainsi que celui du paragraphe suivant) est d'être relatif à un problème en 1 dimension. ■

§ 5. EXISTENCE GLOBALE POUR DES DONNEES " GRANDES "

Le second résultat (M. Crandall, L. Tartar [2]) résulte du corollaire et d'une utilisation adéquate de l'entropie.

Théorème 6 : Si les données initiales sont périodiques de période p et vérifient $0 \leq U_{oi}(x) \leq M_0$ alors la solution existe globalement et vérifie

$$(13) \quad \forall k > 1 \exists \lambda_k \geq 0 : 0 \leq U_i(x, t) \leq kM_0 e^{\lambda_k t} \quad \forall i; x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

Démonstration : Soit $\alpha_i > 0$ vérifiant $a\alpha_1\alpha_2 = b\alpha_3\alpha_4$, alors on a

$$\frac{d}{dt} \sum_i \int_0^p U_i \text{Log} \frac{U_i}{\alpha_i} dx \leq 0. \text{ Donc, pendant l'intervalle d'existence, on a :}$$

$$\sum_i \int_0^p U_i(x, t) \text{Log} \frac{U_i(x, t)}{\alpha_i} dx \leq I_0 = \sum_i \int_0^p U_{oi} \text{Log} \frac{U_{oi}}{\alpha_i} dx$$

et donc

$$\sum_i \int_0^p U_i(x, t) \left(\text{Log} \frac{U_i(x, t)}{\alpha_i} \right)_+ dx \leq I_0 + \frac{\sum \alpha_i}{e} p$$

On peut majorer $\int_{x-T}^{x+T} U_i(y, t) dy$ en décomposant l'intégrale en deux :

là où $0 \leq U_i \leq \alpha_i e^m$, on a une contribution $\leq 2\alpha_i e^m T$ et là où $U_i \geq \alpha_i e^m$, on a une contribution $\leq \frac{1}{m} \int_0^p U_i \left(\text{Log} \frac{U_i}{\alpha_i} \right)_+ dy$ (en supposant $2T \leq p$ et $m \geq 0$).

Donc en posant $A = \sum_i \alpha_i$, on a

$$(14) \begin{cases} \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_i \int_{x-T}^{x+T} U_i(y, t) dy \leq 2Ae^{mT} + \frac{1}{m} \left(I_0 + \frac{Ap}{e} \right) \\ \Psi_m \geq 0, \quad T \leq \frac{p}{2} \end{cases}$$

Ceci a lieu tant que $t < T_{\max}$ temps d'existence.

$\forall k > 1$ si $\varepsilon = \frac{k-1}{k \max(a, b)}$, on peut choisir T_k tel que

$$\inf_{m \geq 0} 2Ae^{mT_k} + \frac{1}{m} \left(I_0 + \frac{Ap}{e} \right) \leq \varepsilon .$$

Alors on peut appliquer le corollaire 1 avec comme données initiales $U_i(x, t_0)$ pour déduire que

$$0 \leq U_i(x, t) \leq k \sup_{i, x} U_i(x, t_0) \quad \text{si } t_0 \leq t \leq t_0 + T_k$$

Alors $\lambda_k = \frac{\text{Log } k}{T_k}$ donne (13) . ■

Corollaire 2 : Si les données initiales vérifient $0 \leq U_{oi}(x) \leq M_0$ alors la solution existe globalement et vérifie une inégalité du type :

$$0 \leq U_i(x, t) \leq \varphi(t, M_0).$$

Démonstration : Pour majorer $U_i(x_0, t_0)$ on considère le problème avec données initiales $\tilde{U}_{oi}(x) = U_{oi}(x)$ si $|x - x_0| \leq t_0$ prolongées par périodicité : $p = 2t_0$. Alors $U_i(x_0, t_0) = \tilde{U}_i(x_0, t_0)$ et on peut appliquer le théorème (6) à \tilde{U}_i .

I_0 peut se majorer par une fonction de M_0 et t_0 et donc on peut majorer $\tilde{U}_i(x_0, t_0)$ par une fonction (qu'on peut expliciter si l'on veut) de M et t_0 . ■

Remarque 2 : On peut obtenir des résultats d'existence avec données initiales dans $L^q(\mathbb{R})$ avec q assez grand. ■

Remarque 3 : Pour tout système de type (1) - (5) l'existence de l'entropie ramène le problème de l'existence globale à la recherche d'une majoration du type :

" $\exists \varepsilon > 0, T > 0 : \sum_i \int U_{oi}(x) dx \leq \varepsilon \Rightarrow$ la solution existe pour $0 \leq t \leq T$ " ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Nishida-Mimura : Global solutions to the Broadwell's model of Boltzmann equation for a simple discrete velocity gas, à paraître, Proc. Intern. Symp. on Math. Prob. in Theor. Phys. at RIMS, Kyoto Univ., Janvier 1975.
- [2] Crandall-Tartar : à paraître.
-