Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

P. Pallu de La Barrière
P. Schapira

Application de la théorie des microfonctions holomorphes au problème de Cauchy à données singulières

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 23, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A24_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1975-1976

APPLICATION DE LA THEORIE DES MICROFONCTIONS HOLOMORPHES AU PROBLEME DE CAUCHY A DONNEES SINGULIERES

par P. PALLU DE LA BARRIERE
et
P. SCHAPIRA

Exposé n° XXIII

11 Mai 1976

INTRODUCTION

Depuis l'article fondamental de Y. Hamada [1] l'étude du problème de Cauchy dont les données sont des fonctions holomorphes singulières sur une hypersurface a donné lieu à plusieurs publications. Citons seulement la thèse de C. Wagschal [6] et l'article récent de Y. Hamada, J. Leray, C. Wagschal [3] auquel nous renvoyons pour une bibliographie complète (cf. aussi [4]).

Il y a déjà plusieurs années que M. Sato a expliqué au second d'entre nous que l'on pouvait démontrer facilement le théorème de Hamada, pour des données présentant des singularités essentielles ou logarithmiques à l'aide des outils élaborés dans [S.K.K.] (faisceaux $\mathcal{C}_{Y|X}$, opérateurs pseudo-différentiels, transformations canoniques complexes), sous la seule hypothèse que l'opérateur P était de "multiplicité constante".

C'est ce que nous faisons ici, où nous montrons en même temps que l'utilisation des faisceaux $\mathcal{C}^{\mathbf{R}}_{Y|X}$ permet d'obtenir le théorème dans différentes classes de fonctions holomorphes ramifiées autour des hypersurfaces caractéristiques, et que l'utilisation des opérateurs pseudo-différentiels donne immédiatement un théorème de "réflexion des singularités" analogue (dans le domaine complexe) au théorème de Lax et Nirenberg (cf. [5]).

§ 1. NOTATIONS, RAPPELS, PRELIMINAIRES

- Faisceaux $\mathcal{C}^{\mathbf{R}}_{K|X}$: Nous désignerons par X une variété analytique complexe, T^*X son fibré cotangent, $P^*X = (T^*X\setminus X)/\mathbb{C}^*$ son fibré projectif cotangent. Il nous arrivera souvent d'identifier un point de $T^*X - X$ et son image dans P^*X. Nous désignerons par $\mathcal{O}_X$ (ou $\mathcal{O}$) le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X et par $\mathcal{P}$ le faisceau des opérateurs pseudo-différentiels sur P^*X (cf. [S.K.K.]).

Soit K une hypersurface analytique complexe de X, $S^*_K X$ le fibré en sphères conormal à K dans X. Rappelons [S.K.K. chapitre 2] la construction du faisceau $\mathcal{C}^{\mathbf{R}}_{K|X}$ sur $S^*_K X$.

$$\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X} \quad \mathcal{H}^1_{S^*_K X}(\pi^{-1}_{K|X}\mathcal{O}_X)^a$$

où $\pi_{K|X}$ désigne la projection

$$X - K \cup S^*_K X \to X$$

le premier espace étant muni de la topologie dite de "co-éclaté" ([S.K.K. chapitre 1]) et a désigne l'application antipodale. Nous décrirons bientôt les sections de ce faisceau. Rappelons d'abord ses principales propriétés.

Soit Y une hypersurface complexe de X transverse à K et $Z = K \cap Y$. Désignons par ρ la projection canonique :

$$S^*_K X \underset{X}{\times} Y \to S^*_Z Y$$

on peut alors définir naturellement un morphisme de <u>restriction</u> :

$$\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X}|S^*_K X \underset{X}{\times} Y \to \rho^{-1}\, \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Z|Y}$$

autrement dit si $x^* \in S^*_K X \underset{X}{\times} Y$ si $y^* = \rho(x^*) \in S^*_Z Y$, et si f appartient à $(\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})_{x^*}$ on définit la restriction de f à Y, $\gamma_o(f) \in (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Z|Y})_{y^*}$.

- Soit j la surjection canonique de $S^*_K X$ sur $P^*_K X \subset P^* X$. Le faisceau $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X}$ est un $j^{-1}(\mathcal{P}|P^*_K X)$-module. Cela signifie, entre autre, que si $x^* \in P^*_K X$ et si P est un opérateur pseudo-différentiel défini au voisinage de $j(x^*)$, P opère sur $(\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})_{x^*}$.

- Soit X et $\tilde{X}$ deux variétés analytiques complexes de même dimension, K et $\tilde{K}$ deux hypersurfaces complexes de X et de $\tilde{X}$, Φ une transformation canonique holomorphe homogène définie au voisinage de $x^* \in S^*_K X$, telle que $\Phi(T^*_K X) = T^*_{\tilde{K}}\tilde{X}$.

Alors une fois quantifiée, Φ définit un isomorphisme $\hat{\Phi}$:

(1.1) $\quad \hat{\Phi} : \mathcal{P}_{j(x^*)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{j(\Phi(x^*))}$

(1.2) $\quad \hat{\Phi} : (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})_{x^*} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{\tilde{K}|\tilde{X}})_{\Phi(x^*)}$ tel que $\forall P \in \mathcal{P}_{j(x^*)}$, $\forall f \in (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})_{x^*}$

(1.3) $\hat{\Phi}(Pf) = \hat{\Phi}(P)\hat{\Phi}(f)$

En fait l'isomorphisme (1.2) n'est pas explicitement démontré dans [S.K.K.]. Il faut adapter la démonstration du théorème 1.3.1 du chapitre 3, la situation étant analogue.

-Faisceaux $\mathcal{O}^p_{K|X}$: Pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ nous allons définir différents faisceaux sur K de fonctions holomorphes ramifiées autour de K.
Pour ne pas alourdir l'exposé plaçons-nous dans la situation où X est un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$ muni des coordonnées $(x_o,\dots,x_n)$ et K désigne l'intersection de X et de l'hyperplan d'équation $\{x_n = 0\}$, et laissons au lecteur le soin de vérifier le caractère intrinsèque de nos définitions.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Nous appellerons fonctions holomorphes dans le secteur $\mathbb{C}^n \times I$ la donnée, pour tout intervalle ouvert $J \subset I$ de longueur $< 2\pi$ d'une fonction f_J holomorphe dans $\mathbb{C}^n \times \Gamma_J$, où Γ_J désigne l'image de $J \times i\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par l'application $x_n \to \exp(ix_n)$, telles que si $J \cap J' \neq \Phi$, $f_J = f_{J'}$ sur $\Gamma_J \cap \Gamma_{J'}$.

On désigne alors par $\mathcal{O}^\infty_{K|X}$ l'espace des fonctions f telles que pour tout intervalle borné I de R, il existe V_I voisinage de K dans X, tel que f soit holomorphe dans le secteur $(\mathbb{C}^n \times I) \cap V_I$, et on définit ainsi un faisceau sur K.

Intuitivement, $\mathcal{O}^\infty_{K|X}$ désigne l'espace des fonctions holomorphes sur le revêtement universel de X-K dont le domaine d'existence tend vers K quand le nombre de tours que l'on fait autour de K augmente.

Nous désignerons par $\mathcal{O}^p_{K|X}$ $(p \in \mathbb{N})$, le sous-faisceau de $\mathcal{O}^\infty_{K|X}$ des fonctions f telles que la différence entre f et la fonction obtenue à partir de f en tournant p fois autour de K, soit holomorphe au voisinage de K. Il est facile de voir que si $\{k(x) = 0\}$ est une équation réduite de K et si l'on choisit une détermination de Log k on a :

$$\mathcal{O}^p_{K|X} = \mathcal{O}_{X-K} + \mathcal{O}_{X-K} k^{1/p} + \dots + \mathcal{O}_{X-K}\, k^{p-1/p} + \mathcal{O}_X \operatorname{Log} k$$

où $\mathcal{O}_{X-K}$ désigne le faisceau sur K des fonctions holomorphes sur X-K au voisinage de K. Si k est premier $\mathcal{O}^p_{K|X}$ est somme directe des faisceaux ci-dessus.

<u>Relations entre $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X}$ et $\mathcal{C}^{p}_{K|X}$</u> : Plaçons nous à nouveau dans la situation où X est un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$, K étant défini par l'équation $\{x_n = 0\}$. On pose :

$$S^p = [0,2\pi p] \text{ avec } \{0\} \text{ identifié à } \{2\pi p\}$$

$$S^\infty = \mathbb{R}$$

$$\sigma_p : S^p \to S^1,\ \theta \to \theta \bmod (2\pi).$$

On peut identifier $S^*_K X$ à $K \times S^1$. Le faisceau $\sigma_p^{-1}\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X}$ sur $K \times S^p$ a les mêmes germes que le faisceau $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X}$. Plus exactement si $(x,\theta) \in K \times S^p$:

$$(\sigma_p^{-1}\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})_{(x,\theta)} = (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})_{(x,\sigma_p(\theta))}$$

Désignons par γ la projection de $S^*_K X$ sur K. Alors $\gamma_* \sigma_{p*}(\sigma_p^{-1}\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})$ désigne l'ensemble des sections du faisceau $\sigma_p^{-1}\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X}$ sur S^p : c'est un faisceau sur K.

<u>Lemme 1.1</u> : $\gamma_* \sigma_{p*}(\sigma_p^{-1}\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X}) = \mathcal{O}^{p}_{K|X}/\mathcal{O}$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de remarquer qu'une section globale de $\sigma_p^{-1}\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X}$ est définie par :

- un recouvrement de S^p par des intervalles ouverts I_λ de longueur $< \pi$
- les fonctions f_ℓ holomorphes dans $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \setminus \Gamma_\ell) \cap V_\ell$, où V_ℓ est un voisinage de K dans X et Γ_ℓ désigne le cône convexe fermé de $\mathbb{C}$ polaire de I_ℓ, telles que si $I_\ell \cap I_{\ell'} \neq \emptyset$, $f_\ell - f_{\ell'}$ se prolonge en fonction holomorphe au voisinage de K.

§ 2. <u>ENONCE DES RESULTATS</u>

Soit X une variété analytique complexe, Y une hypersurface analytique complexe de X, Z une hypersurface analytique complexe de Y, P un opérateur différentiel holomorphe sur X, d'ordre m. On désigne par ρ la projection

$$\rho : P^*X \underset{X}{\times} Y \setminus P^*_Y X \to P^*Y$$

On fera les hypothèses suivantes.

H1. L'hypersurface Y est non caractéristique pour P.

H2. Au voisinage de $\rho^{-1}(P^*_Z Y)$, Car(P), la variété caractéristique de P est une variété régulière de P^*X, et Car(P) $\cap$ $(P^*X \underset{X}{\times} Y)$ est une sous-variété symplectique de P^*X muni de sa structure de contact.

Sous ces hypothèses, on sait (cf. [6]) qu'il existe au voisinage de Y, d hypersurfaces complexes, $K_1,\dots,K_d$ caractéristiques pour P, passant par Z, et transverse entre elles et à Y. Indiquons comment les construire.

Soit $F_1,\dots,F_d$ les composantes connexes de $\rho^{-1}(P^*_Z Y) \cap$ Car(P). Chaque hypersurface K_j $(j = 1\dots d)$ est la projection sur X de la variété lagrangienne réunion des bicaractéristiques de Car(P) issues de F_j.

On notera m_j $(j = 1,\dots,d)$ l'ordre d'annulation du symbole principal de P sur Car(P) au voisinage de $P^*_{K_j}(X)$.

Si on se place en coordonnées (ce qui signifiera dans toute la suite que X est un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$, l'espace T^*X est muni des coordonnées $(x_o,\dots,x_n;\xi_o,\dots,\xi_n)$, $Y = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} | x_o = 0\} \cap X$ et $Z = Y \cap \{x_n = 0\}$) l'hypothèse H2 est équivalente à la suivante :

- soit $y \in Z$, $y^* = (y;0,\dots,1) \in P^*_Z Y$ le point correspondant, et $\tau_1,\dots,\tau_d$ les racines de l'équation $P_m(y;\tau,0,\dots,0,1) = 0$, où P_m désigne le symbole principal de P (la multiplicité de τ_k est égale à m_k). Alors si $q_k(x^*) = 0$ est une équation réduite de la variété Car(P) au voisinage du point $x^*_k = (y;\tau_k,0,\dots,0,1)$ on a

$$\frac{\partial q_k}{\partial \xi_o}(x^*_k) \neq 0 \quad .$$

Si $f \in \mathcal{O}(X)$ on désignera par $\gamma_o(f)$ la restriction de f à Y. On supposera donné au voisinage de Y un champ de vecteurs holomorphes dont la restriction à Y est normale à Y. On définit alors $\gamma_k(f)$ comme la restriction à Y de la dérivée k-ième de f le long de ce champ de vecteurs. Quand on travaillera en coordonnées, on prendra $\frac{\partial}{\partial x_o}$ comme champ de vecteurs.

Théorème 1 : Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Pour tout $g \in \bigoplus_{i=1}^{d} \mathcal{O}^p_{K_i}|_X$ et tout $(h) \in (\mathcal{O}^p_{Z|Y})^m$ il existe un unique $f \in \oplus \mathcal{O}^p_{K_i}|_X$ défini au voisinage de Y, solution du problème de Cauchy

$$Pf = g, \quad \gamma_k(f) = h_k \quad (k = 0,\dots,m-1)$$

Pour $p = 1$, on retrouve le "théorème de Hamada" [2]. Pour $p = \infty$, ce théorème est à rapprocher de [3].

Théorème 2 : Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et soit $r \leq d$. Soit $f \in \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}^p_{K_i}|_X$, et supposons que :

$$Pf \in \mathcal{O}_X, \quad \gamma_k(f) \in \mathcal{O}_Y \quad \text{pour } k = 0,\dots,m_1 + \dots + m_r.$$

Alors $f \in \mathcal{O}_X$.

Ce théorème est l'analogue complexe du théorème de réflexion de Lax et Nirenberg (cf. [5]).

§ 3. THEOREME DE CAUCHY-KOWALEVSKI DANS $\mathcal{O}^{\mathbb{R}}_{K|X}$

- On travaille en coordonnées.
- Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m " de type Weierstrass" défini au voisinage de $\rho^{-1}(P^*_Z Y)$, c'est à dire s'écrivant :

$$P = D_o^m + A_1(x,D')D_o^{m-1} + \dots + A_m(x,D')$$

les $A_j(x,D')$ étant d'ordre $\leq j$ et ne dépendant pas de D_o (c'est à dire commutant avec x_o). On suppose que :

- l'équation $P_m(0;1,0,\dots,0,\tau) = 0$ a une seule racine τ_o (de multiplicité m) et si $q(x,\xi)$ est une équation réduite de la variété caractéristique de P au voisinage $(0;1.0,\dots,0,\tau_o)$ alors :

$$\frac{\partial q}{\partial \xi_o}(0;1,0,\dots,0,\tau_o) \neq 0 .$$

Sous ces hypothèses, il existe une et une seule hypersurface K caractéristique pour P passant par Z.

Soit $x^* \in S^*_K X$ et $y^* \in S^*_Z Y$ son image par l'application ρ.

Lemme 3.1 : Dans la situation précédente :

$$\forall\, g \in (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})_{x^*}\ ,\ \forall\, (h) \in (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Z|Y})^m_{y^*}$$

il existe un unique $f \in (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})_{x^*}$ solution du problème de Cauchy

(3.1) $$Pf = g,\quad \gamma_k(f) = h_k,\ (k = 0,\dots,m-1)$$

Démonstration : On peut se ramener de manière standard à des données de Cauchy nulles et écrire le problème (3.1) sous la forme :

(3.2) $$\begin{cases} \forall\, g \in (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})_{x^*} \quad , \quad \exists !\ f \in (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})_{x^*} \\ \text{avec}\quad Pf = g \quad \text{et} \quad \exists\, h \in (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})_{x^*} \quad \text{tel que } f = x_0^m h \end{cases}$$

D'après l'hypothèse H2, $Car(P) \cap (P^*X \times_X Y)$ est symplectique. On peut donc faire une transformation canonique holomorphe homogène dans T^*X au voisinage de x^*, qui transforme $Y \times_X P^*X$ et $Car(P)$ en les variétés d'équations :

(3.3) $$Y \times_X P^*X \longleftrightarrow \{(\tilde{x},\tilde{\xi}) \in P^*\tilde{X} \mid \tilde{x}_0 = 0\}$$

(3.4) $$Car(P) \longleftrightarrow \{(\tilde{x},\tilde{\xi}) \in P^*\tilde{X} \mid \tilde{\xi}_0 = 0\}$$

De plus $L = \rho^{-1}(P^*_Z Y) \cap Car(P)$ étant une variété lagrangienne de la variété symplectique $(P^*X \times_X Y) \cap Car(P)$ on peut effectuer une nouvelle transformation canonique, indépendante de $\tilde{x}_0$ et de $\tilde{\xi}_0$ telle que L soit transformée en la variété

(3.5) $$L \longleftrightarrow \{(\tilde{x},\tilde{\xi}) \in P^*\tilde{X} \mid \tilde{x}_0 = \tilde{x}_n = \tilde{\xi}_0 = \dots = \tilde{\xi}_{n-1} = 0\}$$

Comme $P^*_K X$ était la réunion des bicaractéristiques de $Car(P)$ issues de L,

$P_K^* X$ sera transformé en la variété

(3.6) $$P_K^*X \longleftrightarrow \{(\tilde{x},\tilde{\xi}) \in P^*\tilde{X} \mid \tilde{x}_n = \tilde{\xi}_o = \dots = \tilde{\xi}_{n-1} = 0\}$$

autrement dit en le fibré conormal à l'hypersurface d'équation $\{\tilde{x}_n = 0\}$.

Notons $\phi : T^*X \longleftrightarrow T^*\tilde{X}$ la transformation canonique que l'on a effectuée. Elle est définie par des relations :

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_j - q_j(x,\xi) = 0 & j = 0,\dots,n \\ \tilde{x}_j - r_j(x,\xi) = 0 & j = 1,\dots,n \\ \tilde{x}_o = x_o \end{cases}$$

qui définissent une variété lagrangienne Λ de $T^*(X \times \tilde{X})$. Pour la quantifier (i.e. : pour qu'elle opère sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}^{\mathbf{R}}_{K|X}$) il suffit de choisir une section non dégénérée d'un système holonome porté par Λ ([S.K.K.], Ch.2, théorème 4.3.1). Il est facile de voir qu'il existe des opérateurs pseudo-différentiels $Q_j(x,\tilde{x},D_x,D_{\tilde{x}})$, $j = 0,\dots,n$ et $R_j(x,\tilde{x},D_x,D_{\tilde{x}})$, $j = 1,\dots,n$, dont les symboles principaux sont $q_j(x,\xi)$ et $r_j(x,\xi)$ et tels que si $\mathfrak{J}$ désigne l'idéal à gauche de $\mathcal{P}_{X\times\tilde{X}}$ engendré par :

$$\begin{cases} D_{\tilde{x}_j} - Q_j(x,\tilde{x},D_x,D_{\tilde{x}}) & j = 0,\dots,n \\ \tilde{x}_j - R_j(x,\tilde{x},D_x,D_{\tilde{x}}) & j = 1,\dots,n \\ \tilde{x}_o - x_o \end{cases}$$

le système $\mathcal{M}_\Lambda = \mathcal{P}_{X\times\tilde{X}}/\mathfrak{J}$ soit un système holonome porté par Λ. Choisissant la classe de $1_{X\times\tilde{X}}$ comme section de $\mathcal{M}_\Lambda$, il est aisé de montrer, en suivant la construction de [S.K.K. Ch.2 démonstration du théorème 3.3.3], que <u>l'opérateur</u> x_o <u>est transformé en l'opérateur</u> $\tilde{x}_o$.

En écrivant (x,ξ) pour $(\tilde{x},\tilde{\xi})$, on a ramené le problème (3.2) au cas où $\mathrm{Car}(P) = \{(x,\xi) \in P^*X \mid \xi_o = 0\}$, ce qui permet, après avoir divisé à gauche P par un opérateur elliptique afin qu'il soit de type Weierstrass de supposer que :

$$P(x,D_x) = D_0^m + A_1(x,D')D_0^{m-1} + \ldots + A_m(x,D')$$

où $\underline{\text{ord }(A_j) < j}$.

Avec les notations matricielles :

$$\vec{D}_0 = \begin{pmatrix} D_0 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & D_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{M}(x,D') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \ddots & \\ \bigcirc & & 0 & 1 \\ A_m(x,D') & , \ldots, & & A_1(x,D') \end{pmatrix}$$

on se pose le problème

$$(3.7) \quad \begin{cases} \forall\, G \in (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})^m_{x^*}, \quad \exists!\, F \in (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})^m_{x^*} \\ \text{tel que } (\vec{D}_0 - \vec{M}(x,D))F = G \text{ et } \exists H \in (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})^m_{x^*} \\ \text{avec } F = x_0 H. \end{cases}$$

Une solution unique $F = (f_1,\ldots,f_m)$ du problème (3.7) avec $G = (0,\ldots,0,g)$ donne une solution unique au problème (3.2) en posant $f = f_1$.

D'après le théorème 5.2.1 du chapitre II de [S.K.K.], il existe une matrice inversible d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre infini $\vec{A}(x,D')$ définie au voisinage de x^* telle que

$$(\vec{D}_0 - \vec{M}(x,D'))\vec{A}(x,D') = \vec{A}(x,D')\vec{D}_0 .$$

Le problème de Cauchy

$$(3.8) \quad \vec{D}_0 F' = G', \quad \exists H' \text{ avec } F' = x_0 H'$$

admet de manière évidente une solution unique $F' \in (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})^m_{x^*}$ pour toute donnée $G' \in (\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X})^m_{x^*}$. On obtient alors la solution unique du problème (3.7) en posant

$$G' = \vec{A}^{-1}G \quad , \quad F = \vec{A}F'$$

et en remarquant que $[\vec{A}, x_0] = 0$. ∎

§ 4. DEMONSTRATION DES THEOREMES

Si K est une hypersurface complexe de X, on a un isomorphisme $P^*_K X \simeq K$. Les faisceaux $\mathcal{C}^p_{K|X}/\mathcal{O}$ peuvent alors être considérés comme des faisceaux sur P^*X à support dans $P^*_K X$, et il résulte du lemme 1.1 que ce sont alors des $\mathcal{P}_X$-modules.

Lemme 4.1 : Sous les hypothèses du lemme 3.1 et pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ on a : $\forall g \in \mathcal{C}^p_{K|X}/\mathcal{O}$, $\forall (h) \in [\mathcal{O}^p_{Z|Y}/\mathcal{O}_Y]^m$, il existe une unique $f \in \mathcal{C}^p_{K|X}/\mathcal{O}$ définie au voisinage de Y solution du problème de Cauchy :

$$(4.1) \qquad Pf = g \ , \quad \gamma_k(f) = h_k \quad (k = 0,\dots,m-1)$$

Démonstration : Il suffit de démontrer le lemme localement : on peut donc se placer en coordonnées. Considérons alors le morphisme de faisceaux sur $(K \times S^1) \cap Y = Z \cap S^1$:

$$\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X}|_{S^*_K X \underset{X}{\times} Y} \to \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{K|X}|_{S^*_K X \underset{X}{\times} Y} \times (\rho^{-1}\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Z|Y})^m$$

$$f \longmapsto (Pf \ , \ \gamma(f))$$

où $\gamma(f) = (\gamma_o(f),\dots,\gamma_{m-1}(f))$.

D'après le lemme 3.1, c'est un isomorphisme. Le lemme 4.1 résulte alors du lemme 1.1. ∎

Comme dans [S.K.K] (démonstration du lemme 3.5.2. Ch.3), nous allons décomposer P en produit d'opérateurs pseudo-différentiels vérifiant les hypothèses du lemme 3.1 et nous "recollerons" ensuite les solutions (le même raisonnement a déjà été fait dans [5]).

Il suffit de démontrer les théorèmes au voisinage de chaque point de Z. On se placera donc en coordonnées. Soit $y \in Z$; l'hypersurface Y étant non-caractéristique pour P, on peut supposer que P est de type Weierstrass au voisinage de y. Soit $y^* \in P^*_Z Y$ le point associé à y et soit $x^*_j \in P^*_{K_j} X$, $j = 1,\dots,d$ les éléments de $\rho^{-1}(y^*) \cap \mathrm{Car}(P)$.

Lemme 4.2 : Il existe des opérateurs pseudo-différentiels de type Weierstrass $P_1,\dots,P_d$, $S_1,\dots,S_d$ définis au voisinage de $\rho^{-1}(y^*)$ tels que :

. $P = S_1 \dots S_d = P_d \dots P_1$

. P_j et S_j sont d'ordre m_j,

. P_j et S_j sont elliptiques au voisinage de x_k^*, $\forall k \neq j$ et leurs symboles principaux s'annulent à l'ordre m_j sur x_j^*.

Démonstration : Suivant les notations du paragraphe 2, le symbole principal de P s'annule à l'ordre m_1 au point x_1^*. D'après le théorème de division de Weierstrass ([S.K.K.] théorème 2.2.2 Ch.II), il existe des opérateurs pseudo-différentiels P_1 et P' définis au voisinage de x_1^* et tels que :

. P' est elliptique au voisinage de x_1^*

. P_1 est de type Weierstrass d'ordre m_1 et son symbole principal s'annule à l'ordre m_1 en x_1^*.

. $P = P'P_1$ au voisinage de x_1^*.

De plus, P et P_1 étant de type Weierstrass, P' l'est aussi donc P_1 et P' sont définis au voisinage de $\rho^{-1}(y^*)$ et le symbole principal de P' s'annule à l'ordre m_k au point x_k^*, $\forall k \neq 1$. On obtient les décompositions cherchés en appliquant ce procédé au voisinage de chaque point x_k^*. ∎

- Démonstration du théorème 1 : Remarquons que P_j et S_j, $j = 1,\dots,d$ satisfont aux hypothèses du lemme 3.1. Nous allons démontrer le théorème 1 par récurrence sur d, le cas $d = 1$ étant traité par le lemme 4.1. Posons $P' = P_d \dots P_2$, $S' = S_2 \dots S_d$ et $\mathcal{O}^p_{K'}|X/\mathcal{O} = \bigoplus_{i=2}^{d} \mathcal{O}^p_{K_i}|X/\mathcal{O}$.

a) Unicité : Soit $f = f_1 + f' \in (\mathcal{O}^p_{K_1}|X \oplus \mathcal{O}^p_{K'}|X)/\mathcal{O}$ tel que

$$Pf = 0 \; ; \quad \gamma_k(f) = 0, (k = 0,\dots,m-1)$$

Comme $\bigoplus_{i=1}^{d} \mathcal{O}^p_{K_i}|X/\mathcal{O}$ est somme directe de $\mathcal{O}^p_{K_1}|X/\mathcal{O}$ et de $\mathcal{O}^p_{K'}|X/\mathcal{O}$, $Pf = 0$ implique $Pf_1 = 0$ et $Pf' = 0$. De plus l'ellipticité de P' au voisinage de x_1^* et celle de S_1 au voisinage de x_k^*, $\forall k \neq 1$ impliquent :

$$P_1 f_1 = 0 \quad \text{et} \quad S'f' = 0$$

Posons : $g' = P_1 f$, $g_1 = S'f$.

On a alors : $g' \in \mathcal{O}^p_{K'}|X/\mathcal{O}$ et $g_1 \in \mathcal{O}^p_{K_1}|X/\mathcal{O}$

$$P'g' = 0 \quad , \quad S_1 g_1 = 0$$

et (P_1 et S' étant de type Weierstrass d'ordre m_1 et $m' = m - m_1$) :

$$\gamma_k(g') = 0 \quad , \quad k = 0,\dots,m'-1$$

$$\gamma_k(g_1) = 0 \quad . \quad k = 0,\dots,m_1-1$$

On déduit alors des hypothèses de récurrence que :

$$g' = g_1 = 0 ,$$

ce qui implique

$$f' = f_1 = 0 .$$

b) <u>Existence</u> : On cherche la solution du problème

$$(4.1) \quad \begin{cases} P(f_1+f') = g_1 + g' \quad , \quad \gamma_k(f_1+f') = h_k, \quad k = 0,\dots,m-1 \\ g_1, f_1 \in \mathcal{O}^p_{K_1}|X/\mathcal{O} \quad , \quad g', f' \in \mathcal{O}^p_{K'}|X/\mathcal{O} \quad , \quad h_k \in \mathcal{O}^p_Z|Y/\mathcal{O}_Y \end{cases}$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $g' = 0$; d'autre part, S' étant de type Weierstrass d'ordre m', on peut l'écrire :

$$S'(x,D) = D_o^{m'} + B_1(x,D')D_o^{m'-1} + \dots + B_{m'}(x,D')$$

On définit alors $\tilde{S}'(h)_k \in \mathcal{O}^p_Z|Y/\mathcal{O}_Y$, $k = 0,\dots,m_1-1$, par

$$\tilde{S}'(h)_k = h_{m'+k} + B_1(x,D')h_{m'+k-1} + \dots + B_{m'}(x.D')h_k$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on peut résoudre le problème :

$$S_1 f_1 = g_1, \quad \gamma_k(f_1) = \tilde{S}'(h)_k \ , \ k = 0,\dots,m_1-1, \ f_1 \in \mathcal{O}^p_{K_1}|X/\mathcal{O} \ .$$

puis le problème :

$$S'f' = 0, \ \gamma_k(f') = h_k - \gamma_k(S'^{-1}f_1), \ k = 0,\dots,m'-1, \ f' \in \mathcal{O}^p_{K'}|X/\mathcal{O} \ .$$

et on pose :

$$f = S'^{-1}f_1 + f'$$

On a alors immédiatement :

$$Pf = g_1 , \ \gamma_k(f) = h_k , \ k = 0,\dots,m' - 1 .$$

De plus :

$$\gamma_k(S'f) = \gamma_k(f_1) = \tilde{S}'(h)_k , \ k = 0,\dots,m_1-1$$

$$\gamma_k(S'f) = \tilde{S}'(\gamma(f))_k , \ k = 0,\dots,m_1-1$$

Donc :

$$\tilde{S}(\gamma(f) - h)_k = 0, \ k = 0,\dots,m_1 - 1 \ \text{et} \ \gamma_k(f) - h_k = 0, \ k = 0,\dots,m'-1 .$$

Ces deux égalités impliquent aisément, d'après la construction de $\tilde{S}$:

$$\gamma_k(f) - h_k = 0 , \quad k = 0,\dots,m - 1 ,$$

ce qui achève de prouver que f est solution du problème (4.1).

On a travaillé modulo les fonctions holomorphes au voisinage de Y, mais le théorème 1 se déduit de a) et de b) et du théorème de Cauchy-Kowalevski usuel.

- <u>Démonstration du théorème 2</u> : Posons $Q_1 = P_d.\dots.P_{r+1}$ et $Q_2 = P_r.\dots.P_1$. Soit $f \in \bigoplus_{j=1}^{r} \mathcal{O}^{p}_{K_i}|_X$ tel que $Pf \in \mathcal{O}$. Puisque Q_1 est elliptique au voisinage de x_j^*, $j = 1,\dots,r$, on a :

$$Q_2 f \in \mathcal{O}$$

Si de plus $\gamma_k(f) \in \mathcal{O}$, $k = 0,\dots,m_1 + \dots + m_r$, on a $f \in \mathcal{O}$ d'après le résultat d'unicité de b). ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Hamada : The singularities of the solutions of the Cauchy problem. Pub. RIMS, Kyoto University, 5, (1969) p.20-40.

[2] Y. Hamada : Problème analytique de Cauchy à caractéristiques multiples dont les données de Cauchy ont des singularités polaires. C. R. A. S., Série A, t.276. (1973), p.1681-1684.

[3] Y. Hamada, J. Leray, C. Wagschal : Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle. A paraître au J. Math. Pures et Appl.

[4] J. Persson : On the Cauchy problem in $\mathbb{C}^n$ with singular data. The Auroral observatory. Report n° 24-76 (February 1976).

[S.K.K.] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara : Hyperfunctions and pseudo differential equations. Lecture notes in Math. n° 287, p.264-524.

[5] P. Schapira : Propagation au bord et réflexion des singularités analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles. Sem. Goulaouic-Schwartz 1975-1976, exp. n° 6.

[6] C. Wagschal : Sur le problème de Cauchy ramifié. J. de Math. Pures et Appl. T. 53 (1974) p.147-164.