Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

S. Alinhac

Paramétrix pour un problème de Cauchy hyperbolique à multiplicité variable

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 21, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A22_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

PARAMETRIX POUR UN PROBLEME DE CAUCHY HYPERBOLIQUE A MULTIPLICITE VARIABLE

par S. ALINHAC

Exposé n° XXI

27 Avril 1976

§ 0. INTRODUCTION

On étudie dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (de point courant (x,t)), le système

$$L = D_t + \begin{pmatrix} \lambda_1(x,t,D_x) & \nu(x,t,D_x) \\ 0 & \lambda_2(x,t,D_x) \end{pmatrix} + A(x,t,D_x) \; ,$$

où λ_1, λ_2, ν (ordre 1) et A (ordre 0) sont des pseudo-différentiels dépendant de façon C^∞ de t.

On fixe un point $(x_0,0,\xi_0)$ de la surface initiale $t = 0$ et on travaille microlocalement près de ce point, avec les hypothèses suivantes :

(H_1) λ_1 et λ_2 sont réels, et coïncident sur $t = 0$. Précisément, $\lambda_i = \lambda(x,\xi) + t\, r_i(x,t,\xi)$ $(i = 1,2)$, avec de plus $\{p_1,p_2\}(x_0,0,\xi_0 - \lambda(x_0,\xi_0)) \neq 0$; cette dernière condition équivaut à $(r_2 - r_1)(x_0,0,\xi_0) \neq 0$ $(p_i = \tau + \lambda_i)$.

(H_2) $\nu(x_0,0,\xi_0) \neq 0$.

Le système L est donc strictement hyperbolique pour $t \neq 0$, mais non symétrisable pour $t = 0$. On sait (cf. [5], [6]) que le problème de Cauchy pour L est bien posé, quelque soit A, mais que la régularité de la paramétrix dépend de A et ν. Ici on construit explicitement cette paramétrix, ce qui permet de préciser quantitativement (en généralisant [1]) cette dépendance, d'établir le mode de propagation des singularités, mais aussi de discuter la réflexion des singularités sur le bord $t = 0$, ou leur "diffusion" à travers $t = 0$ (cf. [0] pour l'étude précise d'un exemple).

§ 1. PROPAGATION DES SINGULARITES ET REGULARITE

On note $C(p_i)$ la relation canonique de $T^*(\mathbb{R}^{n+1}) \times T^*(\mathbb{R}^n)$ définie par $C(p_i) = \{(x,t,\xi,\tau),(y,\eta)$, tels que (x,t,ξ,τ) appartient à la bicaractéristique nulle de p_i issue de $(y,0,\eta, -\lambda(y,\eta))\}$.

On désigne par $\mathcal{E}'_{\mathcal{U}}$ (où $\mathcal{U}$ est un voisinage conique de (x_0,ξ_0)) l'espace des distributions à support compact dont le front d'onde (ou spectre singulier) est contenu dans $\mathcal{U}$.

Le théorème suivant résume ce que l'on sait de la régularité des paramétrix (cf. [2]).

Théorème : Soit L le système hyperbolique précédent, avec les hypothèses (H_1) et (H_2).

Il existe un voisinage conique $\mathcal{U}$ de (x_o,ξ_o), et des opérateurs $E_{\pm} : \mathcal{E}'_{\mathcal{U}}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ tels que :

i) $LE_{\pm} = 0$, modulo C^{∞}, près de $(x_o,0)$.

ii) Pour tout $t_o > 0$ assez petit, E_+ (resp. E_-) restreint à $t > t_o$, s'écrit (modulo un opérateur régularisant dépendant de t_o) comme un opérateur intégral de Fourier de relation canonique $C(p_1)$ (resp. $C(p_2)$), et d'ordre $-1/4 + m_+ + 0$ (resp. $-\frac{1}{4} + m_- + 0$) microlocalement près de (x_o,ξ_o) avec

$$m_{\pm} = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{Im}(\nu A_{21})}{\{p_1,p_2\}} (x_o\,,\,0,\xi_o,\,-\lambda(x_o,\xi_o))\right] .$$

(ce qui signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage conique $\mathcal{U}_{\varepsilon} \subset \mathcal{U}$ de (x_o,ξ_o) tel que $E_{\pm}|\mathcal{E}'_{\mathcal{U}_{\varepsilon}}$ est d'ordre $-1/4 + m_{\pm} + \varepsilon$).

iii) E_+ et E_- sont des solutions "indépendantes" dans le noyau de L en ce sens qu'il existe des opérateurs scalaires tangentiels, proprement supportés, $\sigma_{\pm}(x,D_x)$, d'ordre 0 et $\mu_{\pm}(x,D_x)$ d'ordre 1/2 tels que

$$E_+\sigma_+ + E_-\sigma_-\big|_{t=o} = \begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_+\mu_+ + E_-\mu_-\big|_{t=o} = \begin{pmatrix} 0 \\ id \end{pmatrix} .$$

Remarquons (cf. partie II) qu'il n'est pas possible de remplacer les nombres $m_{\pm}$ du point ii) par des nombres inférieurs. Ce sont donc des invariants.

Deux aspects du théorème doivent être notés :

. les noyaux $E_{\pm}$ possèdent des singularités "pures" pour $t > 0$ (le théorème ne dit rien pour $t < 0$, nous verrons pourquoi), c'est-à-dire réparties uniquement le long d'une des deux relations canoniques.

. Toute solution de $L\mathcal{U} = 0$ s'écrit comme superposition de E_+ et E_- appliqués à des fonctions déduites des traces de $\mathcal{U}$.

a) On peut donc réduire le problème de la réflexion des singularités sur $t=0$ à un problème d'hypoellipticité pour un opérateur pseudo-différentiel sur le bord, de la façon suivante (schématiquement) : si $L\mathcal{U}=0$, il existe $\mathcal{V}$ et W telles que $\mathcal{U}=E_+\mathcal{V}+E_-W$; si la bicaractéristique de p_1 n'est pas dans le front d'onde de $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}=0$ (microlocalement). La condition de trace imposée $\mathcal{B}\mathcal{U}|_{t=o}=0$ s'écrit de façon pseudo-différentielle sur $\mathcal{V}$ et W.

b) En appliquant le théorème à l'opérateur $\bar{L}$ obtenu de L par le changement t en $-t$, on peut décrire les singularités, pour $t<0$, de toute solution du noyau de L. En général, les solutions "pures" obtenues pour $t>0$ se révèlent être "mêlées" pour $t<0$, ce que l'on nomme "diffusion" de la singularité à travers $t=0$. Cette diffusion peut être d'ailleurs inégale sur les deux caractéristiques, comme le montre l'exemple suivant (cf. [O]) : on étudie l'opérateur

$$P=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-t^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a(t)\frac{\partial}{\partial x}\ .$$

Pour $(x_o,\xi_o)=(0,+1)$, on a ici $m_\pm=-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\,\mathrm{Re}\,a(0)$; on observe la diffusion de la solution pure $E_+\mathcal{V}$ dont les singularités pour $t>0$ sont portées par la bicaractéristique de $\tau-t\xi$. Deux cas se produisent :

. $a(0)\neq -1,-3,\dots,-(2k+1),\dots$ Alors $E_+\mathcal{V}=\bar{E}_+\mathcal{V}+\bar{E}_-\mathcal{V}$ pour $t<0$, où $\bar{E}_\pm$ est d'ordre $m_\pm$.

. Si $a(t)=-(2p+1)+O(t^k)$ (p entier ≥ 0, k entier ≥ 1), alors, pour $t<0$, $E_+\mathcal{V}=\bar{E}_+\mathcal{V}+\bar{E}_-B\mathcal{V}$, où l'opérateur tangentiel B est d'ordre $-\ell$ si $k\geq 2\ell+1$ (ℓ entier ≥ 0).

§ 2. CONSTRUCTION DE LA PARAMETRIX

Elle s'éffectue essentiellement en trois étapes :

1) On réduit l'étude du noyau de L à celle du noyau d'un opérateur du type $P=D_T^2+2\varepsilon TD_TD_{X_j}+\pi(X,D_X,D_T)$, où π est du premier ordre, indépendant de T.

2) On écrit des solutions dans le noyau de P sous la forme $e^{iX.\xi}q(X,T,\xi)$, grâce à un changement d'échelle $s = T|\xi|^{1/2}$ dans les équations de transport sur q.

3) On ajuste les traces.

Il nous semble que le point crucial est 2), c'est pourquoi nous esquissons assez vite les points 1) et 3).

1) Réduction de L .

. D'abord, on "symétrise" les caractéristiques : on a en effet

$$\lambda_1 = \theta - tr,\ \lambda_2 = \theta + tr \quad (\text{avec } 2r = r_2 - r_1 \text{ elliptique}).$$

En posant $(Tu)(x,t) = \int e^{i(T(x,t,\xi)-y.\xi)}u(y,t)dyd\xi$, où $T_t' + \theta(x,t,T_x') = 0$, $T(x,0,\xi) = x.\xi$, on transmue l'opérateur $\tau + \theta$ en τ + reste d'ordre 0. En transmuant le système L par l'opérateur T, on obtient $L' = T^{-1}LT$,

$$L' = D_t - \begin{pmatrix} tr' & \vartheta' \\ 0 & -tr' \end{pmatrix} + A', \quad r' \text{ elliptique}.$$

. Ensuite, on "redresse" les caractéristiques de L'. A cet effet, on choisit j, $(\xi_0)_j \neq 0$, et l'on prouve :

il existe h d'ordre zéro et une bijection canonique $(x,t,\xi,\tau) \mapsto (\tilde{x},\tilde{t},\tilde{\xi},\tilde{\tau})$ d'un voisinage conique $\tilde{\Gamma}$ de $(x_0,0,\xi_0,0)$ sur son image, homogène d'ordre 1, telle que

i) pour $t = 0$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{\xi} = \xi$, $\tilde{t} = 0$.

ii) le symbole $h(\tau \mp tr')$ s'écrit, dans Γ, à l'aide des nouvelles coordonnées, $\tilde{\tau} \mp \varepsilon' t \tilde{\xi}_j$. (ε' = signe de $r'\xi_j$ en $(x_0,0,\xi_0)$).

La preuve suit les lignes classiques [4], [7], avec un petit raffinement pour obtenir i).

On sait alors que si H a pour symbole h, il existe un opérateur intégral de Fourier F, qui respecte la trace sur $t = 0$ (grâce à i)), tel que $L'' = FHL'F^{-1}$ soit de la forme

$$L'' = D_t - \begin{pmatrix} \varepsilon' t D_j & \vartheta'' \\ 0 & -\varepsilon' t D_j \end{pmatrix} + A'' \quad (\text{près de } (x_0,0,\xi_0,0)).$$

. Enfin, en utilisant l'hypothèse (H_2) ($\nu \neq 0$), on réduit L" à un opérateur à coefficients polynomiaux en t.

Auparavant, on rend "droite" l'une des deux caractéristiques de L" par un changement de variables $T = t$, $X_j = x_j + \varepsilon\, t^2/2$, $X_i = x_i$ pour $i \neq j$. L'opérateur devient

$$\tilde{L} = D_T + \varepsilon T D_j - \begin{pmatrix} \varepsilon' T D_j & \tilde{\nu} \\ 0 & -\varepsilon' T D_j \end{pmatrix} + \tilde{A} .$$

On prouve alors qu'il existe des opérateurs (matrices 2×2) pseudo-différentiels d'ordre 0, inversibles, B et R, et un opérateur (scalaire) d'ordre 1, $\pi = \pi(X, D_X, D_T)$, tels que si $\mathcal{V}$ est solution de $P\mathcal{V} = (D_T^2 + 2T\varepsilon D_T D_j + \pi)\mathcal{V} = 0$, alors $\mathcal{U} = BR\begin{pmatrix} \mathcal{V} \\ (D_T D_j^{-1} + \varepsilon T)\mathcal{V} \end{pmatrix}$ est une solution de $\tilde{L}\mathcal{U} = 0$. De plus, la partie principale π_1 de π est tangentielle, et

$$\pi_1(X,\xi) = i(\varepsilon' - \varepsilon)\xi_j + 2\varepsilon'\xi_j \frac{\nu(X,0,\xi) A_{21}(X,0,\xi)}{(r_2 - r_1)(X,0,\xi)} .$$

La preuve suit la même idée que dans la réduction asymptotique de [1], et est assez difficile. On peut la rapprocher de la procédure de découplage exposée en [8].

2) <u>Solutions dans le noyau de P</u>.

On pose $\mathcal{V} = e^{iX.\xi} q(X,T,\xi)$, et alors

$$e^{-iX.\xi} P\mathcal{V} = -q''_{TT} - 2\varepsilon T(q''_{TX_j} + i\omega_j \rho q'_T) + \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \pi^{(\alpha)}(X, \omega\rho, 0) D^\alpha q = 0.$$

on pose $s = T|\xi|^{1/2}$ ($\xi = \omega\rho$, $|\omega| = 1$), l'équation devient

$$\rho(q''_{ss} + 2i\varepsilon\omega_j s q'_s - \pi_1(X,\omega)q) + 2\varepsilon_s q''_{X_j s} - \pi_o(X,\omega,0)q - \sum_{|\alpha|=1} \frac{-i}{\alpha!}\pi_1^{(\alpha)}(X,\omega)\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^\alpha q +$$

$$+ \sum_{j>1} \Big(\sum_{\substack{\alpha,k \\ |\alpha| = k+j \\ k \leq 1}} \frac{-(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \pi_k^{(\alpha)}(X,\omega,0)\rho^{\alpha_2/2} \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\alpha_2} q\Big)\rho^{-j} = 0 .$$

On cherche q sous la forme $q = q_o(X,s,\xi) + \frac{q_{-1}}{\rho} + \ldots$, ce qui conduit aux équations de "transport"

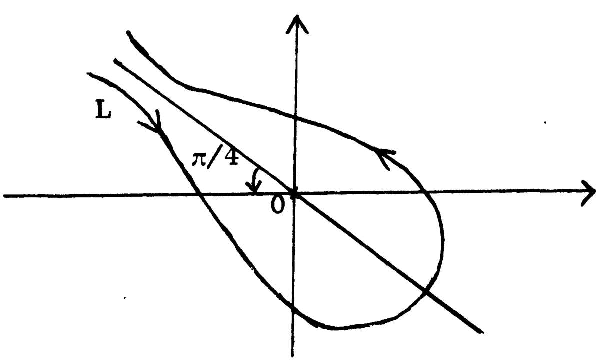
$$E(q_o) = 0, \quad E(q_{-1}) + P_o(q_o) = 0, \quad E(q_{-2}) + P_o(q_{-1}) + P_{-1}(q_o) = 0,$$

etc..., où P_{-j} désigne l'opérateur coefficient de ρ^{-j} dans la somme écrite plus haut $(E = P_1)$.

Le point important est de pouvoir choisir les q_{-j} avec un "bon" comportement lorsque $s \to +\infty$, en sorte que les $q_{-j}(X,T|\xi|^{1/2},\xi)$ se comportent en un certain sens comme des symboles (pour $T \geq 0$), et que la somme $q_o + \frac{q_{-1}}{\rho} + \ldots$ ait un sens.

a) Forme des solutions

En posant $\sigma = \theta s$ ($\theta = \sqrt{|\omega_j|}$ ou $\theta = i\sqrt{|\omega_j|}$ suivant que $\varepsilon = +1$ ou -1), on se ramène au cas où E s'écrit $q''_{\sigma\sigma} + 2i\sigma q'_{\sigma} + \mu q = 0$; on choisit $q_o(\sigma) = \int_L e^{\sigma z} e^{-i\, z^2/4} z^{\lambda} dz$, où $\underline{\lambda = -1 - i/2\mu}$, et L est de la forme



(cela résulte de l'application de la méthode de Laplace). Alors $P_o(q_o)$ s'écrit comme une somme de termes de la forme

$C(X,\omega)\int_L e^{\sigma z} e^{-i\, z^2/4} (\mathrm{Log}\, z)^k z^{\nu} dz$, avec $\nu \geq \lambda$, k entier ≥ 0, C étant une fonction C^{∞}. Négligeant k, on notera simplement (ν) un tel terme. Montrons que si $W = (\nu)$, il existe une solution de $E(u) = W$ qui est une somme (finie) de termes (ν) ; en effet, si $u = \int_L e^{\sigma z} e^{-i\, z^2/4} v(z)dz$, $E(u) = W$ s'écrit $v(z) = z^{\lambda} C(z)$, où $C'(z) = \frac{iC(X,\omega)}{2}(\mathrm{Log}\, z)^k z^{\nu-\lambda-1}$, et le résultat suit d'un calcul élémentaire de primitives.

On en déduit que q_{-1} (choisi comme ci-dessus) est une somme de (ν), $\nu \geq \lambda$; alors q_{-2} est une somme de termes $\rho^{\alpha}(\nu)$, α réel, $\nu \geq \lambda$, et ainsi de suite. Si l'on convient de négliger $\rho^{\alpha}(\nu)$ devant $\rho^{\alpha'}(\nu')$ lorsque $\alpha = \alpha'$, $\nu > \nu'$ (voir b)), on a plus précisément (par récurrence)

$$q_{-j} = \lambda + \rho^{1/2}(\lambda+1) + \ldots + \rho^{j/2}(\lambda+j)\ ,$$

étant entendu qu'on a éliminé de l'expression de q_{-j} tout terme négligeable par rapport à l'un des termes écrits.

b) <u>Comportement des solutions</u> q_{-j}

C'est le point essentiel qui justifie les choix faits en a). Il résulte du lemme : soit

$$I_{k,\nu}(\sigma) = \int_L e^{\sigma z} e^{-i z^2/4} (\operatorname{Log} z)^k z^{\nu} dz .$$

Lorsque $|\sigma| \to +\infty$ dans la direction du demi axe Ox ou du demi axe Oy,
$|I_{k,\nu}(\sigma)| \leq \text{cte}\ \dfrac{(\operatorname{Log}|\sigma|)^k}{|\sigma|^{\operatorname{Re}\nu+1}}$, pour tout entier $k \geq 0$, ν réel (esquisse de preuve : posons $\tilde{I}_{k,\nu}(\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{\sigma t e^{3i\frac{\pi}{4}}} e^{-t^2/4} (\operatorname{Log} t)^k t^{\nu} dt$, pour $\operatorname{Re}\nu > -1$.

Le comportement des $\tilde{I}_{k,\nu}(\sigma)$ est facile à obtenir. Lorsque $\operatorname{Re}\nu > -1$,
$I_{o,\nu}(\sigma) = 2i\, e^{3i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{\pi}{4}\nu} (\sin \pi\nu) \tilde{I}_{o,\nu}(\sigma)$ (par déformation de L), et de même $I_{k,\nu}(\sigma)$ s'exprime à l'aide des $\tilde{I}_{\ell,\nu}(\sigma)$, $\ell \leq k$. Lorsque $\operatorname{Re}\nu \leq -1$, on établit des relations de récurrence entre les $I_{k,\nu}$). Notons que si λ est voisin d'un entier positif ou nul lorsque (X,ω) est proche de (X_o,ω_o), on remplace q_o par $\tilde{I}_{o,\lambda}(\sigma) = \int_o^{+\infty} e^{\sigma t e^{3i\frac{\pi}{4}}} e^{-t^2/4}\, t^{\lambda} dt$, et tout le calcul du point a) doit être fait en remplaçant les $I_{k,\lambda}$ par les $\tilde{I}_{k,\lambda}$, qui ont le même comportement et les mêmes propriétés.

c) <u>Les symboles $S^{m,k}$</u>

On note ainsi, suivant Boutet de Monvel [3], la classe des fonctions $a(x,t,\xi,\tau)$, C^{∞} dans un voisinage de $(x_o,0,\xi_o,0)$, satisfaisant aux inégalités

$$|D_x^\alpha D_t^q D_\xi^\beta D_\tau^\gamma a| \leq \text{cte}\, |\xi|^{m-|\beta|-|\gamma|}\left(t^2+\frac{1}{|\xi|}\right)^{\frac{k-q}{2}},$$

dans les conditions habituelles.

Les résultats de a) sur la forme de q_{-j} et de b) sur le comportement des $I_{k,\nu}$ se synthétisent aisément en celui-ci : notons (par abus), $q_{-j}(X,T,\xi) = q_{-j}(X,T|\xi|^{1/2},\xi)$ alors q_{-j} est microlocalement près de (X_o,ω_o), pour $T \geq 0$, un symbole de classe $S_{T=o}^{m+o,\ 2m-j+o}$, où $m = -\dfrac{\mathrm{Re}\,\lambda\,(X_o,\omega_o)+1}{2}$ (ce qui signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage conique $\mathcal{U}_\varepsilon$ de (X_o,ω_o) tel que, restreint à $\mathcal{U}_\varepsilon$, q_{-j} est de classe $S_{T=o}^{m+\varepsilon,2m-j+2\varepsilon}$). Compte tenu des résultats asymptotiques de [3], cela permet de donner un sens à la somme $q = q_o + \frac{q_{-1}}{\rho} + \ldots$, avec $q \in S_{T=o}^{m+o,2m+o}$ pour $T \geq 0$.

3) Si W a son front d'onde concentré près de (X_o,ω_o), la fonction $v = \int e^{iX.\xi} q(X,T,\xi)\hat{W}(\xi)d\xi$ est donc, pour $T \geq 0$, une solution de $P\mathcal{V} = 0$, modulo C^∞. Pour revenir à $\tilde{L}$, il faut (en général) prolonger cette solution en une solution $\bar{\mathcal{V}}$ valable pour T voisin de O. On montre dans [2] qu'on peut réduire ce problème aux cas classiques où le problème de Cauchy est correct [5], [6].

D'autre part, toutes les constructions faites en 2) dépendent de $\varepsilon = \pm 1$. Dans les coordonnées d'origine, on aura donc (en faisant figurer l'indice ε)

$$\bar{\mathcal{V}}_\varepsilon\big|_{t\geq o} = \mathcal{V}_\varepsilon = \int e^{ix\,\xi + i\xi^{t^2/2}\xi_j}\, q_\varepsilon(x,t,\xi)\hat{W}_\varepsilon(\xi)d\xi\ .$$

En désignant par $(BR)_\varepsilon$ l'opérateur BR dans les coordonnées d'origine, on aura $\mathcal{U}_\varepsilon = (BR)_\varepsilon \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{V}}_\varepsilon \\ D_t D_j^{-1}\bar{\mathcal{V}}_\varepsilon \end{pmatrix}$, et $L''\,\mathcal{U}_\varepsilon = 0$ (voir 1)).

On définit alors des opérateurs $\tilde{E}_\varepsilon$ de $\mathcal{E}'_{\mathcal{U}}$ ($\mathcal{U}$ voisinage assez petit de (x_o',ω_o)) dans $\mathcal{D}'$ par $\tilde{E}_\varepsilon W_\varepsilon = TF^{-1}\mathcal{U}_\varepsilon$ (avec des tronquages convenables).

Ces opérateurs sont des solutions "pures" dans le noyau de L; le choix $\varepsilon = \pm\varepsilon'$, avec les valeurs de $m_\pm$ correspondantes, conduit aux opérateurs $E_\pm = \tilde{E}_{\pm\varepsilon'}$, qui satisfont clairement aux points i) et ii) du théorème.

La question des traces se pose du fait que $(BR)_\varepsilon$ n'est pas (en général) un opérateur tangentiel. Cependant, cet opérateur s'applique à des fonctions $\bar{\mathcal{V}}$ vérifiant une équation du type $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - t^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + R_1)\bar{\mathcal{V}} = 0$

(R_1 d'ordre 1) ; pour de telles fonctions. on perd seulement "1/2 cran" de régularité par trace par rapport à $\bar{\mathcal{V}}(x,0)$; cela permet d'exprimer les traces de $(BR)_\varepsilon\bar{\mathcal{V}}$ sous la forme $\psi_1(x,D_x)\bar{\mathcal{V}}(0) + \psi_2(x,D_x)\bar{\mathcal{V}}'_t(0)$, les ψ_i se calculant à partir de $(BR)_\varepsilon$ et R_1.

Le reste de la preuve du point iii) est surtout une vérification laissée au lecteur.

BIBLIOGRAPHIE

[0] S. Alinhac : Diffusion des singularités à travers une surface pour un opérateur hyperbolique. Journées d'Equations aux dérivées partielles Rennes 1976.

[1] S. Alinhac : Paramétrix et propagation des singularités pour un problème de Cauchy à multiplicité variable. A paraître dans Astérisque, 1976.

[2] S. Alinhac : Paramétrix pour un système hyperbolique à multiplicité variable. A paraître dans Communications in P. D. E. , 1977.

[3] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators. C.P.A.M. 27, 1974.

[4] J. J.Duistermaat et J. Sjöstrand : A global construction for pseudo-differential operators with non involutive characteristics. Inv. Mathematicae, 20, 1973.

[5] O. A. Oleinik : Cauchy Problem for weakly hyperbolic equations. C. P. A. M. 23 n° 4, 1970.

[6] V. Pietkov et V. Ivry : Uspehi Mat. Nauk 29.5, 1974.

[7] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara : On pseudo differential equations in hyperfunction theory. Proc. AMS Summer Inst. on P.D.E., Berkeley 1971.

[8] M. Taylor : Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations. C.P.A.M. 28, 1975.
