

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. CHARRIER

B. HANOZET

J. L. JOLY

## **Sous-solutions pour un problème unilatéral d'évolution : caractérisation et régularité**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 20,  
p. 1-9*

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1975-1976\\_\\_\\_\\_A21\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A21_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

S O U S - S O L U T I O N S   P O U R   U N   P R O B L E M E   U N I L A T E R A L  
D' E V O L U T I O N . :   C A R A C T E R I S A T I O N   E T   R E G U L A R I T E .

par P. CHARRIER, B. HANOUZET  
et J. L. JOLY

Exposé n° XX

20 Avril 1976



§ 1. POSITION DU PROBLEME ET ENONCES DES RESULTATS

1. Notations et rappels

Soient  $\Omega$  un ouvert borné très régulier de  $\mathbb{R}^n$ ,  $T$  un nombre réel,  $0 < T < +\infty$ . On pose :

$$Q = ]0, T[ \times \Omega, \quad \Sigma = ]0, T[ \times \partial\Omega.$$

On considère la forme intégrodifférentielle  $a$  définie par :

$$a(u, v) = \int_Q \left( \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} D_i u D_j v + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i D_i u \cdot v + a_0 uv \right) dx dt, \quad ,$$

dans laquelle on suppose que  $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\bar{Q})$ ,  $a_i \in \mathcal{C}^0(\bar{Q})$ . On suppose aussi que  $a$  est coercive sur  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . On associe à la forme  $a$  l'opérateur différentiel :

$$L = \sum_{1 \leq i, j \leq n} D_j a_{ij} D_i + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i D_i + a_0,$$

et on pose :

$$E = \frac{\partial}{\partial t} + L.$$

On introduit l'espace :

$$W_t = \{ u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), u(T) = 0 \}$$

On donne :

$$\begin{aligned} & f \text{ dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ & u_0 \text{ dans } L^2(\Omega), \\ & f \text{ une fonction mesurable de } ]0, T[ \text{ dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

On considère les sous-solutions du problème d'obstacle  $(\varphi, f, u_0)$ , c'est-à-dire les fonctions  $u$  appartenant à  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et vérifiant :

$$u \leq \varphi \quad ; \quad u|_{\Sigma} \leq 0 \quad .$$

et pour tout  $w \in W_T$ ,  $w \geq 0$ ,

$$- \int_Q u \frac{\partial w}{\partial t} dx dt + a(u, w) \leq \int_0^T \langle f, w \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_{\Omega} u_0 w(0) dx \quad .$$

On peut interpréter immédiatement les sous-solutions comme les fonctions de  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  vérifiant :

$$u \leq \varphi \quad ; \quad u|_{\Sigma} \leq 0 \quad ; \quad \mathcal{E}u \leq F \quad ;$$

où  $\mathcal{E}$  désigne l'application de  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  dans  $W_T'$  définie par :

$$\forall u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad \forall w \in W_T \quad ,$$

$$\langle \mathcal{E}u, w \rangle_{W_T', W_T} = - \int_Q u \frac{\partial w}{\partial t} dx dt + a(u, w),$$

et  $F$  est l'élément de  $W_T'$  défini par :

$$\forall w \in W_T, \quad \langle F, w \rangle_{W_T', W_T} = \int_0^T \langle f, w \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_{\Omega} u_0 w(0) dx \quad .$$

En supposant que le convexe

$$\mathcal{K}(\varphi) = \{u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)); u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)); u \leq \varphi\}$$

est non vide, on a le résultat suivant dû à F. Mignot et J. P. Puel [6] :

Théorème : Il existe une sous-solution maximum.

La présentation de ce résultat en terme de sous-solutions est donnée dans A. Bensoussan et J. L. Lions [2].

On note  $\sigma(\varphi, f, u_0)$  la sous-solution maximum. On définit de même les sur-solutions pour  $(\varphi, f, u_0)$  et pour  $\varphi$  convenable, on désigne par  $\tau(\varphi, f, u_0)$  la sur-solution minimum.

## 2. Caractérisation des sous-solutions

Pour interpréter les sous-solutions, nous utilisons les techniques d'ordre de B. Hanouzet et J. L. Joly [5]. On introduit  $\textcircled{H}$  l'ensemble des éléments du dual d'ordre de  $H_0^1(Q)$  qui admettent un prolongement ordonné sur  $W_T$ . On a alors :

**Théorème 1** : 1 - Toute sous-solution  $u$  du problème d'obstacle  $(\varphi, f, u_0)$  admet une trace  $u(0)$  appartenant à  $(H_{00}^{1/2}(\Omega))'$ .

2 - Un élément  $u$  de  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  est une sous-solution si et seulement si :

$$\begin{aligned} Eu - f &\in \textcircled{H} \\ u &\leq \varphi \quad \text{p.p. dans } Q \\ u|_{\Sigma} &\leq f \quad \text{p.p. dans } \Sigma \\ Eu &\leq f \quad \text{dans } H^{-1}(Q) \\ u(0) &\leq u_0 \quad \text{dans } (H_{00}^{1/2}(\Omega))' \end{aligned}$$

3 - La trace en  $t = 0$  de la sous-solution maximum  $\sigma(\varphi, f, u_0)$  est dans  $L^2(\Omega)$ .

## 3. Estimation et régularité

On suppose que l'obstacle  $\varphi$  vérifie les propriétés (en plus de  $\mathcal{K}(\varphi) \neq \emptyset$ ):

- (1)  $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$
- (2)  $(E\varphi) \wedge f \in L^2(Q; T; H^{-1}(\Omega))$ .

Alors  $E\varphi$  appartient à  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + \textcircled{H}$  et on peut définir la trace  $\varphi(0) \in (H_{00}^{1/2}(\Omega))'$ .

On obtient alors une estimation de la sous-solution maximum qui permet d'obtenir un résultat de régularité.

Théorème 2 : Si  $\varphi$  vérifie (1) (2) et  $\varphi(0) \geq u_0$  alors,  $\sigma = \sigma(\varphi, f, u_0)$  vérifie :

$$(3) \quad (E\varphi) \wedge f \leq E\sigma \leq f,$$

$$(4) \quad \sigma(0) = u_0,$$

et par suite  $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$  appartient à  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .

Les inégalités (3) (4) généralisent à  $\sigma$  l'estimation analogue obtenue par P. Charrier et G. M. Troianiello [4] pour la solution forte du même problème d'obstacle, solution qui est cherchée à priori régulière en supposant que l'obstacle lui même est régulier ( $E\varphi \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ). Par contre ici, nous n'imposons de régularité qu'à la partie négative de  $E\psi$  quand  $f = 0$  et nous trouvons a posteriori que la solution  $\sigma$  est régulière. Cette observation que seule importe la régularité de la variation négative du convexe des contraintes n'est pas nouvelle. On la rencontre dans un cadre un peu différent, dans J. J. Moreau [7] qui, pour son étude du problème de la rafle d'un point par un ensemble convexe mobile, remarque qu'une expansion, même brutale, dans l'évolution du convexe n'entraîne aucune singularité de la trajectoire du point mobile. Depuis cette observation a été utilisée par un certain nombre d'auteurs - en particulier H. Attouch et A. Damlamian [1], M. Biroli [3] - dans l'étude des solutions fortes de problèmes d'évolution unilatéraux.

## § 2. SCHEMA DES DEMONSTRATIONS

### 1. Démonstration du théorème 1

On introduit  $H_0^1(Q)^*$  et  $W_T^*$  les duals d'ordre respectifs de  $H_0^1(Q)$  et  $W_T$ . La restriction  $\rho : W_T^* \rightarrow H_0^1(Q)^*$  est un homomorphisme de Riesz ; on note  $\textcircled{H}$  l'image de  $W_T^*$  par cet homomorphisme et on désigne par  $\pi : \textcircled{H} \rightarrow W_T^*$  le prolongement linéaire qui est l'homomorphisme de Riesz inverse à droite minimum de  $\rho$ . Si  $f$  est un élément positif de  $\textcircled{H}$  on a :

$$\forall v \in W_T, v \geq 0,$$

$$\langle \pi f, v \rangle_{W_T^*, W_T} = \sup_{\substack{0 \leq u \leq v \\ u \in H_0^1(Q)}} \langle f, u \rangle_{H^{-1}(Q), H_0^1(Q)}.$$

Notons  $\alpha_h$ ,  $0 < h < T$ , la famille de fonctions définies par :

$$\begin{cases} \alpha_h(t) = \frac{t}{h} & , \quad 0 \leq t \leq h \\ \alpha_h(t) = 1 & , \quad h \leq t \leq T \end{cases}$$

Alors, si  $f \in \mathcal{H}$  et si  $v \in W_T$  :

$$(5) \quad \langle \pi f, v \rangle_{W_T', W_T} = \lim_{h \rightarrow 0} \langle f, \alpha_h v \rangle_{H^{-1}(Q), H_0^1(Q)} .$$

(Pour plus de détails sur ces questions, on peut consulter [5]).

On a alors le résultat suivant :

**Proposition** : Soit  $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  telle que  $Eu$  appartienne à  $\mathcal{H}$ .

Alors  $u$  admet une trace à l'origine  $u(o) \in (H_{oo}^{1/2}(\Omega))'$  qui est définie par :

$$\forall v \in W_T, \quad \langle \mathcal{E}u, v \rangle_{W_T', W_T} = \langle \pi Eu, v \rangle_{W_T', W_T} + \langle u(o), \gamma_o v \rangle_{(H_{oo}^{1/2}(\Omega))', H_{oo}^{1/2}(\Omega)}$$

et  $u(o)$  est limite faible dans  $(H_{oo}^{1/2}(\Omega))'$  de  $T_h u = \frac{1}{h} \int_0^h u(\cdot, t) dt$ .

En effet comme  $\mathcal{E}u - \pi Eu|_{H_0^1(Q)} = 0$  on peut définir  $u(o) = (\gamma_o)^{-1}(\mathcal{E}u - \pi Eu)$

où  $\gamma_o$  est l'application trace  $v \rightarrow v(o)$  de  $W_T$  sur  $(H_{oo}^{1/2}(\Omega))'$ . En calculant

$\pi Eu$  à l'aide de (5) on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \pi Eu, v \rangle_{W_T', W_T} &= \lim_{h \rightarrow 0} \langle Eu, \alpha_h v \rangle_{H^{-1}(Q), H_0^1(Q)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( - \int_Q u \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_h v) dx dt + a(u, \alpha_h v) \right) \\ &= \langle \mathcal{E}u, v \rangle_{W_T', W_T} - \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{h} \int_0^h u(x, t) dt \right) \cdot v(x, o) dx. \end{aligned}$$

Plus généralement, on a le résultat suivant (obtenu par translation à partir du précédent).

**Proposition** : Pour tout élément  $u$  de  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  tel que  $Eu$  soit dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + \mathcal{H}$  on peut définir une trace  $u(o)$  dans  $(H_{oo}^{1/2}(\Omega))'$  comme la limite faible dans cet espace de  $T_h u$ .

Pour tout  $f$  de  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  tel que  $Eu - f$  soit dans  $\mathcal{H}$  on a la formule de Green :

$$(6) \quad \begin{aligned} \forall v \in W_T, \quad \langle \pi(Eu - f), v \rangle_{W_T', W_T} &= - \int_Q u \frac{\partial v}{\partial t} dx dt \\ &+ a(u, v) - \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt - \langle u(o), v(o) \rangle_{(H_{oo}^{1/2}(\Omega))', H_{oo}^{1/2}(\Omega)}. \end{aligned}$$



Remarque : Si de plus  $u$  appartient à  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  alors la trace  $u(0)$  est dans  $L^2(\Omega)$ .

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1.

Soit  $u$  une sous-solution, alors  $\mathcal{E}u - F$  est un élément négatif de  $W_T'$  donc appartient à  $W_T^{*k}$ . Par suite  $\rho(\mathcal{E}u - F) = Eu - f$  appartient à  $\mathcal{H}$ . On peut donc définir la trace  $u(0)$  dans  $(H_{00}^{1/2}(\Omega))'$ .

En utilisant la formule de Green (6) on obtient pour tout  $v \in W_T$ ,  $v \geq 0$  :

$$\langle \pi(Eu - f), v \rangle_{W_T', W_T} + \langle u(0) - u_0, v(0) \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Omega))', H_{00}^{1/2}(\Omega)} \leq 0$$

Remplaçant  $v$  par  $(1 - \alpha_h)v$  et passant à la limite, on obtient pour tout  $v \in W_T$ ,  $v \geq 0$  :

$$\langle u(0) - u_0, v(0) \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Omega))', H_{00}^{1/2}(\Omega)} \leq 0$$

donc  $u(0) \leq u_0$ .

La réciproque est immédiate à partir de (6).

Pour montrer la dernière partie du théorème, nous utilisons un résultat de [6] :  $\sigma(\varphi, f, u_0)$  appartient à  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  et par suite, d'après la remarque qui précède,  $\sigma(0)$  appartient à  $L^2(\Omega)$ .

## 2. Démonstration du théorème 2

Les hypothèses faites sur  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \varphi &\in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ \varphi &\geq v_0, \quad v_0 \text{ régulière,} \\ E\varphi &\geq (E\varphi) \wedge f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \end{aligned}$$

permettent de montrer que  $E\varphi - (E\varphi) \wedge f$  est dans  $\mathcal{H}$ , il suffit pour cela (cf. [5]) de vérifier que :

$$\forall v \in W_T, \quad v \geq 0, \quad \sup_{h > 0} \langle E\varphi - (E\varphi) \wedge f, \alpha_h v \rangle_{H^{-1}(Q), H_0^1(Q)} < +\infty.$$

On peut donc définir  $\varphi(0)$  dans  $(H_{00}^{1/2}(\Omega))'$ .

Pour montrer (3) et (4) on reprend le plan d'une démonstration donnée par U. Mosco des inégalités analogues dans le cas stationnaire.

On se ramène d'abord par translation au cas où  $f = 0$  et  $u_0 = 0$ .

L'idée est ensuite de montrer que  $\sigma$ , sous-solution maximum pour  $(\varphi, 0, 0)$ , est égale à la sur-solution minimum pour  $(\sigma, (E\varphi) \wedge 0, 0)$ .

1)  $\sigma = \sigma(\varphi, 0, 0)$  étant un obstacle convenable (il existe une fonction régulière au-dessus de  $\sigma$ , cf. [6]) on peut définir  $\tau = \tau(\sigma, (E\varphi) \wedge 0, 0)$ .

Mais d'après (1), (2) et  $\varphi(0) \geq 0$ ,  $\varphi$  est une sur-solution pour  $(\sigma, (E\varphi) \wedge 0, 0)$  donc  $\tau \leq \varphi$ .

2) Comme  $K(\tau)$  est non vide, on définit  $\bar{\sigma} = \sigma(\tau, 0, 0)$ . Comme  $\tau \leq \varphi$ , on a  $\bar{\sigma} \leq \sigma$ . Mais d'autre part  $\sigma$  est une sous-solution pour  $(\tau, 0, 0)$  donc  $\sigma = \bar{\sigma}$ .

3) Montrons enfin que  $\sigma = \tau$ . On utilise ici les techniques de [6]. On sait que  $\bar{\sigma}$  est limite faible dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  des solutions des problèmes pénalisés :

$$\begin{cases} E v_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (v_\varepsilon - \tau)^+ = 0 \\ v_\varepsilon(0) = 0 \end{cases}$$

D'autre part :

$$\forall v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ tel que } v' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \text{ et } v \geq \sigma,$$

on a :

$$\int_Q (v - \tau) \frac{\partial v}{\partial t} dx dt + a(\tau, v - \tau) + \frac{1}{2} \|v(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \int_0^T \langle (E\varphi) \wedge 0, v - \tau \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt.$$

Comme on peut prendre  $v_\varepsilon$  pour fonction test, on obtient :

$$a(v_\varepsilon - \tau, v_\varepsilon - \tau) + \frac{1}{\varepsilon} \int_Q (v_\varepsilon - \tau)^+ (v_\varepsilon - \tau) dx dt \leq - \int_0^T \langle (E\varphi) \wedge 0, v_\varepsilon - \tau \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt$$

et par suite :  $a(\bar{\sigma} - \tau, \bar{\sigma} - \tau) \leq 0$ .

Donc  $\bar{\sigma} = \tau$  ( $= \sigma$ ). On obtient donc par le théorème 1 :

$$\begin{aligned} (E\varphi) \wedge 0 &\leq E\sigma \\ 0 &\leq \sigma(0) \end{aligned}$$

d'où (3) et (4).

(3) montre alors que  $E\sigma$  est dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  et on obtient le résultat de régularité.

Remarques : 1. Dans le théorème 2, on peut remplacer l'hypothèse  $\varphi(0) \geq u_0$  par  $\varphi(0) \wedge u_0 \in L^2(\Omega)$  ; alors

$$\sigma(\varphi, f, \varphi(0) \wedge u_0) = \sigma(\varphi, f, u_0)$$

et (4) devient :

$$\sigma(0) = \varphi(0) \wedge u_0 .$$

2. Si on suppose que l'adhérence dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  de  $\mathcal{K}(\varphi)$  est égale à l'ensemble  $\{v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)); v \leq \varphi\}$  alors  $\sigma$  est solution forte de  $(\varphi, f, u_0)$  (cf. [4]).

---

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Attouch et A. Damlamian : Solutions fortes d'inéquations variationnelles d'évolution.
- [2] A. Bensoussan et J. L. Lions : Ouvrage à paraître.
- [3] M. Biroli : Solutions faibles des inéquations d'évolution avec convexes dépendant du temps. C. R. Acad. Sc. Paris, 280, série A, 1975, p.1209 .
- [4] P. Charrier et G. M. Troianiello : Un résultat d'existence et de régularité pour les solutions fortes d'un problème unilatéral d'évolution avec obstacle dépendant du temps. C. R. Acad. Sc. Paris, 281, série A, 1975, p.621.
- [5] B. Hanouzet et J. L. Joly : Méthodes d'ordre dans l'interprétation de certaines inéquations variationnelles. C. R. Acad. Sc., Paris, 281, série A, 1975, p.373 et à paraître.

- [6] F. Mignot et J. P. Puel : Solution maximum de certaines inéquations d'évolution paraboliques et inéquations quasi variationnelles paraboliques; C. R. acad. Sc., Paris, 280, série A, 1975, p.259.
- [7] J. J. Moreau : Rétraction d'une multiapplication. Séminaire d'analyse convexe, Montpellier, 1972, exposé n<sup>o</sup> 13.
-