

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. GRIGIS

Caractérisation d'opérateurs pseudodifférentiels et applications (d'après R. Beals)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 19, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976___A20_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU 91120 PALAISEAU

Téléphone : 911.81.60 Poste N°

Télex : ECOLEX 6915961

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

C A R A C T E R I S A T I O N D ' O P E R A T E U R S P S E U D O D I F F E R E N T I E L S
E T A P P L I C A T I O N S ,

(d'après R. Beals)

par A. GRIGIS

Exposé n° XIX

13 Avril 1976

Nous donnons ici une vue des principaux résultats de [0], récent article de R. Beals. Notre but a été de montrer le résultat 3) ci-dessous, aussi avons nous parfois restreint la généralité des développements de l'article.

Voici les questions auxquelles R. Beals donne une réponse positive .

1) Dans [6], A. P. Calderon et R. Vaillancourt ont montré que les opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbf{R}^n ayant un symbole dans $S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0$ sont continus $L^2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$; Beals et Fefferman ont étendu ce résultat à des classes plus générales : $S_{\Phi, \varphi}^0$ ([1], [2], [3]).

On peut se poser le problème suivant : étant donné un opérateur linéaire continu : $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathbf{R}^n)$, peut-on dire s'il est un opérateur pseudodifférentiel à symbole dans $S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0$ (resp $S_{\Phi, \varphi}^0$) en considérant les propriétés de continuité L^2 de ses commutateurs avec $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ et la multiplication par $i x_j$.

2) Soit P un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1, admettant une paramétrix dans $S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0$, et Q un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0.

Est -ce que $P + \varepsilon Q$ admet une paramétrix pour ε suffisamment petit ?

Plus généralement : un opérateur de $\mathcal{L}_{(\Phi, \varphi)}^0$ qui est un isomorphisme de L^2 , admet-il un inverse dans $\mathcal{L}_{(\Phi, \varphi)}^0$?

3) Dans [9], L. Hörmander caractérise les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m à caractéristiques doubles (vérifiant la condition dite "du cône") qui sont hypoelliptiques avec perte d'une dérivée. Il donne des conditions algébriques pour qu'on ait

$$\forall K \text{ compact } \forall s, \exists C(K, s) \forall u \in \mathcal{D}'_K \quad \|u\|_{m-1}^2 \leq C(K, s) (\|Pu\|_0^2 + \|u\|_{-s}^2) .$$

Lorsque le symbole principal de P s'annule exactement à l'ordre 2 sur une surface régulière (P est dit "transversalement elliptique") il est montré dans [5], que les conditions algébriques de [7], [9] sont suffisantes pour l'existence d'une paramétrix dans la classe de Boutet de Monvel [4], et qui est en particulier dans $\mathcal{L}^{1-m}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$.

La question est de savoir si c'est encore le cas dans la situation générale ou se place L. Hörmander.

Donc, en résumé, R. Beals établit le lien entre l'existence d'une estimation à priori, et celle d'une paramétrix.

§ 1. CARACTERISATION DES OPERATEURS DE TYPE $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

On appelle symbole une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \{(x, \xi)\}$. Si a est un symbole, on note

$$a_{(\beta)}^{(\alpha)} = \partial_x^{(\beta)} D_\xi^{(\alpha)} a$$

A l'aide d'un symbole on peut définir un opérateur pseudodifférentiel par

$$(1.1) \quad Au(x) = \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

$$x \cdot \xi = \sum_j x_j \xi_j \quad d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi$$

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix\xi} u(x) dx$$

La formule (1.1) a un sens si $\hat{u} \in \mathcal{E}'$. En particulier on retrouve le symbole

$$a(x, \xi) = e_{-\xi}(x) (A e_\xi)(x) : e_\xi(x) = e^{ix\xi} .$$

Nous considérons d'abord les opérateurs de type $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ définis par L. Hörmander [8].

Définition (1.2) : $m \in \mathbf{R}$, $S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m$ est l'espace des symboles a tels que chaque semi-norme

$$P_{\alpha, \beta}(a) = \sup_{\langle \xi \rangle} \langle \xi \rangle^{-m + \frac{|\alpha| - |\beta|}{2}} |a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)|$$

soit finie ($\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$).

Muni de ces semi-normes $S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m$ est un espace de Fréchet. On note $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m$

l'espace des opérateurs pseudodifférentiels correspondants. On sait définir la composition et l'adjoint. Les opérateurs de $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m$ sont continus $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ et s'étendent en des opérateurs continus $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$. Pour les espaces de Sobolev ordinaires on a d'après [6] la continuité

$$A \in \mathcal{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m$$

$$A : H^{s+m} \rightarrow H^s \quad \forall s \in \mathbf{R}.$$

Caractérisation : Notons x_j la multiplication par la fonction coordonnée x_j et $D_j = -i \partial / \partial x_j$.

Pour $B : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$, on définit

$$L_j B = [ix_j, B] = ix_j B - i B x_j$$

$$M_j B = [D_j, B] = D_j B - B D_j$$

Si $\alpha, \beta \in (\mathbf{Z}_+)^n$ sont des multi-indices, on pose

$$B_{(\beta)}^{(\alpha)} = L_1^{\alpha_1} \dots L_n^{\alpha_n} M_1^{\beta_1} \dots M_n^{\beta_n} B$$

bien sûr $B_{(0)}^{(0)} = B$.

Théorème (1.3) : Une application linéaire $B : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ est dans $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0$ si et seulement si, pour tous $\alpha, \beta \in (\mathbf{Z}_+)^n$, l'opérateur $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$ a une extension continue :

$$H^{\frac{|\beta| - |\alpha|}{2}} \rightarrow H^0 = L^2.$$

Preuve : La condition est nécessaire car si $B = b(x, D)$ est dans $\mathcal{L}^0_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$, $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$ appartient à $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{|\beta| - |\alpha|}{2}}$ et a pour symbole $b_{(\beta)}^{(\alpha)}$.

Réciproquement nous supposons que les $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$ remplissent les conditions ci-dessus. Nous cherchons d'abord une écriture formelle du symbole b , écriture valable par exemple si B est continu : $\mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$.

Soit $g \in \mathcal{L}$, $g(0) = 1$, telle que \hat{g} ait son support contenu dans $|\xi| \leq 1$ et $g(x) = g(-x)$.

Posons $g_x(y) = g(y - x)$. Si $u \in \mathcal{L}$, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x)g_x(x) = \iint e^{i(x-y)\xi} g_x(y)u(y)dyd\xi \\ &= \iint e^{-iy\xi} e_{\xi}(x)g_y(x)dyd\xi \end{aligned}$$

Donc formellement on obtient

$$\begin{aligned} Bu(x) &= \iint e^{-iy\xi} B(e_{\xi}g_y)(x)u(y)dyd\xi \\ &= \iint e^{i(x-y)\xi} b_0(x, y, \xi)u(y)dyd\xi \\ &= \int e^{ix\xi} b(x, \xi)\hat{u}(\xi)d\xi \end{aligned}$$

ou

$$b_0(x, y, \xi) = e_{-\xi}(x) B(e_{\xi}g_y)(x)$$

et

$$(1.4) \quad b(x, \xi) = \iint e^{i(x-y)(\eta - \xi)} b_0(x, y, \eta)d\eta dy$$

Maintenant, les conditions sur $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$ permettent d'obtenir des estimées L^2 pour b_0 considérée comme fonction de x dépendant des paramètres y et ξ . Si on note $\|\cdot\|_S$ la norme dans H^S on obtient par récurrence

$$\|D_x^\beta D_y^\gamma D_\xi^\alpha b_0\| \leq C_{\alpha\beta\gamma} \overbrace{\|\cdot\|}^{|\delta| + m = |\beta| - |\alpha|} \|e_\xi D^\delta g_y\|_{\frac{m}{2}}$$

Sachant que \hat{g} est à support compact, il vient

$$\|D_x^\beta D_y^\gamma D_\xi^\alpha b_0\| \leq C'_{\alpha\beta\gamma} \langle \xi \rangle^{\frac{|\beta| - |\alpha|}{2}} .$$

On considère en tant que fonction de x, ξ , $b_1(x, \xi, y, \xi_0) = b_0(\langle \xi_0 \rangle^{-\frac{1}{2}} x, \langle \xi_0 \rangle^{\frac{1}{2}} \xi, y)$ dans $U(\xi_0) = \mathbb{R}^n \times V_c(\xi_0)$ ou $V_c(\xi_0)$ est la boule de centre ξ_0 et de rayon c où c est une constante assez petite. On obtient pour b_1 et ses dérivées, des majorations L^2 , indépendantes de y et de ξ_0 . On en déduit donc des majorations L^∞ dans $\mathbb{R}^n \times V_{\frac{c}{2}}(\xi_0)$ et en revenant à b_0 .

$$(1.5) \quad |D_x^\beta D_y^\gamma D_\xi^\alpha b_0| \leq C''_{\alpha\beta\gamma} \langle \xi \rangle^{\frac{|\beta| - |\alpha|}{2}} .$$

Si B est continu $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$, les calculs menant à (1.4) sont corrects et le lemme 4.5 de [2] nous donne à la suite de (1.5)

$$|b_{(\beta)}^{(\alpha)}| \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{\frac{|\beta| - |\alpha|}{2}}$$

les constantes $C_{\alpha\beta}$ dépendent seulement des normes des opérateurs $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$.

Dans le cas général, on approxime B par des opérateurs continus $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$.

Soit $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 au voisinage de l'origine. Pour $0 < \varepsilon \leq 1$, on pose

$$p_\varepsilon(x, \xi) = h(\varepsilon x) \quad q_\varepsilon(x, \xi) = h(\varepsilon \xi)$$

$$P_\varepsilon = p_\varepsilon(x, D) \quad Q_\varepsilon = q_\varepsilon(x, D) \quad B_\varepsilon = P_\varepsilon B Q_\varepsilon .$$

Les opérateurs B_ε sont régularisants et leurs symboles b_ε convergent dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ vers un symbole b de $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0$. Si $u \in \mathcal{S}$.

$$b(x, D)u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon(x, D)u = Bu .$$

La démonstration montre que les noyaux des opérateurs $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$ définissent la même topologie sur $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0$ que les semi-normes des symboles.

Remarque (1.6) : En fait on peut démontrer le même résultat pour les opérateurs de $\mathcal{L}_{\rho, \rho}^m$ $0 \leq \rho < 1$ et pour des opérateurs plus généraux opérant dans des espaces de Sobolev avec poids.

§ 2. OPERATEURS DE TYPE (Φ, φ)

Nous considérons ici $\Phi, \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ une paire de fonctions poids au sens de [2] d'un type très simple mais qui nous suffira pour les applications.

Nous supposons que Φ et φ sont de classe C^1 (en fait on peut toujours trouver $\hat{\Phi}$ et $\hat{\varphi}$, C^∞ équivalentes à Φ, φ c'est à dire définissant les mêmes espaces), que $\Phi/\varphi = \langle \xi \rangle$, et qu'il existe des constantes c et C telles que

$$(2.1) \quad c \Phi \leq \langle \xi \rangle \leq C \Phi^2$$

$$(2.2) \quad |\nabla_{\xi} \Phi| \leq C, \quad |\nabla_x \Phi| \leq C \langle \xi \rangle$$

Ceci suffit pour affirmer que Φ, φ sont des fonctions poids (voir [2] 1.9).

Définition (2.3) : $M, m \in \mathbb{R}$, $S^{M, m}(\Phi, \varphi)$ est l'espace des symboles a tels que chaque semi-norme

$$p_{\alpha\beta}(a) = \sup |a_{(\beta)}^{(\alpha)} \Phi^{-M + |\alpha|} \varphi^{-m + |\beta|}|$$

soit finie.

C'est un espace de Fréchet, on définit les opérateurs correspondants $(\mathcal{L}^{M, m}(\Phi, \varphi))$ et les espaces de Sobolev associés $H^{K, k}$, tout comme au paragraphe 1.

(2.4) Notons qu'étant donné 4 réels M, m, K, k il existe $A \in \mathcal{L}^{M, m}$ isomorphisme topologique

$$A : H^{M+K, m+k} \rightarrow H^{K, k} ,$$

Comme au 1 nous pouvons énoncer le théorème :

Théorème (2.5) : Une application linéaire $B : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ est dans $\mathcal{L}^{0,0}$ si et seulement si, pour tous $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_+)^n$ l'opérateur $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$ a une extension continue $H^{-|\alpha|, -|\beta|} \rightarrow L^2$.

Preuve : La condition est nécessaire car si $B = b(x, D)$ est dans $\mathcal{L}^{0,0}$, alors $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$ appartient à $\mathcal{L}^{-|\alpha|, -|\beta|}$ et a pour symbole $b_{(\beta)}^{(\alpha)}$.

Pour démontrer la réciproque, nous commençons par remarquer :

$$\phi \geq \langle \xi \rangle^{1/2} \quad \psi \geq \langle \xi \rangle^{-1/2}$$

Si on note que $H^{\frac{|\beta| - |\alpha|}{2}} \subset H^{-|\alpha|, -|\beta|}$ on voit que B satisfait les conditions du théorème (1.3) donc que $B = b(x, D)$ avec $b \in S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0$.

Ceci prouve le cas $N = 0$ de l'assertion

$$(*)_N \quad |b_{(\beta)}^{(\alpha)}| \leq C_{\alpha\beta N} (\phi\psi)^{-\frac{N}{2}} \langle \xi \rangle^{-\frac{|\beta| - |\alpha|}{2}} \text{ pour } |\alpha - \beta| = N$$

Supposons $(*)_N$ démontrée pour $N = M - 1 \geq 0$ et supposons $|\alpha' + \beta'| = M$. Soit $b' = b_{(\beta')}^{(\alpha')}$ $a' = \phi^{|\alpha'|} \psi^{|\beta'|}$ et soit B', A' les opérateurs correspondants.

Alors

$$(B'A')_{(\beta)}^{(\alpha)} = \sum_{\gamma, \delta} \binom{\alpha}{\beta} \binom{\gamma}{\delta} B_{(\beta' - \delta - \beta)}^{(\alpha' - \gamma + \alpha)} A'_{(\delta)}$$

Vu les hypothèses sur B et la définition de A' on a

$$(B'A')_{(\beta)}^{(\alpha)} : H^{-|\alpha|, -|\beta|} \rightarrow L^2$$

et donc $B'A' \in \mathcal{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0$.

D'après le calcul symbolique pour les opérateurs de type $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$B' A'$ a pour symbole p avec

$$p - a' b' - \sum_{0 < |\alpha| < N} (\alpha!)^{-1} b'^{(\alpha)} a'_{(\alpha)} \in S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0 .$$

Vu l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $a' b' \in S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0$. Et de

$$(a' b')_{(\beta)}^{(\alpha)} = \sum_{\delta} \binom{\alpha}{\beta} \binom{\gamma}{\delta} b_{(\beta' - \delta + \beta)}^{(\alpha' - \gamma + \alpha)} a'_{(\delta)}^{(\gamma)}$$

on déduit

$$|b_{(\beta' + \beta)}^{(\alpha' + \alpha)}| \leq C_{\alpha\beta} (a')^{-1}_{\langle \xi \rangle} \frac{|\beta| - |\alpha|}{2} = C_{\alpha\beta} (\Phi \varphi)^{-N/2}_{\langle \xi \rangle} \frac{|\beta + \beta'| - |\alpha + \alpha'|}{2}$$

donc on a prouvé $(*)_M$ et donc $(*)_N$ pour tout $N \geq 0$.

Enfin étant donné α, β posons $N = |\alpha + \beta|$ et appliquons $(*)_N$

$$|b_{(\beta)}^{(\alpha)}| \leq C_{\alpha\beta N} (\Phi \varphi)^{-\frac{N}{2}}_{\langle \xi \rangle} \frac{|\beta| - |\alpha|}{2} = C_{\alpha\beta N} \Phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|} .$$

cqfd.

Nous considérons maintenant des opérateurs pseudo-différentiels qui sont des isomorphismes topologiques entre espaces de Sobolev.

Lemme (2.6) : Si $A \in \mathcal{L}^{0,0}$ est un isomorphisme topologique en tant qu'opérateur de $L^2 = H^{0,0}$, alors c'est un isomorphisme topologique dans $H^{M,m}$ pour tout $M, m \in \mathbb{R}$.

Preuve : Nous considérons d'abord le cas $m = -M$. Nous pouvons supposer $M \geq 0$ (le cas $M < 0$ s'obtenant par passage à l'adjoint). Nous allons montrer que si $(*)_{M,m} A$ est un isomorphisme topologique dans $H^{M,m}$ est vrai pour $-m = M \geq 0$ alors $(*)_{N,-N}$ est vrai si $M \leq N \leq M + \frac{1}{2}$.

On sait que A est continu dans $H^{N,-N}$ et qu'il est injectif $(\text{car } H^{N,-N} \subset H^{M,-M})$. Soit $v \in H^{N,-N}$, et $u \in H^{M,-M}$ tel que $Au = v$.

Soit $P \in \mathcal{L}^{\varepsilon, -\varepsilon}$ ayant pour symbole $\langle \xi \rangle^\varepsilon = \phi^\varepsilon \varphi^{-\varepsilon}$ ou $\varepsilon = N - M \leq \frac{1}{2}$.

P est un isomorphisme topologique de $H^{N, -N}$ sur $H^{M, -M}$. D'après (2.3) on voit que

$[A, P] = AP - PA$ est dans $\mathcal{L}^{\varepsilon - \frac{1}{2}, -\varepsilon + \frac{1}{2}} \subset \mathcal{L}^{0,0}$

$$Pu = PA^{-1}v = A^{-1}Pv + A^{-1}[A, P]A^{-1}v \in H^{M, -M}$$

Donc $u \in H^{N, -N}$ et A est surjective comme opérateurs dans $H^{N, -N}$.

On finit la démonstration en montrant que $(*)_{K, k}$ implique

$(*)_{K+\varepsilon, k+\varepsilon}$ pour tout ε , $0 \leq \varepsilon \leq 1$, à l'aide d'un opérateur $Q \in \mathcal{L}^{\varepsilon, \varepsilon}$ isomorphisme topologique de $H^{K+\varepsilon, k+\varepsilon}$ sur $H^{K, k}$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème fondamental.

Théorème (2.7) : Supposons que $A \in \mathcal{L}^{0,0}$ soit un isomorphisme topologique de $L^2 = H^{0,0}$. Alors l'inverse est dans $\mathcal{L}^{0,0}$.

Preuve : Soit B l'inverse. Si P opère $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ (comme D_j ou ix_j), alors

$$L_p B = [P, B] = B[A, P]B$$

Donc les opérateurs $\beta_{(\beta)}^{(\alpha)}$ s'expriment comme combinaisons linéaires de produits de la forme

$$B\pi \begin{pmatrix} \alpha(j) \\ \beta(j) \end{pmatrix} B = \sum \alpha(j) = \alpha \quad \sum \beta(j) = \beta.$$

Les opérateurs $A_{\beta(j)}^{\alpha(j)}$ sont continus de $H^{M-|\alpha(j)|, m-|\beta(j)|}$ dans $H^{M, m}$ et le lemme montre que B (inverse de A) est un isomorphisme topologique de $H^{M, m}$. Donc $B_{(\beta)}^{(\alpha)}$ est continu $H^{-|\alpha|, -|\beta|}$ dans L^2 et par le théorème (2.5) B est dans $\mathcal{L}^{0,0}$.

Remarque (2.8) : En utilisant des isomorphismes entre espaces de Sobolev (2.4), on entend de suite le théorème à un opérateur de $\mathcal{L}^{M, m}$ isomorphisme de $H^{K+M, k+m}$ sur $H^{K, k}$.

§ 3. PARAMETRIXES

Théorème (3.1) : Soit P un opérateur aux dérivées partielles (différentiel) d'ordre $m \geq 2$ à coefficients dans $C^\infty(\pi)$, π ouvert de \mathbb{R}^n . On suppose que son symbole p_m s'annule à l'ordre 2 au moins en tout point de la variété caractéristique :

$$\Sigma = \{(x, \xi) : p_m(x, \xi) = 0 \quad \xi \neq 0\},$$

et qu'il existe un cône Γ convexe propre tel que pour tout $(x, \xi) \in \pi \times \mathbb{R}^n$, $p_m(x, \xi)$ appartienne à Γ . Supposons que pour chaque compact $K \subset \pi$, $\forall s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C_{(K, s)}$ tel que

$$(3.2) \quad \|u\|_{m-1} \leq C_{(K, s)} (\|Pu\| + \|u\|_{-s}) \quad u \in \mathcal{D}_K.$$

Alors P a une paramétrix à gauche dans $S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{1-m}$.

Preuve : L'hypothèse du cône permet de montrer

$$(3.3) \quad \begin{aligned} |p_m^{(\alpha)}|^2 &\leq C |p_m| \langle \xi \rangle^{m-2} \quad |\alpha| = 1 \\ |p_{m(\beta)}|^2 &\leq C |p_m| \langle \xi \rangle^m \quad |\beta| = 1 \quad \langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2} \\ &\quad (C \text{ constante convenable}) \end{aligned}$$

On peut alors montrer que (3.2) implique l'hypoellipticité avec perte d'une dérivée de P (voir [7]). D'ailleurs, Hörmander ([7]) donne des conditions algébriques sur P, faisant intervenir le symbole sous-principal, pour que (3.2) soit vérifiée.

Nous construisons des fonctions poids.

$$\begin{aligned} \text{Soit } a(x, \xi) &= |p_m(x, \xi)| + \langle \xi \rangle^{m-1} \\ \Phi &= [a \langle \xi \rangle^{2-m}]^{1/2} \quad \varphi = \Phi \langle \xi \rangle^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Alors } \Phi \varphi^{-1} = \langle \xi \rangle \quad \text{et } \Phi \geq \langle \xi \rangle^{1/2} \quad \text{donc } \varphi \geq \langle \xi \rangle^{-1/2}$$

$$\text{et aussi } \Phi \varphi = a \langle \xi \rangle^{1-m} \geq 1.$$

Les estimées (3.3) et (3.4) montrent

$$|\hat{\Phi}(\alpha)| \leq C \hat{\Phi}^{1-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|} \quad |\alpha + \beta| = 1$$

$$|\varphi(\alpha)| \leq C \varphi^{1-|\beta|} \hat{\Phi}^{-|\alpha|} \quad |\alpha + \beta| = 1 .$$

Ceci montre que $\hat{\Phi}$ et φ sont des fonctions poids locales (qu'on peut prolonger à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$). D'autre part on voit aisément que $P \in \mathcal{L}^{m, 2-m}(\pi)$.

La proposition (9.11) de [2] montre qu'une norme admissible sur $H^{m, 2-m}$ est donnée par $\|Pu\| + \|u\|_{m-1}$. Donc on obtient

$$\forall K \subset \pi \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad] C(K, s)$$

$$\|u\|_{m, 2-m} \leq C(\|Pu\| + \|u\|_{-s}) \quad u \in \mathcal{D}_K .$$

Soit π_0 un ouvert relativement compact dans π_1 . Soit une fonction $\varphi \geq 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(\pi_1)$ $\varphi \equiv 1$ sur π_0 . Posons $\hat{P} = P\varphi$. On a donc

$$\|\varphi u\|_{m, 2-m}^2 \leq C((\hat{P}^* \hat{P}u, u) + (S^* Su, u)) \quad u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

où S est compact de $H^{m, 2-m}$ dans L^2 .

Soit R un isomorphisme $H^{m, 2-m} \rightarrow L^2$.

Soit S l'opérateur pseudodifférentiel de symbole $(1 + \xi^2)^{-\frac{s}{2}}$.

On obtient

$$\|u\|_{m, 2-m}^2 \leq C(\hat{P}^* \hat{P}u, u) + (S^* Su, u) + ((1 - \varphi)R^* Ru, u) + (\varphi R^* R(1 - \varphi)u, u)$$

soit

$$\|u\|_{m, 2-m}^2 \leq C'(Qu, u).$$

Donc Q est un isomorphisme topologique de $H^{m, 2-m}$ sur $H^{-m, m-2}$ et d'après le théorème (2.7), il a un inverse $Q^{-1} \in \mathcal{L}^{-2m, 2m-4}$. Si on se restreint à π^0 , on obtient

$$Q^{-1}(P^*P + S^*S) \equiv I$$

soit $(Q^{-1}P^*)P \equiv I - Q^{-1}S^*S$.

Or $Q^{-1}S^*S$ est d'ordre strictement négatif, c'est-à-dire appartient à $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Donc la série de Neumann donne une paramétrix à gauche pour P.

cqfd.

BIBLIOGRAPHIE

- [0] R. Beals : Characterization of pseudodifferential operators and applications, à paraître.
 - [1] R. Beals : Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators II C.P.A.M. 27 (1974) 161-205.
 - [2] R. Beals : A general calculus of pseudodifferential operators. Duke Math. J. 42 (1975) 1-42.
 - [3] R. Beals and C. Fefferman : Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators I. C.P.A.M. 27 (1974) 1-24.
 - [4] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators. C.P.A.M. 27 (1974) 585-639.
 - [5] L. Boutet de Monvel, A. Grigis et B. Helffer : Paramétrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples. A paraître dans Astérisque.
 - [6] A. P. Calderon and R. Vaillancourt : On the boundedness of pseudodifferential operators. J. Math. Soc. Japan 23 (1971) 374-378.
 - [7] A. Grigis : Hypoellipticité et paramétrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles. A paraître dans Astérisque.
 - [8] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations. Proc. Symp. Pure Maths. vol. 10, vol. 10, AMS Providence, R.I. 1966, p.138-183.
 - [9] L. Hörmander : A class of pseudodifferential operators with double characteristics, Math. Annalen 217 (1975) 165-188.
-