

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

V. GUILLEMIN

**Travaux de Melrose sur le problème des « glancing rays »**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 18,*  
p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1975-1976\\_\\_\\_A19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976___A19_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

TRAVAUX DE MELROSE SUR LE PROBLEME  
=====

DES "GLANCING RAYS".  
=====

par V. GUILLEMIN

Exposé n° XVIII

6 avril 1976

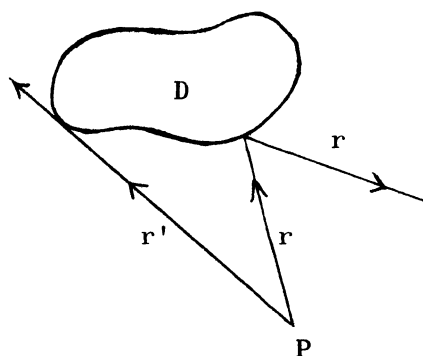


§ 1.

Considérons  $u$ , solution de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

à l'extérieur d'un obstacle  $D$  avec  $u(x,0) = \delta_p$  et  $u = 0$  sur  $\partial D$ .



En dehors de l'obstacle, les singularités de  $u$  se déplacent le long des bicaractéristiques venant de  $P$  (comme  $r$  et  $r'$ ). Mais que se passe-t-il quand les bicaractéristiques rencontrent l'obstacle ? S'il s'agit d'une bicaractéristique qui se réfléchit (comme  $r$ ) les singularités continuent à se déplacer le long de la bicaractéristique réfléchie (théorème de Lax-Nirenberg). La situation des bicaractéristiques de type  $r'$  est beaucoup plus compliquée. L'intuition physique dit qu'il doit y avoir des singularités de  $u$  (des "ombres") dans une région qui n'est pas atteinte par les bicaractéristiques venant de  $P$ . Mais voit-on ces singularités dans le front d'ondes de  $u$ , ou bien sont-elles des singularités plus subtiles, liés au comportement analytique de  $u$  ? Des résultats récents de Melrose ([1], [2]) et Taylor ([3]) indiquent que c'est bien le dernier cas qui se présente. Du point de vue  $C^\infty$  les singularités de type "glancing" se comportent comme dans l'optique géométrique où les ombres n'existent pas.

Les travaux de Melrose sur le problème de glancing sont basés sur une analyse approfondie de l'exemple suivant (exemple de Friedlander) :

$$(*) \quad (x_1 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad D = \{x \in \mathbb{R}^n, x_1 \leq 0\}.$$

XVIII.2

C'est évidemment une équation hyperbolique dans le complémentaire de D dont le symbole est

$$(x_1 + 1)\tau^2 - \sum \xi_i^2$$

et les bicaractéristiques sont données par les équations :

$$\dot{t} = 2(x_1 + 1)\tau, \quad \dot{\xi}_1 = \tau^2, \quad \dot{\xi}_i = 0$$

$$\dot{\tau} = 0, \quad \dot{x}_1 = 2\xi_1, \quad \dot{x}_i = 2\xi_i$$

En intégrant ces équations on trouve, pour des constantes  $a_1, b_1, c_1, \dots$  convenables,

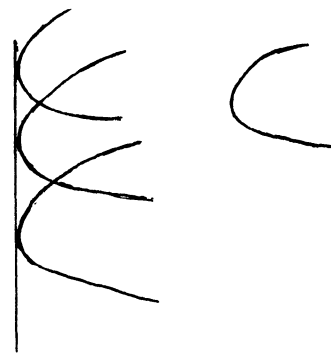
$$x_1 = a_1 s^2 + b_1 s + c_1$$

$$x_2 = a_2 s + b_2$$

$$\vdots$$

$$x_n = a_n s + b_n$$

Ici,  $a_1 = \tau^2 > 0$ . Quelques unes de ces courbes sont esquissées ci-dessous (pour le cas  $n=2$ )



$$x_1 = 0$$

Donc, il y a du "glancing" tout le long du bord de D. Pour résoudre l'équation (\*) nous faisons une transformée de Fourier dans les variables  $t, x_2, \dots$ , qui transforme (\*) en une équation différentielle ordinaire

$$\left(\frac{d^2}{dx_1^2} + (x_1 + 1)\tau^2 - \varepsilon_2^2 - \dots - \varepsilon_n^2\right)\hat{u} = 0$$

Posant  $\zeta = \tau^{-1/3}(\varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 - (x_1 + 1)\tau^2)$ . Il vient

$$(**) \quad \frac{d^2 \hat{u}}{d\zeta^2}(\zeta, \rho) = \zeta \hat{u}(\zeta, \rho)$$

avec  $\rho = (\tau, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ . Rappelons qu'une solution de (\*\*) est la fonction d'Airy, qui peut s'exprimer comme une intégrale oscillante

$$(***) \quad \text{Ai}(\zeta) = \int e^{i(\theta \zeta - \theta^3/3)} d\theta$$

La fonction de phase  $\phi(\zeta, \theta) = \zeta\theta - \theta^3/3$  qui apparaît dans cette intégrale est une fonction de phase dégénérée du point de vue de Hörmander (présentant une singularité de "type pli"). Donc, pour résoudre des problèmes de diffraction, on est conduit à considérer des opérateurs intégraux avec des phases comme dans (\*\*\*) : les "opérateurs intégraux d'Airy" généralisant les opérateurs intégraux de Fourier. Melrose a réussi à donner un calcul symbolique pour cette classe d'opérateurs dans laquelle il construit les paramétrixes pour des problèmes de diffraction.

Les constructions de [1] sont trop compliquées pour qu'on puisse les décrire ici. Heureusement, Melrose a démontré un résultat "symplectique" qui simplifie énormément les démonstrations de [1]. C'est ce résultat qui sera exposé ici.

## § 2.

Il s'agit de la "conjecture de Sato". Soit  $X$  une variété symplectique, soit  $F$  et  $G$  des hypersurfaces de  $X$  (définies par des équations  $f = 0$  et  $g = 0$ ) et soit  $p \in F \cap G$ . Nous dirons que  $F$  et  $G$  sont "glancing" du point  $p$  si

- i)  $df_p$  et  $dg_p$  sont linéairement indépendantes,
- ii)  $\{f, g\}(p) = 0$ ,
- iii)  $\{f, \{f, g\}\}(p), \{g, \{g, f\}\}(p) \neq 0$ .

Remarques : 1) C'est évident que i), ii), iii) ne dépend pas du choix de  $f, g$ .

2) Si  $\dim X = 2$ , nous laissons tomber la condition i); (sinon la définition devient vide).

3) Soit  $D$  un domaine convexe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $g(x, \xi)$  un opérateur hyperbolique sur  $\mathbb{R}^n$  de symbole  $g(x, \xi)$ . Supposons que pour  $x \in D$  la bicaractéristique passant par  $(x, \xi)$  est "glancing". Ceci veut dire que

$$\Sigma \frac{\partial g}{\partial \xi_i}(x, \xi) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

est tangent à  $\partial D$ . Donc, si  $\partial D$  est défini par l'équation  $f = f(x) = 0$ , on a  $\{f, g\}(x, \xi) = 0$ . Donc les hypersurfaces dans  $T^*\mathbb{R}^n$  définie par les équations  $f = 0$  et  $g = 0$  sont "glancing" au point  $p$ . La condition iii) est une condition de convexité sur  $D$ .

La conjecture de Sato dit que si  $\{X, F, G, p\}$  et  $\{X', F', G', p'\}$  sont des couples d'hypersurfaces "glancing" avec  $\dim X = \dim X'$  alors il existe un germe de difféomorphisme symplectique

$$\phi : (X, p) \rightarrow (X', p') \quad \text{qui applique } (F, G) \text{ sur } (F', G').$$

(Remarque : Si  $X$  est le fibré cotangent d'une variété, et  $F$  et  $G$  sont des hypersurfaces homogènes, la conjecture dit plus. Elle dit que  $\phi$  peut être choisie homogène).

Dans le cas réel-analytique, la conjecture de Sato est fautive comme Oshima l'a démontré récemment. Elle est par contre vraie dans le cas  $C^\infty$ , c'est en effet l'objet du théorème de Melrose dont nous avons parlé auparavant. Nous allons en indiquer très brièvement la démonstration : considérons d'abord le cas de la dimension deux. Nous pouvons toujours choisir des coordonnées symplectiques  $(x, \xi)$  tel que  $p = 0$  et  $f = x$ ,  $G$  étant défini par  $g = 0$ , les conditions i, ii, iii sont équivalentes à  $\frac{\partial g}{\partial \xi}(0) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}(0) \neq 0$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x}(0) \neq 0$ . Par le théorème de préparation de Malgrange, on peut écrire

$$g = h(a(x) + b(x)\xi - \xi^2)$$

où  $h(0) \neq 0$  et  $a(0) = b(0) = 0$ . Par la transformation symplectique  $\bar{x} = x, \bar{\xi} = \xi - b(x)/2$ , on peut se réduire au cas  $b = 0$ . On peut aussi multiplier  $g$  par un terme non nul en 0, donc on peut supposer

$$g = a - \xi^2, \quad \frac{dg}{dx}(0) \neq 0$$

Enfin, on cherche une substitution symplectique  $\bar{x} = \phi(x), \bar{\xi} = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^{-1} \xi$  avec  $\phi(0) = 0, \frac{d\phi}{dx}(0) \neq 0$  telle que

$$(*) \quad \bar{x} - \bar{\xi}^2 = \rho(a(x) - \xi^2), \quad \rho(0) \neq 0.$$

Enfin, on cherche une substitution symplectique  $\bar{x} = \phi(x), \bar{\xi} = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^{-1} \xi$  avec  $\phi(0) = 0, \frac{d\phi}{dx}(0) \neq 0$  telle que

$$(*) \quad \bar{x} - \bar{\xi}^2 = \rho(a(x) - \xi^2), \quad \rho(0) \neq 0.$$

On est conduit à l'équation

$$\phi(x) = \left( \frac{3}{2} \int_0^x a(s)^{1/2} ds \right)^{2/3} \quad x > 0$$

(\*\*) et

$$\phi(x) = \left( \frac{3}{2} \int_0^{-x} (-a(-s))^{1/2} ds \right)^{2/3} \quad x < 0$$

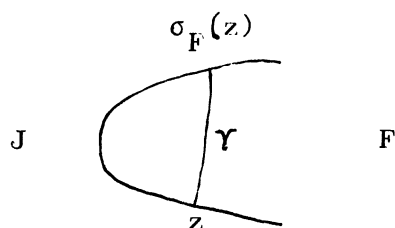
On voit facilement que le membre de gauche de (\*\*) est  $C^\infty$ .

Nous avons donc démontré :

Théorème : En dimension deux les courbes glancing sont toujours isomorphes à l'exemple canonique :  $f = x, g = x - \xi^2$ .

Si on essaie la même démonstration en dimension plus grande, on se heurte à des obstacles géométriques : soit  $J$  l'intersection de  $F$  et  $G$ . La démonstration que nous venons de donner, montre, en dimension plus grande, l'existence d'une involution canonique  $\sigma_F : J \rightarrow J$  qui est  $C^\infty$  et a la propriété indiquée sur notre dessin :





(Dans le dessin,  $\gamma$  est une courbe intégrale du champ hamiltonien  $H_f$  joignant les deux points  $z$  et  $\sigma_F$  de  $J$ ). Le même argument, sur  $G$ , donne une involution  $\sigma_G : J \rightarrow J$ , et  $\sigma_F$ ,  $\sigma_G$ ,  $\sigma_F \circ \sigma_G$ ,  $\sigma_F \circ \sigma_G^{-1}$  etc sont tous des invariants intrinsèques de la structure  $(X, F, G)$ . Donc, avant d'obtenir une forme canonique pour  $(X, F, G)$  en dimension  $n$  il faut d'abord trouver une forme canonique pour la structure  $(J, \sigma_F, \sigma_G, \text{etc...})$  en dimension  $n-2$ . Les théorèmes canoniques pour les  $(F, G, \sigma_F, \sigma_G, \dots)$  sont trop compliqués à donner ici. Nous nous bornons ici à indiquer les formes canoniques qu'on obtient en dimension supérieure pour les hypersurfaces "glancing".

I (cas inhomogène)  $f = x_1, g = \xi_1^2 - x_1 - \xi_N$

II (cas homogène)  $f = x_1, g = \xi_1^2 - x_1 \xi_{N-1}^2 - \xi_N \xi_{N-1}$

---

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Melrose, R. B. : Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems, Duke J., to appear.
  - [2] Melrose, R. B. : Microlocal parametrices for boundary value problems with gliding rays, in preparation.
  - [3] Taylor, M. E. : Grazing rays and reflections of singularities of solutions to wave equations, Comm. Pure Appl. Math. to appear.
-