

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

N. SHIMAKURA

## Équations différentielles provenant de la génétique de population

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1975-1976), exp. n° 15,  
p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1975-1976\\_\\_\\_A16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976___A16_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE

ENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   G O U L A O Û I C - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

EQUATIONS DIFFERENTIELLES PROVENANT DE  
-----  
LA GENETIQUE DE POPULATION  
-----

par N. SHIMAKURA

Exposé n° XV

2 Mars 1976



Dans la génétique de population, on traite souvent l'équation de Kolmogorov

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = 0, \quad (1)$$

pour étudier le processus stochastique qui intervient, où  $t$  est la variable du temps (la génération) et  $\mathcal{L}$  est un certain opérateur elliptique du second ordre des variables  $x = (x_1, \dots, x_n)$  parcourant l'espace d'état  $\Omega$ . Quand il s'agit d'une seule trajectoire génétique dans une population de  $n+1$  allèles neutres  $A_j$  ( $0 \leq j \leq n$ ) de fréquences  $x_j$ , les  $x_j$  sont non-négatives et liées par une seule relation  $\sum_{j=0}^n x_j = 1$ . En prenant  $x = (x_1, \dots, x_n)$  comme variables indépendantes,  $x$  parcourant  $n$ -simplexe

$$\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_j > 0 \ (0 \leq j \leq n)\}, \text{ où } x_0 = 1 - \sum_{j=1}^n x_j \quad (2)$$

et  $\mathcal{L}$  devient de la forme

$$\mathcal{L}u(x) = - \sum_{j,k=1}^n (\delta_{jk} x_j - x_j x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^n M_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad (3)$$

où les coefficients  $M_j(x)$  ( $1 \leq j \leq n$ ) dépendent du modèle théorique qu'on considère ([2], [4], [5] et [6]).

Comme  $\mathcal{L}$  est dégénéré partout sur  $\partial\Omega$ , les réalisations de  $\mathcal{L}$  comme opérateur dépendent aussi des  $M_j(x)$ . Dans cet exposé, nous traitons le cas où

$$M_j(x) = x_j \sum_{k=0}^n (1 + \omega_k) - (1 + \omega_j), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (4)$$

les  $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$  étant paramètres réels ([2], [4] et [6]).

C'est-à-dire, nous considérons l'équation (1) avec  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\omega}$ , où

$$\mathcal{L}_{\omega} u = - \sum_{j,k=1}^n (\delta_{jk} x_j - x_j x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=0}^n (1 + \omega_k) \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n (1 + \omega_j) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad (5)$$

Cette restriction nous permet de résoudre le problème de Cauchy pour (1) d'une manière explicite.

§ 1. REALISATIONS DE  $\mathcal{L}_{\tilde{\omega}}$  COMME OPERATEURS AUTO-ADJOINTS

Munissons à  $\Omega$  de l'élément de volume

$$dx_{\tilde{\omega}} = x^{\tilde{\omega}} dx, \quad \text{où } x^{\tilde{\omega}} = x_0^{\omega} x_1^{\omega} \dots x_n^{\omega}, \quad (6)$$

et désignons par  $\mathcal{H}_{\omega}$  l'espace hilbertien formé par toutes les fonctions complexes à carrés sommables sur  $\Omega$  par rapport à  $dx_{\tilde{\omega}}$ . Alors  $1 \in \mathcal{H}_{\omega}$  si et seulement si

$$\omega_j > -1, \quad \text{pour tout } 0 \leq j \leq n. \quad (7)$$

Il nous convient d'introduire un autre produit scalaire

$$a_{\tilde{\omega}}(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j, k=1}^n (\delta_{jk} x_j - x_j x_k) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_k} + u \bar{v} \right\} dx_{\tilde{\omega}}, \quad (8)$$

si cette expression a un sens. Soient alors,

$\mathcal{V}_{\tilde{\omega}}$  = le complété de  $C^{\infty}(\bar{\Omega})$  par rapport à  $a_{\tilde{\omega}}$   
(définition possible si et seulement si (7) a lieu), et

$\mathcal{V}_{\tilde{\omega}}^{\circ}$  = le complété de  $C_0^{\infty}(\Omega)$  par rapport à  $a_{\tilde{\omega}}$   
(définition possible sans aucune hypothèse sur  $\tilde{\omega}$ ).

Nous voyons que

$$\mathcal{V}_{\tilde{\omega}}^{\circ} = \mathcal{V}_{\tilde{\omega}} \text{ si et seulement si } \omega_j \geq 0 \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n. \quad (9)$$

Et nous définissons les deux réalisations  $L_{\tilde{\omega}}$  et  $\Lambda_{\tilde{\omega}}$  comme suit :

$L_{\tilde{\omega}}$  = l'extension de Friedrichs de  $\mathcal{L}_{\tilde{\omega}}|C^{\infty}(\bar{\Omega})$ , et,

$\Lambda_{\tilde{\omega}}$  = l'extension de Friedrichs de  $\mathcal{L}_{\tilde{\omega}}|C_0^{\infty}(\Omega)$ .

Evidemment,  $L_{\tilde{\omega}} = \Lambda_{\tilde{\omega}}$  si et seulement si (9) a lieu. De toute façon,  $L_{\tilde{\omega}}$  (si elle existe) et  $\Lambda_{\tilde{\omega}}$  sont opérateurs auto-adjoints dans  $\mathcal{H}_{\omega}$  de domaines  $D(L_{\tilde{\omega}})$  et  $D(\Lambda_{\tilde{\omega}})$  denses . . .

§ 2. ETUDE DE  $L_\omega$  SOUS L'HYPOTHESE (7)

Proposition 1 : Posons

$$l_p = p(p+k), \quad p = 0, 1, 2, \dots \text{ où } k = n + \sum_{j=0}^n \omega_j, \quad (10)$$

Alors,  $\{l_p\}_p^\infty$  est le spectre de  $L_\omega$  dont chacune  $l_p$  est une valeur propre de multiplicité  $N_p = \binom{n+p-1}{p}$ . Le sous-espace propre  $\mathbb{E}_p = \mathbb{E}_p^{(\tilde{\omega})}$  appartenant à  $l_p$  est engendré par certains  $N_p$  polynômes d'ordre  $p$ .

Soit  $\mathbb{E}_p = \mathbb{E}_p^{(\tilde{\omega})}$  la projection orthogonale de  $\mathcal{K}_\omega$  sur  $\mathbb{E}_p$  (par abus de notations).  $\mathbb{E}_p$  est alors un opérateur intégral à noyau  $E_p(x,y)$  :

$$u \in \mathcal{K}_\omega \rightarrow (\mathbb{E}_p u)(x) = \int_\Omega E_p(x,y)u(y)dy_\omega, \quad p \geq 0. \quad (11)$$

Posons maintenant, pour  $t > 0$ , et en supposant que  $k > 0$ ,

$$\Psi(t;x,y) = \sum_{p=0}^\infty \frac{1}{2^{p+k}} \left\{ \text{Min} \left( t, \frac{1}{t} \right) \right\}^{2p+k} E_p(x,y) = \Psi^{(\tilde{\omega})}(t;x,y) \quad (12)$$

La somme a un sens si  $(t,x,y)$  satisfait à l'une des conditions suivantes :

$$\begin{cases} t > 0, \quad t \neq 1 \quad \text{et} \quad (x,y) \in \overline{\Omega \times \Omega}; \quad \text{ou bien} \\ t = 1, \quad (x,y) \in \overline{\Omega \times \Omega} \quad \text{et} \quad x \neq y. \end{cases} \quad (13)$$

Proposition 2 : Supposons (7) et que  $k > 0$ . Si  $(t,x,y)$  satisfait à (13), nous avons

$$\Psi(t;x,y) = \int_0^\infty \tilde{\mathfrak{J}}(s^2; x,y) e^{-s(t+\frac{1}{t})} s^{k-1} ds \quad (14)$$

$$= \Gamma(k) \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \left( t + \frac{1}{t} - 2 \sum_{j=0}^n \varrho_j \sqrt{x_j y_j} \right)^{-k} M_\omega(d\tilde{\varrho}), \quad (15)$$

où

$$\begin{cases} \tilde{\mathfrak{J}}(C;x,y) = \tilde{\mathfrak{J}}^{(\tilde{\omega})}(C;x,y) = \prod_{j=0}^n \mathcal{J}_{\omega_j}(C x_j y_j) \\ \text{avec } \mathcal{J}_\nu(z) = z^{-\nu/2} I_\nu(2\sqrt{z}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!(k+\nu)!}; \end{cases} \quad (14)'$$

$$M_{\tilde{\omega}}(d\tilde{\theta}) = \left\{ \prod_{j=0}^n \frac{(1 - \theta_j^2)^{\omega_j - \frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\omega_j + \frac{1}{2})} \right\} d\theta_0 \wedge \dots \wedge d\theta_n \quad \text{et } \tilde{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n), \quad (15)'$$

Cette fonction génératrice  $\psi(t; x, y)$  joue un rôle essentiel dans cet exposé. D'abord, sous l'hypothèse de la proposition 2, nous avons :

$$E_p(x, y) = (2p + k)\Gamma(k) \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 C_{2p}^k \left( \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \sqrt{x_j y_j} \right) M_{\tilde{\omega}}(d\tilde{\theta}), \quad (16)$$

où les  $C_q^k(z)$  sont des polynômes de Gegenbauer définis par  $(t^2 - 2zt + 1)^{-k} = \sum_{q=0}^{\infty} t^q C_q^k(z)$ .

Soit maintenant  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\ell\}_{p=0}^{\infty}$ . Alors, il existe l'inverse  $(L_{\tilde{\omega}} + \lambda I)^{-1}$  de  $L_{\tilde{\omega}} + \lambda I$ . Il est un opérateur intégral à noyau  $G(x, y; \lambda)$  :

$$(L_{\tilde{\omega}} + \lambda I)^{-1} u(x) = \int_{\Omega} G(x, y; \lambda) u(y) dy_{\tilde{\omega}}.$$

Nous appelons  $G(x, y; \lambda)$  la fonction de Green pour  $L_{\tilde{\omega}} + \lambda I$ .

**Théorème 3** : Supposons (7) et que  $k > 0$ . Alors, pour  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\ell\}_{p=0}^{\infty}$ , la fonction de Green  $G(x, y; \lambda)$  est donnée par les formules suivantes :

$$G(x, y; \lambda) = G^{(\tilde{\omega})}(x, y; \lambda) = 2 \int_0^{\infty} \psi(t; x, y) t^{2i\mu - 1} dt \quad (17)_1$$

$$= 4 \int_0^{\infty} \mathfrak{F}(s^2; x, y) K_{2i\mu}(2S) S^{k-1} ds \quad (17)_2$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \Gamma(p + \frac{k}{2} + i\mu) \Gamma(p + \frac{k}{2} - i\mu) F_p(x, y) \quad (17)_3$$

$$= A(\tilde{\omega}, \lambda) \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 {}_2F_1(k + 2i\mu, k - 2i\mu; k + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 + \sum_{j=0}^n \theta_j \sqrt{x_j y_j})) M_{\tilde{\omega}}(d\tilde{\theta}), \quad (17)_4$$

où l'on suppose que  $(x, y) \in \overline{\Omega \times \Omega}$  et que  $x \neq y$ , et

$$\mu = (\lambda - \frac{k^2}{4})^{1/2}, \quad A(\tilde{\omega}, \lambda) = 2^{2-2k} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(k+2i\mu)\Gamma(k-2i\mu)}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} \quad (17)_5$$

Ici encore,  $F_p(x, y)$  est le coefficient de  $C^p$  dans  $\mathfrak{F}(C; x, y)$ ,  $K$  est la fonction

de Bessel modifiée de Kelvin et  ${}_2F_1$  est la série hypergéométrique de Gauss.

Soit ensuite  $t > 0$ . Le semi-groupe  $e^{-tL_{\tilde{\omega}}}$  engendré par  $L_{\tilde{\omega}}$  est aussi un opérateur intégral à noyau  $Z(t;x,y)$  :

$$e^{-tL_{\tilde{\omega}}} u(x) = \int_{\Omega} Z(t;x,y) u(y) dy_{\tilde{\omega}} .$$

Nous appelons  $Z(t;x,y)$  la fonction de Green pour  $\frac{\partial}{\partial t} + L_{\tilde{\omega}}$ .

**Théorème 4** : Supposons (7) et que  $k > 0$ . Alors la fonction de Green  $Z(t;x,y)$  pour  $\frac{\partial}{\partial t} + L_{\tilde{\omega}}$  est donnée par la formule suivante :

$$Z(t;x,y) = Z^{(\tilde{\omega})}(t;x,y) = \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 U(t, \sum_{j=0}^n \vartheta_j \sqrt{x_j y_j}) M_{\tilde{\omega}}(d\tilde{\vartheta}), \quad (18)$$

avec  $U(t,Z) = \Gamma(k) \sum_{q=0}^{\infty} (q+k) C_q^k(z) e^{-q(q+2k)t/4}$ .

**Proposition 5** : Supposons que  $\omega_j \geq -1/2$  pour  $0 \leq j \leq n$ . Alors, pour  $0 < t \leq T$  ( $T$  est fini mais arbitraire) et  $(x,y) \in \overline{\Omega \times \Omega}$ , nous avons

$$|Z(t;x,y)| \leq Cte t^{-n/2} e^{-\frac{1}{t} \sum_{j=0}^n (\sqrt{x_j} - \sqrt{y_j})^2} \prod_{j=0}^n (t + \sqrt{x_j y_j})^{-\omega_j - \frac{1}{2}} \quad (19)$$

Si nous fixons  $(x,y) \in \Omega \times \Omega$ , nous avons le développement asymptotique suivant lorsque  $t \downarrow 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(t;x,y) \sim (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{\sigma^2}{4t}} \left( \frac{\sigma}{2 \sin \frac{\sigma}{2}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{j=0}^n (x_j y_j)^{-\frac{\omega_j}{2} - \frac{1}{4}}, \\ \text{où } \cos \frac{\sigma}{2} = \frac{\sum_{j=0}^n \sqrt{x_j y_j}}{\prod_{j=0}^n (x_j y_j)} \text{ et } 0 \leq \sigma < \pi . \end{array} \right. \quad (20)$$

**La signification de la quantité  $\sigma$  dans (19)** : La matrice  $(\delta_{jk} x_j - x_j x_k)$  d'ordre  $n$  formée par les coefficients du second ordre de  $L_{\tilde{\omega}}$  induit une métrique riemannienne sur  $\Omega$

$$ds^2 = \sum_{j=0}^n x_j^{-1} (dx_j)^2 = 4 \sum_{j=0}^n (dX_j)^2, \text{ où } X_j = \sqrt{x_j} \text{ (} 0 \leq j \leq n \text{)}. \quad (21)$$

Donc,  $\frac{1}{4} ds^2$  est précisément la métrique riemannienne naturelle sur  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  restreinte à la partie  $\Sigma = \{ \tilde{X} = (X_0, X_1, \dots, X_n) \in S^n; X_j > 0 \text{ (} 0 \leq j \leq n \text{)} \}$ .



$\sigma$  est, par conséquent, égale à la distance géodésique entre  $x$  et  $y$  par rapport à cette métrique.

§ 3. ETUDE DE  $\Lambda_{\tilde{\omega}}$

Soit  $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^{n+1}$  quelconque. Supposons qu'il existe au moins un  $j$  ( $0 \leq j \leq n$ ) pour lequel  $\omega_j < 0$  pour que  $L_{\tilde{\omega}}$  et  $\Lambda_{\tilde{\omega}}$  soient distinctes :

$$J_- = \{j ; 0 \leq j \leq n, \omega_j < 0\} \neq \emptyset . \quad (22)$$

Posons

$$\begin{cases} \tilde{\omega}' = (\omega'_0, \omega'_1, \dots, \omega'_n) \text{ avec } \omega'_j = |\omega_j|, 0 \leq j \leq n ; \text{ et } , \\ \nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) \text{ avec } \nu_j = (\omega'_j - \omega_j)/2, 0 \leq j \leq n . \end{cases} \quad (23)$$

Nous pouvons démontrer que  $D(\Lambda_{\tilde{\omega}}) = \{u \in \mathcal{H}_{\tilde{\omega}} ; x^{-\tilde{\nu}} u \in D(L_{\tilde{\omega}'})\}$  et que

$$\Lambda_{\tilde{\omega}} u = x^{\tilde{\nu}} (L_{\tilde{\omega}'} + \frac{k'^2 - k^2}{4}) (x^{-\tilde{\nu}} u) , \text{ où } k' = n + \sum_{j=0}^n \omega'_j . \quad (24)$$

D'où, nous avons la

Proposition 6 : Posons

$$\lambda_p = (p + \frac{k' - k}{2}) (p + \frac{k' + k}{2}), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Alors  $\{\lambda_p\}_{p=0}^{\infty}$  est le spectre de  $\Lambda_{\tilde{\omega}}$  dont chacune est la valeur propre de multiplicité  $N_p = \binom{n+p-1}{p}$ . Le sous-espace propre  $\mathbb{E}'_p = \mathbb{E}'_p(\tilde{\omega})$  appartenant à  $\lambda_p$  est formé par les éléments de  $\mathbb{E}_p^{(\tilde{\omega}')}$  multipliés par  $x^{\tilde{\nu}}$ .

Nous pouvons alors définir la fonction de Green  $\mathcal{G}(x, y; \lambda)$  pour  $\Lambda_{\tilde{\omega}} + \lambda I$  et la fonction de Green  $\mathcal{B}(t; x, y)$  pour  $\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda_{\tilde{\omega}}$  comme suivant :

$$(\Lambda_{\tilde{\omega}} + \lambda I)^{-1} u(x) = \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, y; \lambda) u(y) dy_{\tilde{\omega}} , \text{ pour } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\lambda_p\}_{p=0}^{\infty} ; \text{ et}$$

$$e^{-t\Lambda_{\tilde{\omega}}} u(x) = \int_{\Omega} \mathcal{B}(t; x, y) u(y) dy_{\tilde{\omega}} , \text{ pour } t > 0.$$

Théorème 7 : Soient  $(x, y) \in \overline{\Omega \times \Omega}$ ,  $x \neq y$  et  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\lambda_p\}_{p=0}^{\infty}$ . Alors, nous avons

$$G(x, y; \lambda) = x \tilde{y} \tilde{y} G^{(\tilde{\omega}')} (x, y; \lambda + \frac{k'^2 - k^2}{4}), \quad (26)$$

où  $G^{(\tilde{\omega}')}$  est la fonction de Green étudiée dans le paragraphe 2.

Théorème 8 : Soient  $t > 0$  et  $(x, y) \in \overline{\Omega \times \Omega}$ . Alors, nous avons

$$B(t; x, y) = x \tilde{y} \tilde{y} Z^{(\tilde{\omega}')} (t; x, y) e^{(k^2 - k'^2)t/4} \quad (27)$$

où  $Z^{(\tilde{\omega}')}$  est la fonction de Green étudiée dans le paragraphe 2.

Signalons que  $\tilde{\omega}'$  satisfait à toutes les hypothèses sur  $\tilde{\omega}$  posées dans le paragraphe 2, donc que toutes les formules obtenues dans le paragraphe 2 y sont utilisables.

#### § 4. PROBLEME DE DIRICHLET NON HOMOGENE

Supposons toujours (22) sur  $\tilde{\omega}$ , et posons

$$S_j = \partial\Omega \cap \{x_j = 0\}, \quad 0 \leq j \leq n; \quad (28)$$

$$\text{et } S^- = \bigcup_{j \in J_-} S_j \quad (\neq \emptyset).$$

Chaque  $S_j$  est munie de l'élément de volume

$$dS_j(x') = \left| \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{dx_j} \right|, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (29)$$

Le problème de Dirichlet non homogène pour  $\mathcal{L}_{\tilde{\omega}}$  se pose comme suit : étant données une fonction  $f(x)$  sur  $\Omega$  et une fonction  $g(x')$  sur  $S^-$ , chercher une solution  $u(x)$  de l'équation

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\tilde{\omega}} u(x) = f(x), & \text{dans } \Omega \\ \text{et } u(x') = g(x'), & \text{sur } S^- . \end{cases} \quad (30)$$

Alors, la solution, si elle existe et unique, sera donnée par

$$u(x) = \int_{\Omega} \tilde{G}(x, y; 0) f(y) dy_{\tilde{\omega}} + \sum_{j \in J_-} \int_{S_j} \gamma_j(x, y') g(y') dS_j(y'). \quad (31)$$

Nous pouvons appeler les  $\{\gamma_j(x, y')\}_{j \in J_-}$  noyaux de Poisson pour  $\mathcal{L}_{\tilde{\omega}}$ . Ils sont calculés par les formules suivantes :

$$\gamma_j(x, y') = \lim_{\substack{y \rightarrow y' \\ y \in \Omega}} \{ \nu_j y^{\tilde{\omega}} \tilde{G}(x, y; 0) \}, \quad y' \in S_j, \quad j \in J_-, \quad x \in \Omega. \quad (32)$$

Voici des exemples lorsque

$$\omega_j = -1, \quad \text{pour tout } 0 \leq j \leq n. \quad (33)$$

Exemple 1 : La solution de l'équation

$$\begin{cases} - \sum_{j,k=1}^n (\delta_{jk} x_j - x_j x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = 1, & \text{dans } \Omega, \\ u(x') = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (34)$$

est donnée par

$$\begin{aligned} u(x) &= (n-1)! \int_0^{x_0} \dots \int_0^{x_n} \left( \sum_{j=0}^n u_j \right)^{-n} du_0 \wedge \dots \wedge du_n \\ &= \sum_{\substack{H \subset \{0, 1, \dots, n\} \\ H \neq \emptyset}} (-1)^{|H|} \left( \sum_{h \in H} x_h \right) \log \left( \sum_{h \in H} x_h \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Exemple 2 : La solution de l'équation

$$\begin{cases} - \sum_{j,k=1}^n (\delta_{jk} x_j - x_j x_k) \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_j \partial x_k} = 0 & \text{dans } \Omega. \\ u_p(x') = 1 & \text{sur } S_p \text{ et } u_p(x') = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus S_p \end{cases} \quad (36)$$

( $0 \leq p \leq n$ ) est donnée par

$$u_p(x) = \frac{\text{vol. } D_p(x)}{\text{vol. } \Omega}, \quad \text{où } D_p(x) = \left\{ y \in \Omega; \frac{y_j}{x_j} \leq \frac{y_p}{x_p} \quad (0 \leq j \leq n) \right\}. \quad (37)$$

**BIBLIOGRAPHIE**  
=====

- [1] Appell, P. et Kampé de Fériet, J. : Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite. Gauthiers-Villars.
  - [2] Grow, J. et Kimura, M. : Some genetic problems in natural populations. Proc., 3rd Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. Vol. IV (1956), 1-22.
  - [3] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. et Tricomi, F. : Higher transcendental functions. Vol. 2. Mc Graw-Hill.
  - [4] Fackerell, E. et Littler, R. : Transition densities for neutral multi-allele diffusion models. Biometrics 31 (1975), 117-123.
  - [5] Feller, W. : Diffusion process in genetics, Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. (1951), 227-246.
  - [6] Stewart, F. : Variability in the amount of heterozygosity maintained by neutral mutations. Preprint.
-