N. Shimakura

Équations différentielles provenant de la génétique de population

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 15, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A16_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1975-1976

EQUATIONS DIFFERENTIELLES PROVENANT DE LA GENETIQUE DE POPULATION

par N. SHIMAKURA

Exposé n° XV

2 Mars 1976

Dans la génétique de population, on traite souvent l'équation de Kolmogorov

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = 0 \ , \tag{1}$$

pour étudier le processus stochastique qui intervient, où t est la variable du temps (la génération) et $\mathcal{L}$ est un certain opérateur elliptique du second ordre des variables $x = (x_1, \ldots, x_n)$ parcourant l'espace d'état Ω. Quand il s'agit d'une seule trajectoire génétique dans une population de $n+1$ allèles neutres A_j $(0 \leq j \leq n)$ de fréquentés x_j, les x_j sont non-négatives et liées par une seule relation $\sum_{j=0}^{n} x_j = 1$. En prenant $x = (x_1, \ldots, x_n)$ comme variables indépendantes, x parcourant n-simplexe

$$\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_j > 0 \ (0 \leq j \leq n)\}, \text{ où } x_o = 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j \tag{2}$$

et $\mathcal{L}$ devient de la forme

$$\mathcal{L}u(x) = - \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{jk} x_j - x_j x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} M_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \ , \tag{3}$$

où les coefficients $M_j(x)$ $(1 \leq j \leq n)$ dépendent du modèle théorique qu'on considère ([2],[4],[5] et [6]).

Comme $\mathcal{L}$ est dégénéré partout sur $\partial\Omega$, les réalisations de $\mathcal{L}$ comme opérateur dépendent aussi des $M_j(x)$. Dans cet exposé, nous traitons le cas où

$$M_j(x) = x_j \sum_{k=0}^{n} (1 + \omega_k) - (1 + \omega_j), \quad 1 \leq j \leq n \ , \tag{4}$$

les $\tilde{\omega} = (\omega_o, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ étant paramètres réels ([2],[4] et [6]).

C'est-à-dire, nous considérons l'équation (1) avec $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\tilde{\omega}}$, où

$$\mathcal{L}_{\tilde{\omega}} u = - \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{jk} x_j - x_j x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=0}^{n} (1+\omega_k) \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} (1+\omega_j) \frac{\partial u}{\partial x_j} \ , \tag{5}$$

Cette restriction nous permet de résoudre le problème de Cauchy pour (1) d'une manière explicite.

§ 1. REALISATIONS DE $\mathcal{L}_{\tilde{\omega}}$ COMME OPERATEURS AUTO-ADJOINTS

Munissons à Ω de l'élément de volume

$$dx_{\tilde{\omega}} = x^{\tilde{\omega}} dx \ , \quad \text{où} \quad x^{\tilde{\omega}} = x_o^{\omega_o} x_1^{\omega_1} \dots x_n^{\omega_n} , \tag{6}$$

et désignons par $\mathcal{H}_w$ l'espace hilbertien formé par toutes les fonctions complexes à carrés sommables sur Ω par rapport à $dx_{\tilde{\omega}}$. Alors $1 \in \mathcal{H}_{\tilde{\omega}}$ si et seulement si

$$\omega_j > -1, \quad \text{pour tout } 0 \leq j \leq n. \tag{7}$$

Il nous convient d'introduire un autre produit scalaire

$$a_{\tilde{\omega}}(u,v) = \int_\Omega \{ \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{jk} x_j - x_j x_k) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_k} + u\bar{v} \} \, dx_{\tilde{\omega}} \ , \tag{8}$$

si cette expression a un sens. Soient alors,

$\mathcal{V}_{\tilde{\omega}}$ = le complété de $C^\infty(\bar{\Omega})$ par rapport à $a_{\tilde{\omega}}$
(définition possible si et seulement si (7) a lieu), et

$\mathring{\mathcal{V}}_{\tilde{\omega}}$ = le complété de $C_o^\infty(\Omega)$ par rapport à $a_{\tilde{\omega}}$
(définition possible sans aucune hypothèse sur $\tilde{\omega}$).

Nous voyons que

$$\mathring{\mathcal{V}}_{\tilde{\omega}} = \mathcal{V}_{\tilde{\omega}} \text{ si et seulement si } \omega_j \geq 0 \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n \ . \tag{9}$$

Et nous définissons les deux réalisations $L_{\tilde{\omega}}$ et $\Lambda_{\tilde{\omega}}$ comme suit :

$L_{\tilde{\omega}}$ = l'extension de Friedrichs de $\mathcal{L}_{\tilde{\omega}} | C^\infty(\bar{\Omega})$, et,

$\Lambda_{\tilde{\omega}}$ = l'extension de Friedrichs de $\mathcal{L}_{\tilde{\omega}} | C_o^\infty(\Omega)$.

Evidemment, $L_{\tilde{\omega}} = \Lambda_{\tilde{\omega}}$ si et seulement si (9) a lieu. De toute façon, $L_{\tilde{\omega}}$ (si elle existe) et $\Lambda_{\tilde{\omega}}$ sont opérateurs auto-adjoints dans $\mathcal{H}_\omega$ de domaines $D(L_{\tilde{\omega}})$ et $D(\Lambda_{\tilde{\omega}})$ denses . .

§ 2. ETUDE DE L_ω SOUS L'HYPOTHESE (7)

Proposition 1 : Posons

$$\ell_p = p(p+k),\ p = 0,\ 1,\ 2,\ldots \text{ où } k = n + \sum_{j=o}^{n} \omega_j, \tag{10}$$

Alors, $\{\ell_p\}_p^\infty$ est le spectre de $L_{\tilde{\omega}}$ dont chacune ℓ_p est une valeur propre de multiplicité $N_p = \binom{n+p-1}{p}$. Le sous-espace propre $\mathbb{E}_p = \mathbb{E}_p^{(\tilde{\omega})}$ appartenant à ℓ_p est engendré par certains N_p polynômes d'ordre p.

Soit $\mathbb{E}_p = \mathbb{E}_p^{(\tilde{\omega})}$ la projection orthogonale de $\mathcal{H}_{\tilde{\omega}}$ sur $\mathbb{E}_p$ (par abus de notations). $\mathbb{E}_p$ est alors un opérateur intégral à noyau $E_p(x,y)$:

$$u \in \mathcal{K}_{\tilde{\omega}} \to (\mathbb{E}_p u)(x) = \int_\Omega E_p(x,y)u(y)dy_{\tilde{\omega}}\ , \qquad p \geq 0\ . \tag{11}$$

Posons maintenant, pour $t > 0$, et en supposant que $k > 0$,

$$\Psi(t;x,y) = \sum_{p=o}^{\infty} \frac{1}{2p+k} \{\mathrm{Min}\,(t, \tfrac{1}{t})\}^{2p+k} E_p(x,y) = \Psi^{(\tilde{\omega})}(t;x,y) \tag{12}$$

La somme a un sens si (t,x,y) satisfait à l'une des conditions suivantes :

$$\begin{cases} t > 0,\ t \neq 1 \quad \text{et} \quad (x,y) \in \overline{\Omega\times\Omega}\ ;\ \text{ou bien} \\ t = 1,\ (x,y) \in \overline{\Omega\times\Omega} \quad \text{et} \quad x \neq y. \end{cases} \tag{13}$$

Proposition 2 : Supposons (7) et que $k > 0$. Si (t,x,y) satisfait à (13), nous avons

$$\Psi(t;x,y) = \int_0^\infty \mathfrak{J}(s^2\,;\,x,y)e^{-s(t+\frac{1}{t})}s^{k-1}ds \tag{14}$$

$$= \Gamma(k)\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\Big(t+\frac{1}{t}-2\sum_{j=o}^{n}\phi_j\sqrt{x_jy_j}\Big)^{-k} M_{\tilde{\omega}}(d\phi), \tag{15}$$

où

$$\begin{cases} \mathfrak{J}(C;x,y) = \mathfrak{J}^{(\tilde{\omega})}(C;x,y) = \prod_{j=o}^{n} \mathcal{J}_{\omega_j}(C\,x_jy_j) \\ \text{avec } \mathcal{J}_\nu(Z) = Z^{-\nu/2}\, I_\nu(2\sqrt{z}) = \displaystyle\sum_{k=o}^{\infty} \frac{z^k}{k!\,(k+\nu)!}\ ; \end{cases} \tag{14'}$$

$$M_{\widetilde{\omega}}(d\widetilde{\phi}) = \left\{ \prod_{j=0}^{n} \frac{(1-\phi_j^2)^{\omega_j - \frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\omega_j + \frac{1}{2})} \right\} d\phi_0 \wedge \cdots \wedge d\phi_n \quad \text{et} \quad \widetilde{\phi} = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n), \qquad (15)'$$

Cette fonction génératrice $\psi(t;x,y)$ joue un rôle essentiel dans cet exposé. D'abord, sous l'hypothèse de la proposition 2, nous avons :

$$E_p(x,y) = (2p+k)\Gamma(k) \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} C_{2p}^{k}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \sqrt{x_j y_j} \Big) M_{\widetilde{\omega}}(d\widetilde{\phi}), \qquad (16)$$

où les $C_q^k(z)$ sont des polynômes de Gegenbauer définis par
$(t^2 - 2zt + 1)^{-k} = \sum_{q=0}^{\infty} t^q C_q^k(z)$.

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{C}/\{-\ell_p\}_{p=0}^{\infty}$. Alors, il existe l'inverse $(L_{\widetilde{\omega}} + \lambda I)^{-1}$ de $L_{\widetilde{\omega}} + \lambda I$. Il est un opérateur intégral à noyau $G(x,y;\lambda)$:

$$(L_{\widetilde{\omega}} + \lambda I)^{-1} u(x) = \int_{\Omega} G(x,y;\lambda) u(y)\, dy_{\widetilde{\omega}} .$$

Nous appelons $G(x,y;\lambda)$ la fonction de Green pour $L_{\widetilde{\omega}} + \lambda I$.

<u>Théorème 3</u> : Supposons (7) et que $k > 0$. Alors, pour $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{-\ell_p\}_{p=0}^{\infty}$, la fonction de Green $G(x,y;\lambda)$ est donnée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} G(x,y;\lambda) &= G^{(\widetilde{\omega})}(x,y;\lambda) \\ &= 2\int_0^{\infty} \psi(t;x,y)\, t^{2i\mu - 1}\, dt & (17)_1 \\ &= 4\int_0^{\infty} \mathfrak{J}(s^2;x,y)\, K_{2i\mu}(2S) S^{k-1}\, ds & (17)_2 \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \Gamma(p + \tfrac{k}{2} + i\mu)\Gamma(p + \tfrac{k}{2} - i\mu) F_p(x,y) & (17)_3 \end{aligned}$$

$$= A(\widetilde{\omega},\lambda) \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} {}_2F_1\Big(k + 2i\mu, k - 2i\mu; k + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\big(1 + \sum_{j=0}^{n} \phi_j \sqrt{x_j y_j}\big)\Big) M_{\widetilde{\omega}}(d\widetilde{\phi}), \quad (17)_4$$

où l'on suppose que $(x,y) \in \overline{\Omega \times \Omega}$ et que $x \neq y$, et

$$\mu = \Big(\lambda - \frac{k^2}{4}\Big)^{1/2} , \quad A(\widetilde{\omega},\lambda) = 2^{2-2k} \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma(k+2i\mu)\Gamma(k-2i\mu)}{\Gamma(k + \frac{1}{2})} \qquad (17)_5$$

Ici encore, $F_p(x,y)$ est le coefficient de C^p dans $\mathfrak{J}(C;x,y)$, K est la fonction de Bessel modifiée de Kelvin et ${}_2F_1$ est la série hypergéométrique de Gauss.

Soit ensuite $t > 0$. Le semi-groupe $e^{-tL_{\tilde{\omega}}}$ engendré par $L_{\tilde{\omega}}$ est aussi un opérateur intégral à noyau $Z(t;x,y)$:

$$e^{-tL_{\tilde{\omega}}}u(x) = \int_\Omega Z(t;x,y)u(y)\,dy_{\tilde{\omega}} .$$

Nous appelons $Z(t;x,y)$ la fonction de Green pour $\frac{\partial}{\partial t} + L_{\tilde{\omega}}$.

Théorème 4 : Supposons (7) et que $k > 0$. Alors la fonction de Green $Z(t;x,y)$ pour $\frac{\partial}{\partial t} + L_{\tilde{\omega}}$ est donnée par la formule suivante :

$$Z(t;x,y) = Z^{(\tilde{\omega})}(t;x,y) = \int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1} U\Big(t, \sum_{j=o}^{n} \phi_j \sqrt{x_j y_j}\Big) M_{\tilde{\omega}}(d\tilde{\phi}), \qquad (18)$$

$$\text{avec } U(t,Z) = \Gamma(k) \sum_{q=o}^{\infty} (q+k) C_q^k(z) e^{-q(q+2k)t/4} .$$

Proposition 5 : Supposons que $\omega_j \geq -1/2$ pour $0 \leq j \leq n$. Alors, pour $0 < t \leq T$ (T est fini mais arbitraire) et $(x,y) \in \overline{\Omega \times \Omega}$, nous avons

$$|Z(t;x,y)| \leq \text{Cte}\; t^{-n/2} e^{-\frac{1}{t}\sum_{j=o}^{n}(\sqrt{x_j} - \sqrt{y_j})^2} \prod_{j=o}^{n} (t + \sqrt{x_j y_j})^{-\omega_j - \frac{1}{2}} \qquad (19)$$

Si nous fixons $(x,y) \in \Omega \times \Omega$, nous avons le développement asymptotique suivant lorsque $t \downarrow 0$:

$$\begin{cases} Z(t;x,y) \sim (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{\sigma^2}{4t}} \left(\dfrac{\sigma}{2\sin\frac{\sigma}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}} \displaystyle\prod_{j=o}^{n} (x_j y_j)^{-\frac{\omega_j}{2} - \frac{1}{4}}, & (20) \\ \text{où } \cos\frac{\sigma}{2} = \displaystyle\sum_{j=o}^{n} \sqrt{x_j y_j} \text{ et } 0 \leq \sigma < \pi . \end{cases}$$

La signification de la quantité σ dans (19) : La matrice $(\delta_{jk} x_j - x_j x_k)$ d'ordre n formée par les coefficients du second ordre de $\mathcal{L}_{\tilde{\omega}}$ induit une métrique riemannienne sur Ω

$$ds^2 = \sum_{j=o}^{n} x_j^{-1}(dx_j)^2 = 4 \sum_{j=o}^{n} (dX_j)^2 , \text{ où } X_j = \sqrt{x_j} \;(0 \leq j \leq n). \qquad (21)$$

Donc, $\frac{1}{4}ds^2$ est précisément la métrique riemannienne naturelle sur $S^n \subset R^{n+1}$ restreinte à la partie $\Sigma = \{\check{X} = (X_o, X_1, \ldots, X_n) \in S^n ; X_j > 0 \;\; (0 \leq j \leq n)\}$.

σ est, par conséquent, égale à la distance géodésique entre x et y par rapport à cette métrique.

§ 3. ETUDE DE $\Lambda_{\tilde{\omega}}$

Soit $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^{n+1}$ quelconque. Supposons qu'il existe au moins un j $(0 \leq j \leq n)$ pour lequel $\omega_j < 0$ pour que $L_{\tilde{\omega}}$ et $\Lambda_{\tilde{\omega}}$ soient distinctes :

$$J_- = \{j \,;\, 0 \leq j \leq n,\ \omega_j < 0\} \neq \emptyset . \tag{22}$$

Posons

$$\begin{cases} \tilde{\omega}' = (\omega_0', \omega_1', \ldots, \omega_n') \quad \text{avec} \quad \omega_j' = |\omega_j| \,,\ 0 \leq j \leq n \ ; \text{ et }, \\ \tilde{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n) \quad \text{avec} \quad \nu_j = (\omega_j' - \omega_j)/2 \,,\ 0 \leq j \leq n . \end{cases} \tag{23}$$

Nous pouvons démontrer que $D(\Lambda_{\tilde{\omega}}) = \{u \in \mathcal{H}_{\tilde{\omega}} \,;\, x^{-\tilde{\nu}} u \in D(L_{\tilde{\omega}'})\}$ et que

$$\Lambda_{\tilde{\omega}} u = x^{\tilde{\nu}} \Big(L_{\tilde{\omega}'} + \frac{k'^2 - k^2}{4}\Big)(x^{-\tilde{\nu}} u) \,, \text{ où } k' = n + \sum_{j=0}^{n} \omega_j' . \tag{24}$$

D'où, nous avons la

Proposition 6 : Posons

$$\lambda_p = \Big(p + \frac{k' - k}{2}\Big)\Big(p + \frac{k' + k}{2}\Big), \quad p = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

Alors $\{\lambda_p\}_{p=0}^{\infty}$ est le spectre de $\Lambda_{\tilde{\omega}}$ dont chacune est la valeur propre de multiplicité $N_p = \binom{n+p-1}{p}$. Le sous-espace propre $\mathbb{E}_p' = \mathbb{E}_p'^{(\tilde{\omega})}$ appartenant à λ_p est formé par les éléments de $\mathbb{E}_p^{(\tilde{\omega}')}$ multipliés par $x^{\tilde{\nu}}$.

Nous pouvons alors définir la fonction de Green $\mathcal{G}(x,y;\lambda)$ pour $\Lambda_{\tilde{\omega}} + \lambda I$ et la fonction de Green $\mathcal{B}(t;x,y)$ pour $\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda_{\tilde{\omega}}$ comme suivant :

$$(\Lambda_{\tilde{\omega}} + \lambda I)^{-1} u(x) = \int_{\Omega} \mathcal{G}(x,y;\lambda) u(y)\, dy_{\tilde{\omega}} \,, \text{ pour } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\lambda_p\}_{p=0}^{\infty} \ ; \text{ et}$$

$$e^{-t\Lambda_{\tilde{\omega}}} u(x) = \int_{\Omega} \mathcal{B}(t;x,y) u(y)\, dy_{\tilde{\omega}} \,, \quad \text{pour } t > 0.$$

__Théorème 7__ : Soient $(x,y) \in \overline{\Omega \times \Omega}$, $x \neq y$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\lambda_p\}_{p=o}^{\infty}$. Alors, nous avons

$$\mathcal{G}(x,y;\lambda) = x^{\tilde{\nu}} y^{\tilde{\nu}} G^{(\tilde{\omega}')}(x,y;\lambda + \frac{k'^2 - k^2}{4}) , \tag{26}$$

où $G^{(\tilde{\omega}')}$ est la fonction de Green étudiée dans le paragraphe 2.

__Théorème 8__ : Soient $t > 0$ et $(x,y) \in \overline{\Omega \times \Omega}$. Alors, nous avons

$$\mathcal{B}(t;x,y) = x^{\tilde{\nu}} y^{\tilde{\nu}} Z^{(\tilde{\omega}')}(t;x,y) e^{(k^2 - k'^2)t/4} \tag{27}$$

où $Z^{(\tilde{\omega}')}$ est la fonction de Green étudiée dans le paragraphe 2.

Signalons que $\tilde{\omega}'$ satisfait à toutes les hypothèses sur $\tilde{\omega}$ posées dans le paragraphe 2, donc que toutes les formules obtenues dans le paragraphe 2 y sont utilisables.

§ 4. __PROBLEME DE DIRICHLET NON HOMOGENE__

Supposons toujours (22) sur $\tilde{\omega}$, et posons

$$S_j = \partial\Omega \cap \{x_j = 0\} , \quad 0 \leq j \leq n ; \tag{28}$$

$$\text{et } S^- = \bigcup_{j \in J_-} S_j \quad (\neq \emptyset) .$$

Chaque S_j est munie de l'élément de volume

$$dS_j(x') = \left| \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}{dx_j} \right| , \quad 0 \leq j \leq n. \tag{29}$$

Le problème de Dirichlet non homogène pour $\mathcal{L}_{\tilde{\omega}}$ se pose comme suit : étants données une fonction $f(x)$ sur Ω et une fonction $g(x')$ sur S^-, chercher une solution $u(x)$ de l'équation

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\tilde{\omega}} u(x) = f(x), & \text{dans } \Omega \\ \text{et } u(x') = g(x'), & \text{sur } S^- . \end{cases} \tag{30}$$

Alors, la solution, si elle existe et unique, sera donnée par

$$u(x) = \int_\Omega \mathcal{G}(x,y;0)f(y)dy_{\tilde{\omega}} + \sum_{j\in J_-}\int_{S_j} \gamma_j(x,y')g(y')dS_j(y'). \qquad (31)$$

Nous pouvons appeler les $\{\gamma_j(x,y')\}_{j\in J_-}$ noyaux de Poisson pour $\mathcal{L}_{\tilde{\omega}}$. Ils sont calculés par les formules suivantes :

$$\gamma_j(x,y') = \lim_{\substack{y\to y'\\ y\in\Omega}} \{\nu_j{}_y{}^{\tilde{\omega}}\mathcal{G}(x,y;0)\}, \quad y'\in S_j,\ j\in J_-,\ x\in\Omega. \qquad (32)$$

Voici des exemples lorsque

$$\omega_j = -1, \quad \text{pour tout } 0\le j\le n. \qquad (33)$$

<u>Exemple 1</u> : La solution de l'équation

$$\begin{cases} -\sum_{j,k=1}^{n}(\delta_{jk}x_j - x_jx_k)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k} = 1, & \text{dans } \Omega, \\ u(x') = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (34)$$

est donnée par

$$u(x) = (n-1)!\int_0^{x_0}\cdots\int_0^{x_n}\left(\sum_{j=0}^{n} u_j\right)^{-n} du_0\wedge\cdots\wedge du_n$$

$$= \sum_{\substack{H\subset\{0,1,\dots,n\}\\ H\ne\emptyset}} (-1)^{|H|}\left(\sum_{h\in H} x_h\right)\log\left(\sum_{h\in H} x_h\right). \qquad (35)$$

<u>Exemple 2</u> : La solution de l'équation

$$\begin{cases} -\sum_{j,k=1}^{n}(\delta_{jk}x_j - x_jx_k)\dfrac{\partial^2 u_p}{\partial x_j\partial x_k} = 0 & \text{dans } \Omega. \\ u_p(x') = 1 \text{ sur } S_p \text{ et } u_p(x') = 0 \text{ sur } \partial\Omega\setminus S_p \end{cases} \qquad (36)$$

$(0\le p\le n)$ est donnée par

$$u_p(x) = \frac{\text{vol. } D_p(x)}{\text{vol.}\Omega}, \text{ où } D_p(x) = \{y\in\Omega; \frac{y_j}{x_j}\le\frac{y_p}{x_p} \quad (0\le j\le n)\}. \qquad (37)$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Appell, P. et Kampé de Fériet , J. : Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite. Gauthiers-Villars.

[2] Grow, J. et Kimura, M. : Some genetic problems in natural populations. Proc., 3rd Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. Vol. IV (1956), 1-22.

[3] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. et Tricomi, F. : Higher transcendental functions. Vol. 2. Mc Graw-Hill.

[4] Fackerell, E. et Littler, R. : Transition densities for neutral multi-allele diffusion models. Biometrics 31 (1975), 117-123.

[5] Feller, W. : Diffusion process in genetics, Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. (1951), 227-246.

[6] Stewart, F. : Variability in the amount of heterozygosity maintained by neutral mutations. Preprint.