K. Watanabe

Sur l'unicité des solutions du problème de Cauchy pour quelques équations paraboliques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 11, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A12_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

SUR L'UNICITE DES SOLUTIONS DU PROBLEME DE CAUCHY POUR QUELQUES EQUATIONS PARABOLIQUES

K. WATANABE

Exposé n° XI   27 Janvier 1976

§ 1. RESULTATS

On va étudier l'unicité des solutions de classe $C_t^1 \cap C_x^m$ du problème suivant :

$$(*) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + P(t,x;D_x)u = 0 & \text{dans }]-T,T[\times U \ldots.(1) \\ (\partial/\partial x_1)^j u = 0 & j = 0, 1, \ldots, m-1 \quad \text{sur } x_1 = 0 \ldots..(2) \end{cases}$$

où $P(t,x;D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(t,x) D_x^\alpha$ est un opérateur elliptique d'ordre m dans un voisinage U de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ et les coefficients $a_\alpha(t,x)$ sont définis dans $]-T,T[\times U$.

On s'intéresse aux cas où le symbole principal $p(t,x;\xi)$ de P peut être écrit sous la forme suivante :

$$p(t,x;\xi) = q(t,x;\xi)^j \qquad j = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3$$

où $q(t,x;\xi)$ est un polynôme homogène elliptique d'ordre r à coefficients dans C^∞, qui satisfait à la condition suivante : $[H,j]$. Toutes les racines de l'équation en Z :

$$q(0,0;(Z,\xi')) + \omega s = 0$$

sont non réelles, simples pour tous vecteurs $(\xi',s) = (\xi_2,\ldots,\xi_n,s)$ réels, non nuls, où $\omega = i$ si $j = 1$, $e^{\pm i\pi/4}$ si $j = 2$, i et $e^{-i\pi/6}$ si $j = 3$.

Remarque 1 : Si q est d'ordre 2 et à valeur réelles, les $[H;j]$ sont toujours vérifiées.

On a alors

Théorème 1 : Soit j = 1 ou 2. Supposons l'hypothèse $[H,j]$ et que $P(t,x;D_x) = Q(t,x;D_x)^j$ + terme d'ordre $\leq m-1$ à coeffs dans L^∞. Alors, chaque solution du problème (*) s'annule dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

<u>Théorème 2</u> : Supposons l'hypothèse $[H,3]$ et que

$$P = Q(t,x;D_x)^3 + R(t,x;D_x) + \text{terme d'ordre} \leq m-2 \text{ à coeffs. dans } L^\infty,$$

où R est un opérateur d'ordre m - 1 à coeffs lipschitziens. Alors on a la même conlusion que celle du théorème 1.

Le théorème 1 est essentiellement dû à Mizohata [4], qui ne l'a démontré que dans le cas où P est d'ordre 2 et les coeffs. de la partie principale sont à valeurs réelles. Mais il semble que sa méthode soit encore valable même sous les hypothèses du théorème 1.

D'après l'argument topologique usuel et la remarque 1, on a donc :

<u>Corollaire</u> : La continuation par unicité dans la direction de l'espace c'est-à-dire, la propagation des zéros d'une solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + P(t,x;D_x)u = 0$$

jusqu'à la composante horizontale d'un ouvert donné, où P est l'un des types donnés dans les théorèmes 1 et 2. Elle est vérifiée si q est d'ordre 2 et à valeurs réelles.

§ 2. LES ESTIMATIONS DU TYPE DE CARLEMAN

Les démonstrations des théorèmes seront analogues à celles de l'unicité des solutions des équations elliptiques (voir [1,2,3,6]). On donnera ici seulement une esquisse de la démonstration du théorème 2. D'abord, avec le changement des coordonnées par la transformation de Holmgren, on suppose qu'au lieu de la condition (2),

$$u(t,x) = 0 \quad \text{dans} \quad x_1 < |x'|^2 \qquad x = (x_1, x').$$

Ensuite on démontrera les estimations du type de Carleman, lesquelles peuvent entraîner l'unicité en question.

A partir de maintenant on garde toujours les hypothèses du théorème 2. On adopte les fonctions

$$\varphi_\delta(x) = (x_1 - \delta)^2 + \delta|x'|^2, \ \delta > 0$$

comme fonctions de poids. On a alors

<u>Proposition</u> : Il existe des constantes $C_j > 0$ $(1 \leq j \leq 4)$ telles que l'inégalité

$$(3) \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\delta}^{\delta}\int_{\mathcal{U}(\delta)} |\{\frac{\partial}{\partial t} + Q(t,x;D_x)^3 + R(t,x;D_x)\}u|^2 \, e^{2\tau\varphi_\delta(x)} dt\, dx \\ &\geq C_1 \int_{-\delta}^{\delta}\int_{\mathcal{U}(\delta)} \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{(\tau\delta)^{2(m-|\alpha|)}}{(\tau\delta^2)^3} |D_x^\alpha u|^2 \, e^{2\tau\varphi_\delta(x)} dt\, dx \end{aligned} \right.$$

est vérifiée pour $\forall\, u \in C_c^\infty(]-\delta,\delta[\times\mathcal{U}(\delta))$, $C_2 > \delta > 0$, $\tau\delta^3 > C_3$ où $\mathcal{U}(\delta) = \{x \,;\, |x| < \delta C_4\}$.

On verra la démonstration du théorème 2 dans [2,6], en utilisant la proposition ci-dessus si l'on emploie les fonctions de poids $-t^2 + \varphi_\delta(x)$ au lieu de φ_δ .

L'idée de la démonstration de la proposition est que l'on considère premièrement le cas où les coeffs de Q et R sont constants. Alors on a les

<u>Lemme 1</u> (Hörmander [2]) :

$$(4) \quad \begin{aligned} &\int_{\mathcal{U}(\delta)} |Q(D_x)v|^2 e^{2\tau\varphi_\delta(x)} dx \\ &\geq C \int_{\mathcal{U}(\delta)} \sum_{|\alpha|\leq r} \frac{(\tau\delta)^{2(r-|\alpha|)}}{\tau\delta^2} |D_x^\alpha v|^2 \, e^{2\tau\varphi_\delta(x)} dx \end{aligned}$$

pour $\forall\, v \in C_c^\infty(\mathcal{U}(\delta))$, $\delta > 0$ assez petit, $\tau\delta^2 > 0$ assez grand.

<u>Lemme 2</u> :

$$(5) \quad \begin{aligned} &\int_{\mathcal{U}(\delta)} |\{is + Q(D_x)^3 + R(D_x)\}v|^2 \, e^{2\tau\varphi_\delta} dx \\ &\geq C \int_{\mathcal{U}(\delta)} \sum_{|\alpha|\leq r} \frac{(\tau\delta)^{2(r-|\alpha|)}}{\tau\delta^2} |D_x^\alpha Q(D_x)^2 v|^2 \, e^{2\tau\varphi_\delta} dx \end{aligned}$$

pour $\forall v \in C_c^\infty(\mathcal{U}(\delta))$, assez petit $\delta > 0$, assez grand $\tau\delta^3 > 0$ et $s \in \mathbb{R}^1$.

L'idée de la démonstration du lemme 2 est tout à fait analogue à celle du lemme 1 (voir [2,6]). Remarquons qu'il suffit de démontrer l'inégalité :

$$|Q(\xi + i\tau N)^3 + is|^2 + |\frac{\partial}{\partial \xi_1}\{Q(\xi + i\tau N)^3\}|^2 |\tau N|^2$$

$$\geq \text{Cte } |\xi + i\tau N|^{2r} |Q(\xi + i\tau N)^2|^2$$

pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$, $s \in \mathbb{R}^1$, N près de $(-1,0,\ldots,0)$.

Deuxièmement, on utilise la partition de l'unité suivante : on prend une fonction $\theta(t)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ telle que

$$\operatorname{supp}\theta \subset \{t : |t| < 1\}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta(t-k) = 1$$

et on pose

$$\Theta(x) = \theta(x_1)\ldots\theta(x_n)$$

$$\omega(\tau,\delta) = (\tau\,\delta^{3/2})^{1/2}$$

$$t_k = k/\omega(\tau,\delta), \quad X_g = g/\omega(\tau,\delta), \quad Y_{k,g} = (t_k, X_g), \quad g \in \mathbb{Z}^n,$$

$$V_g(x) = V(x).\,\Theta(\omega(\tau,\delta)\,x - g), \quad Y = (t,x)$$

$$U_{k,g}(y) = U(y).\,\theta(\omega(\tau,\delta)t-k).\Theta(\omega(\tau,\delta)x - g).$$

En remplaçant, dans l'inégalité (5), V(x) par la transformée $\hat{U}_{k,g}(s,x)$ de Fourier par rapport à t de $U_{k,g}(t,x)$, il est facile de voir l'inégalité

$$(6)\quad \begin{aligned} &\int_{-\delta}^{\delta}\int_{\mathcal{U}(\delta)} |\{\frac{\partial}{\partial t} + Q(y_{k,g}.D_x)^3 + R(y_{k,g};D_x)\}U_{k,g}|^2\, e^{2\tau\varphi_\delta}\, dtdx \\ &\geq \text{Cte} \int_{-\delta}^{\delta}\int_{\mathcal{U}(\delta)} \sum_{|\alpha|\leq r} \frac{(\tau\delta)^{2(r-|\alpha|)}}{\tau\delta^2} |D_x^\alpha Q(y_{k,g};D_x)^2 U_{k,g}|^2\, e^{2\tau\varphi_\delta}\, dtdx \end{aligned}$$

pour $U \in C_c^\infty(]-\delta,\delta[\times \mathcal{U}(\delta))$.

Troisièmement on calcule des erreurs $\{Q(y_{k,g};D_x)^3 - Q(y,D_x)^3\}U_{k,g}$ de la manière suivante :

$$X^3 - Y^3 = 3(X-Y)X^2 - 3(X-Y)^2X + (X-Y)^3$$
$$+ 3(X-Y)[X,Y] - 3[X,Y]X + [[X,Y],2X-Y] .$$

C'est-à-dire, en remarquant $\operatorname{supp} U_{k,g} \subset \{y; |y - Y_{k,g}| < \omega(\tau,\delta)^{-1}\}$, on a

$$|\{Q(Y_{k,g};D_x)^3 - Q(Y;D_x)^3\}U_{k,g}|^2$$
$$\leq \mathrm{Cte}\{(\tau\delta^{3/2})^{-1}|D_x^r Q(Y_{k,g};D_x)^2 U_{k,g}|^2 + (\tau\delta^{3/2})^{-2}|D_x^{2r}Q'Y_{k,g};D_x)U_{k,g}|^2$$
$$+ (\tau\delta^{3/2})^{-3}|D_X^{3Y}U_{k,g}|^2 + (\tau\delta^{3/2})^{-1}|D_X^{3r-1}U_{k,g}|^2$$
$$+ |D_X^{2r-1}Q(Y_{k,g};D_x)U_{k,g}|^2 + |D_x^{3r-2}U_{k,g}|^2\}$$

où on utilise la notation $|D_x^k f|^2 = \sum_{|\alpha|\leq k} |D_x^\alpha f|^2$.

Car ces erreurs sont majorées par le deuxième nombre de (6), on a donc

$$\int_{-\delta}^{\delta}\int_{\mathcal{U}(\delta)} |\{\frac{\partial}{\partial t} + Q(Y;D_x)^3 + R(Y;D_x)\}U_{k,g}|^2 e^{2\tau\varphi_\delta} dt dx$$

(7)

$$\geq \mathrm{Cte} \int_{-\delta}^{\delta}\int_{\mathcal{U}(\delta)} \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{(\tau\delta)^{2(m-|\alpha|)}}{(\tau\delta^2)^3} |D_x^\alpha U_{k,g}|^2 e^{2\tau\varphi_\delta} dt dx .$$

On verra dernièrement l'inégalité (3), si l'on regroupe chaque membre de (7) en adoptant la méthode semblable sur les estimations des erreurs et en utilisant le

<u>Lemme 3</u> (Trèves [5]). $\exists C(p,n) > 0$,

$$\int |a(D_x)f|^2 e^{2\tau\varphi_\delta} dx \leq C(p,n)\int \sum_\alpha \tau^{|\alpha|}\delta^{|\alpha|-\alpha_1}|a^{(\alpha)}(D_x)f|^2 e^{2\tau\varphi_\delta} dx$$

pour $\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\forall a(\xi)$ un polynôme de degré $\leq p$ à coeffs. constants où $a^{(\alpha)}(\xi) = \partial^\alpha a(\xi)/\partial\xi^\alpha$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. P. Calderon : Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations. Amer. Journal, Vol.53 (1958) p.16-36.

[2] L. Hörmander : On the uniqueness of the Cauchy problem II. Math. Scand. 7 (1959) p.177-190.

[3] S. Mizohata : Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du quatrième ordre. Proc. Japan Acad. 34 (1958) p.687-692.

[4] S. Mizohata : Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques. Memoirs of the College of Science, Univ. of Kyoto, Ser. A 31 (1958) 219-239.

[5] F. Trèves : Relations de domination entre opérateurs différentiels Acta Math. 101 (1959) 1-139.

[6] K. Watanabé : On the uniqueness of the Cauchy problem for certain elliptique equations with triple characteristics. Tôhoku Math. Journal 23 (1971) 473-490.