Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Pham The Lai

Estimation du peste dans la théorie spectrale d' une classe de problèmes d'opérateurs elliptiques dégénérés

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 10, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A11_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

ESTIMATION DU RESTE DANS LA THEORIE SPECTRALE D'UNE CLASSE DE PROBLEMES D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES

par PHAM THE LAI

Exposé n° X

20 Janvier 1976

INTRODUCTION

Nous avons étudié dans [6] le comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres d'une classe d'opérateur elliptique d'ordre $2m$, dégénérant à l'ordre m au bord d'un domaine Ω borné, très régulier de $\mathbb{R}^n$, pour $n > 2$. (Pour cette classe d'opérateur, on sait que 2 est une valeur critique pour la dimension du domaine Ω, cf. [5].)

Nous continuons ici cette étude en étudiant le reste.

La bibliographie donnée ici est très succinte ; pour une bibliographie plus complète, on pourra consulter [6].

§ 1. - LES PRINCIPAUX RESULTATS

1.1. - DEFINITIONS ET RAPPELS

L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de la norme canonique, un point générique x de $\mathbb{R}^n$ est défini par ses composantes $x = (x_1,\dots,x_n)$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la structure euclidienne canonique :

$$\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j .$$

La mesure de Lebesgue associée est notée dx.

Concernant $\mathbb{R}^n$, les différentes notions telles que, par exemple, la distance, le gradient d'une fonction, la mesure d'une surface de $\mathbb{R}^n$, sont relatives à cette structure euclidienne.

Les différentes normes rencontrées seront notées $|\ |$, sauf mention du contraire.

Nous utilisons les notations classiques suivantes :

$$D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad i = \sqrt{-1} \quad , \quad j = (1,\dots,n)$$

$$D = (D_1,\dots,D_n) \quad , \quad D^\alpha = D_1^{\alpha 1} \dots D_n^{\alpha n}$$

pour $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ un multi-indice d'entiers $\geqslant 0$.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, variété à bord de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On note $L_2(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions de carré intégrables sur Ω , de produit scalaire :

$$(u,v)_{o;\Omega} = \int_\Omega u\bar{v}dx \ .$$

Pour un entier $\geqslant 0$, on note $H_m(\Omega)$ l'espace de Sobolev usuel dont la norme naturelle est notée $|\ |_{m;\Omega}$.

On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, vérifiant :

$$\begin{aligned} &\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ , \ \varphi(x) > 0\} \\ (1.1) \qquad &\Gamma = \{s \in \mathbb{R}^n \ , \ \varphi(s) = 0\} \\ &\text{grad } \varphi(s) \neq 0 \ \text{ pour } \ s \in \Gamma \ . \end{aligned}$$

Pour m entier $\geqslant 0$ et k réel, on considère les espaces de Sobolev avec poids (cf. [2]) :

$$(1.2) \qquad H_m^k(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega)^{(*)} \ ; \ \varphi^k D^\alpha u \in L_2(\Omega) \ ; \ \forall\, |\alpha| \leqslant m\} \ .$$

Ces espaces sont munis des normes hilbertiennes naturelles notées $|\ |_{m;k;\Omega}$.

On vérifie (cf. [2]) que $H_m^k(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ pour k vérifiant $k \leqslant m$.

Notons $\mathbb{R}_+^n$ le demi-espace de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1,\dots,x_{n-1},x_n) \ ; \ x_n > 0\} \ .$$

On définir alors, de manière analogue, les espaces :

(*) $\mathcal{D}'(\Omega)$ *désigne l'espace des distributions sur* Ω *de L. Schwartz.*

$$H_m^k(\mathbb{R}_+^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad , \quad x_n^k D^\alpha u \in L_2(\mathbb{R}_+^n) \quad , \quad \forall\ |\alpha| \leqslant m\} \ .$$

Nous aurons à considérer la situation bien connue suivante : On se donne X et Y deux espaces de Hilbert avec $X \hookrightarrow Y$, X dense dans Y , et une forme sesquilinéaire $a(u,v)$, définie et continue sur $X \times X$.

Il est bien connc que ces données définissent un opérateur A fermé (non borné en général) de Y dans Y , de domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans Y et vérifiant :

$$(1.3) \qquad (Au,v)_Y = a(u,v)$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$, $v \in X$.

On dira que A est l'opérateur engendré par le triplet $\{X,Y\ ;\ a(u,v)\}$.

Pour l'étude spectrale de la classe d'opérateurs elliptiques dégénérées envisagé dans l'introduction, le résutlat suivant, prouvé dans [4], est essentiel pour la suite. Il concerne une classe d'opérateurs T bornée dans $L_2(\Omega)$, dont l'image est dans $H_{2m}^m(\Omega)$, pour m entier $\geqslant 0$.

Notons $\| T \|_{o,o;\Omega}$ la norme de T de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$ et $\| T \|_{o,2m:m;\Omega}$ la norme de T de $L_2(\Omega)$ dans $H_{2m}^m(\Omega)$. Nous avons le :

<u>THEOREME A.</u> - <u>Soit</u> T <u>un opérateur continu de</u> $L_2(\Omega)$ <u>dans</u> $L_2(\Omega)$ <u>dont les images de</u> T <u>et de</u> T^* (<u>l'adjoint de</u> T) <u>sont dans</u> $H_{2m}^m(\Omega)$ <u>avec</u> $m > n = \dim \Omega$.

<u>Alors</u> T <u>est un opérateur intégral avec un noyau</u> $K(x,y)$ <u>continu et borné sur</u> $\Omega \times \Omega$:

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)dy \qquad f \in L_2(\Omega) \ .$$

$K(x,y)$ <u>est appele le noyau d'Agmon associé à</u> T .

<u>Il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que</u> :

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} |K(x,y)| &\leqslant C(\| T \|_{o,2m:m;\Omega} \| T^* \|_{o,2m:m;\Omega})^{n/2m} (\| T \|_{o,o;\Omega})^{1-(n/m)} \\ |K(x,y)| &\leqslant C[\varphi(x)\varphi(y)]^{-n/4} (\| T \|_{o,2m:m;\Omega} \| T^* \|_{o,2m:m;\Omega})^{n/4m} \\ &\qquad (\| T \|_{o,o;\Omega})^{1-(n/2m)} \end{aligned}$$

<u>pour tout</u> $x,y \in \Omega$.

<u>REMARQUE</u>. - Un tel résultat est encore vrai pour $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ avec $\varphi = x_n$

Nous considérons une forme intégro-différentielle

$$(1.5) \qquad a(u,v) = \int_\Omega \varphi^m \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} a_{\alpha\beta}\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v}\, dx$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont des fonctions $\in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

On désigne par $\mathcal{A}(.,D)$ l'opérateur différentiel associé à cette forme :

$$(1.6) \qquad \mathcal{A}(.,D) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} D^\beta(\varphi^m\, a_{\alpha\beta}\, D^\alpha) .$$

Il est clair que $a(u,v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $H_m^{m/2}(\Omega) \times H_m^{m/2}(\Omega)$; comme $H_m^{m/2}(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ avec une image dense, nous notons A l'opérateur engendré par le triplet $\{H_m^{m/2}(\Omega)\ ,\ L_2(\Omega)\ ,\ a(u,v)\}$; d'après (1.3) A est une réalisation de $\mathcal{A}(.,D)$; nous dirons que A est la réalisation de Neumann de $\mathcal{A}(.,D)$, par analogie avec des problèmes non dégénérés.

Pour $s \in \Gamma$, notons :

T_s le sous-espace vectoriel des vecteurs tangents, associés à l'hyperplan tangent en s à Γ

(1.7) S_{T_s} la sphère unité de T_s

$$\nu_s = \frac{\text{grad}\ \varphi(s)}{|\text{grad}\ \varphi(s)|}$$

Nous faisons les hypothèses (H) suivantes sur $a(u,v)$:

(i) Il existe une constante $C > 0$ telle que l'on a :

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} \geq C|\xi|^{2m}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

(ii)
$$a_{\alpha\beta}(x) = a_{\beta\alpha}(x)$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$, α et β vérifiant $|\alpha| = |\beta| = m$

(Les $a_{\alpha\beta}(x)$ sont réelles en vertu de (i))

(iii) Pour $s \in \Gamma$ et $\omega \in S_{T_s}$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\int_0^\infty t^m \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(s)(\omega + \nu_s\partial_t)^\alpha u\ \overline{(\omega + \nu_s\partial_t)^\beta u}\, dt \geq C|u|^2_{m,m/2;\,\mathbb{R}_+}$$

pour tout $u \in H_m^{m/2}(\mathbb{R}_+)$.

Dans l'intégrale du premier membre, nous avons noté :

$$\partial_t = - i \frac{\partial}{\partial t} .$$

Notons :

$$b_{\omega,s}(u,v) = \int_0^\infty t^m \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(s)(\omega + \nu_s\partial_t)^\alpha u \overline{(\omega + \nu_s\partial_t)^\beta v} \, dt$$

et $\mathcal{B}_{\omega,s}$ l'opérateur différentiel, d'une variable, associé à $b_{\omega,s}$:

$$\mathcal{B}_{\omega,s} = \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(s)(\omega + \nu_s\partial_t)^\beta (t^m(\omega + \nu_s\partial_t)^\alpha) .$$

L'opérateur $\beta_{\omega,s}$ (non borné) de $L_2(\mathbb{R}_+)$ dans $L_2(\mathbb{R}_+)$, engendré par le triplet $\{H_m^{m/2}(\mathbb{R}_+), L_2(\mathbb{R}_+) , b_{\omega,s}(u,v)\}$ est appelé la réalisation de Neumann de $\mathcal{B}_{\omega,s}$.

Nous avons prouvé dans [6] les résultats suivants :

THEOREME B. - Sous les hypothèses (H), il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et une constante $C > 0$ telle que la région :

$$\mathcal{R} = \{\lambda \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} \lambda \leqslant \lambda_0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Im} \lambda| \geqslant C(1 + |\lambda|)^{1-(1/2m)}\}$$

est dans l'ensemble résolvant de A . De plus :

$$\| (A - \lambda)^{-1} \|_{o,o;\Omega} \leqslant \frac{C}{d(\lambda)} \tag{1.8}$$

pour $\lambda \in \mathcal{R}$, $\lambda \neq 0$.

(Dans (1.8), $\| (A - \lambda)^{-1} \|_{o,o;\Omega}$ est la norme de la résolvante $(A - \lambda)^{-1}$ de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$ et $d(\lambda)$ la distance de λ à $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[$.)

La résolvante de A est compacte.

Si l'on suppose :

$$m > n = \dim \Omega \tag{1.9}$$

alors, pour $\lambda \in \mathcal{R}$, $(A - \lambda)^{-1}$ est un opérateur intégral dont le noyau d'Agmon associé $G_\lambda(x,y)$ est continu et borné sur $\Omega \times \Omega$:

$$(A - \lambda)^{-1} f = \int_\Omega G_\lambda(.,y) f(y) dy \qquad f \in L_2(\Omega) .$$

THEOREME C. - Sous les hypothèses (H) et la suivante :

(1.10) $$n > 2$$

l'opérateur $\beta_{\omega,s}$, pour $s \in \Gamma$ et $\omega \in S_{T_s}$, est auto-adjoint, strictement positif, à résolvante compacte. Soit la suite $(\mu_j(\omega,s))_{j \geq 1}$ des valeurs propres (*) (réelles et positives) de $\beta_{\omega,s}$ et notons :

$$\rho_j(s) = \frac{1}{n-1} \int_{S_{T_s}} \mu_j(\omega,s)^{(1-n)/m} \, d\omega \qquad (**) .$$

Alors la série $\sum_{j \geq 1} \rho_j(s)$ est convergente et la somme est une fonction bornée sur Γ.

1.2. - ENONCE DES RESULTATS

Voici les résultats essentiels de ce travail ; notons, pour $0 \leq \theta < 1$,

(1.11) $$\mathcal{R}_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Re}\,\lambda \leq \lambda_0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ |\mathrm{Im}\,\lambda| \geq C(1 + |\lambda|)^{1-(\theta/2m)}\}.$$

THEOREME 1.1. - Sous les hypothèses (H), (1.9) et (1.10), pour $0 \leq \theta < 1/3$, il existe des constantes $\rho > 0$, $C > 0$ telles que :

(1.12) $$\left| \int_\Omega G_\lambda(x,x)\,dx - (2\pi)^{1-n} \alpha_{n,m} \left(\int_\Gamma |\mathrm{grad}\,\varphi(s)|^{1-n} \Big[\sum_{j \geq 1} \rho_j(s) \Big] ds \right) (-\lambda)^{-1+(n-1)/m} \right| \leq C \frac{|\lambda|}{d(\lambda)}^{(n-1)/m} \frac{|\lambda|}{d(\lambda)}^{1-(\theta/m)}$$

pour $\lambda \in \mathcal{R}_\theta$, $|\lambda| \geq \rho$.

(Dans (1.12), $(-\lambda)^{-1+((n-1)/m)}$ est la détermination holomorphe de la puissance dans le plan complexe privé de $\mathbb{R}_+$, qui est positive sur le demi-axe négatif, ds est la mesure de surface du bord Γ de Ω et $\alpha_{n,m}$ est la constante :

(1.13) $$\alpha_{n,m} = \frac{\Pi(n-1)}{m} \left(\sin \frac{\Pi(n-1)}{m}\right)^{-1} .)$$

THEOREME 1.2. - Sous les hypothèses (H) et (1.10), on a :

(1.14) $$N(\lambda) = \sum_{\mathrm{Re}\,\lambda_j \leq \lambda} 1 = \gamma\, \lambda^{(n-1)/m} + O(\lambda^{((n-1)/m)-(\theta/2m)}) \qquad \lambda \to +\infty$$

pour tout $0 \leq \theta < 1/3$.

(*) *avec la convention habituelle*

(**) $d\omega$ *est la mesure de surface* ((n - 2) *dimensionnelle*) *de la sphère* S_{T_s}

(Dans (1.14), $(\lambda_j)_{j\geqslant 1}$ désigne la suite des valeurs propres de A, rangée par ordre croissant des modules, et γ est la constante :

$$\gamma = (2\pi)^{1-n} \int_\Gamma |\text{grad}\, \varphi(s)|^{1-n} [\sum_{j\geqslant 1} \rho_j(s)] ds \quad .) \tag{1.15}$$

REMARQUE. - On pourrait aussi envisager la réalisation de Dirichlet $\mathring{A}$ de $\mathfrak{a}(.,D)$. On obtient alors des résultats analogues à (1.12) (1.14) (1.15), la constante $\mathring{\gamma}$ correspondante est en général différente de γ.

§ 2. - APERCU DE LA PREUVE DES RESULTATS

Sans diminuer la généralité, on peut toujours faire les hypothèses du théorème 1.1 et supposer que la forme $a(u,v)$ est $H_m^{m/2}(\Omega)$-fortement coercive.

D'après un résultat de P. Bolley - J. Camus [3], le domaine de A est donné par :

$$\mathcal{D}(A) = H_{2m}^m(\Omega) \quad .$$

Alors, le théorème A et B donne le :

LEMME 2.1. - Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} |G_\lambda(x,y)| &\leqslant C \frac{|\lambda|^{n/m}}{d(\lambda)} \\ |G_\lambda(x,y)| &\leqslant C\, |\varphi(x)\varphi(y)|^{-n/4} \frac{|\lambda|^{n/2m}}{d(\lambda)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

pour tout $x,y \in \Omega$, $\lambda \in \mathcal{R}$, $|\lambda| \geqslant 1$.

Pour étudier $\int_\Omega G_\lambda(x,x)dx$, on est amené à considérer une partition de Ω :

$$\Omega = \Omega_\varepsilon \cup \mathcal{B}_\varepsilon \tag{2.2}$$

avec $\Omega_\varepsilon = \{x \,;\, \text{dist}(x,\Gamma) \geqslant \varepsilon\}$, $\mathcal{B}_\varepsilon = \Omega - \Omega_\varepsilon$.

$\varepsilon > 0$ est à choisir.

Considérons deux réels δ et δ' tels que $0 < \delta+\delta' < 1$.

Prenons ε de la forme :

$$\varepsilon = |\lambda|^{-\delta'/2m}$$

lorsque λ parcourt la région $\mathcal{R}_\delta$.

On utilise alors (2.1) pour estimer $\int_\Omega G_\lambda(x,x)dx$.

Pour $\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} G_\lambda(x,x)dx = \left[\int_\Gamma (\int_0^\varepsilon G_\lambda(s+\nu t, s+\nu t)dt)ds\right](1+0(\varepsilon))$, on localise au

voisinage de chaque point du bord comme dans [6]. Par la technique des contours successifs, on obtient : pour tout k entier $\geqslant 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\left| \int_\Omega G_\lambda(x,x)dx - (2\pi)^{1-n} \alpha_{n,m} \left(\int_\Gamma |\text{grad } \varphi(s)|^{1-n} \left(\sum_{j\geqslant 1} \rho_j(s)ds\right)(-\lambda)^{-1+n-1/m}\right| \leqslant \right.$$

(2.3)

$$C \frac{|\lambda|^{n-1/m}}{d(\lambda)} \left[\frac{|\lambda|}{d(\lambda)} |\lambda|^{-\delta'/2m} + |\lambda|^{-(n-2)(2-\delta')/4m} + |\lambda|^{-k(1-\delta-\delta')/2m} \right]$$

pour $\lambda \in \mathcal{R}_\delta$, $|\lambda|$ assez grand.

(2.3) donne alors le théorème 1.1 si l'on choisit :

$$\delta = \theta \quad , \delta' = 2\theta \quad \text{et} \quad 1-3\theta > 0 \quad .$$

Pour prouver le théorème 1.2 , on considère, pour $\lambda \notin \mathbb{R}_+$:

$$(2.4) \qquad f(\lambda) = \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{\text{Re}\lambda_j - \lambda} = \int_0^\infty \frac{dN(t)}{t-\lambda}$$

Une formule de A. Pleijel permet d'étudier $N(t)$ lorsque l'on connait $f(\lambda)$, λ parcourant la région $\mathcal{R}_\delta$.

On sait que :

$$(2.5) \qquad \int_\Omega G_\lambda(x,x)dx = \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_j - \lambda}$$

et par conséquent, on pourra remplacer dans (2.4) $f(\lambda)$ par $\int_\Omega G_\lambda(x,x)dx$ modulo le reste $\sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_j-\lambda} - \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{\text{Re}\lambda_j-\lambda}$. Ce reste est donné par le :

<u>LEMME 2.2.</u> - <u>Il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que</u> :

$$(2.6) \qquad \left| \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_j-\lambda} - \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{\text{Re}\lambda_j-\lambda} \right| \leqslant C\, |\lambda|^{-1+n-1/m-1/2m} \frac{|\lambda|^2}{d(\lambda)}$$

<u>pour</u> $\lambda \in \mathcal{R}$, $|\lambda| \geqslant 1$.

Alors (2.4) (2.5) (2.6), la formule de A. Pleijel et le théorème 1.1 permettent de prouver le théorème 1.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON : Lectures on elliptic boundary value problems, Princeton, Van Nostrand Mathematical Studies, (1965).

[2] P. BOLLEY - J. CAMUS : Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids, Publications de l'Université de Rennes, (1969).

[3] P. BOLLEY - J. CAMUS : Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérées variationnels, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, (1974), p. 651-653.

[4] PHAM THE LAI : Classe de compacité d'opérateur intervenant dans une classe de problèmes elliptiques dégénérés, Israël J. of Math., vol. 17, (1974), p. 364-379.

[5] PHAM THE LAI : Comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés en dimension 2, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, (1974), p. 1619-1622. Séminaire J. Leray - Collège de France.

[6] PHAM THE LAI : Operateurs elliptiques dégénérés : comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, (1975), p. 1067-1070. A paraître au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.