Pham The Lai

Estimation du peste dans la théorie spectrale d' une classe de problèmes d'opérateurs elliptiques dégénérés

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 10, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A11_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

ESTIMATION DU RESTE DANS LA THEORIE SPECTRALE D'UNE CLASSE DE PROBLEMES D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES

par PHAM THE LAI

Exposé n° X

20 Janvier 1976

INTRODUCTION

Nous avons étudié dans [6] le comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres d'une classe d'opérateur elliptique d'ordre $2m$, dégénérant à l'ordre m au bord d'un domaine Ω borné, très régulier de $\mathbb{R}^n$, pour $n > 2$. (Pour cette classe d'opérateur, on sait que 2 est une valeur critique pour la dimension du domaine Ω, cf. [5].)

Nous continuons ici cette étude en étudiant le reste.

La bibliographie donnée ici est très succinte ; pour une bibliographie plus complète, on pourra consulter [6].

§ 1. - LES PRINCIPAUX RESULTATS

1.1. - DEFINITIONS ET RAPPELS

L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de la norme canonique, un point générique x de $\mathbb{R}^n$ est défini par ses composantes $x = (x_1,\dots,x_n)$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la structure euclidienne canonique :

$$<x,y> = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \ .$$

La mesure de Lebesgue associée est notée dx.

Concernant $\mathbb{R}^n$, les différentes notions telles que, par exemple, la distance, le gradient d'une fonction, la mesure d'une surface de $\mathbb{R}^n$, sont relatives à cette structure euclidienne.

Les différentes normes rencontrées seront notées $|\ |$, sauf mention du contraire.

Nous utilisons les notations classiques suivantes :

$$D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad i = \sqrt{-1} \quad , \quad j = (1,\dots,n)$$

$$D = (D_1,\dots,D_n) \quad , \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$$

pour $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ un multi-indice d'entiers $\geqslant 0$.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, variété à bord de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On note $L_2(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions de carré intégrables sur Ω , de produit scalaire :

$$(u,v)_{0;\Omega} = \int_\Omega u\bar{v}dx \ .$$

Pour un entier $\geqslant 0$, on note $H_m(\Omega)$ l'espace de Sobolev usuel dont la norme naturelle est notée $|\ |_{m;\Omega}$.

On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, vérifiant :

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{aligned} &\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ , \ \varphi(x) > 0\} \\ &\Gamma = \{s \in \mathbb{R}^n \ , \ \varphi(s) = 0\} \\ &\operatorname{grad} \varphi(s) \neq 0 \ \text{ pour } \ s \in \Gamma \ . \end{aligned}$$

Pour m entier $\geqslant 0$ et k réel, on considère les espaces de Sobolev avec poids (cf. [2]) :

$$\text{(1.2)} \qquad H_m^k(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega)^{(*)} \ ; \ \varphi^k D^\alpha u \in L_2(\Omega) \ ; \ \forall\, |\alpha| \leqslant m\} \ .$$

Ces espaces sont munis des normes hilbertiennes naturelles notées $|\ |_{m;k;\Omega}$.

On vérifie (cf. [2]) que $H_m^k(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ pour k vérifiant $k \leqslant m$.

Notons $\mathbb{R}_+^n$ le demi-espace de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1,\dots,x_{n-1},x_n) \ ; \ x_n > 0\} \ .$$

On définir alors, de manière analogue, les espaces :

(*) $\mathcal{D}'(\Omega)$ *désigne l'espace des distributions sur* Ω *de L. Schwartz.*

$$H^k_m(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad , \quad x^k_n D^\alpha u \in L_2(\mathbb{R}^n_+) \quad , \quad \forall\ |\alpha| \leqslant m\} .$$

Nous aurons à considérer la situation bien connue suivante : On se donne X et Y deux espaces de Hilbert avec $X \hookrightarrow Y$, X dense dans Y , et une forme sesquilinéaire $a(u,v)$, définie et continue sur $X \times X$.

Il est bien conne que ces données définissent un opérateur A fermé (non borné en général) de Y dans Y , de domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans Y et vérifiant :

$$(1.3) \qquad (Au,v)_Y = a(u,v)$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$, $v \in X$.

On dira que A est l'opérateur engendré par le triplet $\{X,Y\ ;\ a(u,v)\}$.

Pour l'étude spectrale de la classe d'opérateurs elliptiques dégénérées envisagé dans l'introduction, le résutlat suivant, prouvé dans [4], est essentiel pour la suite. Il concerne une classe d'opérateurs T bornée dans $L_2(\Omega)$, dont l'image est dans $H^m_{2m}(\Omega)$, pour m entier $\geqslant 0$.

Notons $\| T \|_{o,o;\Omega}$ la norme de T de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$ et $\| T \|_{o,2m:m;\Omega}$ la norme de T de $L_2(\Omega)$ dans $H^m_{2m}(\Omega)$. Nous avons le :

THEOREME A. - *Soit T un opérateur continu de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$ dont les images de T et de T^* (l'adjoint de T) sont dans $H^m_{2m}(\Omega)$ avec* $m > n = \dim \Omega$.

Alors T est un opérateur intégral avec un noyau $K(x,y)$ continu et borné sur $\Omega \times \Omega$:

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)dy \qquad f \in L_2(\Omega) .$$

$K(x,y)$ est appele le noyau d'Agmon associé à T .

Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$(1.4) \quad \begin{aligned} |K(x,y)| &\leqslant C(\| T \|_{o,2m:m;\Omega} \| T^* \|_{o,2m:m;\Omega})^{n/2m} (\| T \|_{o,o;\Omega})^{1-(n/m)} \\ |K(x,y)| &\leqslant C[\varphi(x)\varphi(y)]^{-n/4} (\| T \|_{o,2m:m;\Omega} \| T^* \|_{o,2m:m;\Omega})^{n/4m} \\ &\qquad (\| T \|_{o,o;\Omega})^{1-(n/2m)} \end{aligned}$$

pour tout $x,y \in \Omega$.

REMARQUE. - Un tel résultat est encore vrai pour $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ avec $\varphi = x_n$

Nous considérons une forme intégro-différentielle

$$a(u,v) = \int_\Omega \varphi^m \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\|\beta|\leqslant m}} a_{\alpha\beta}\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v}\, dx \tag{1.5}$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont des fonctions $\in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

On désigne par $\mathcal{a}(.,D)$ l'opérateur différentiel associé à cette forme :

$$\mathcal{a}(.,D) = \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\|\beta|\leqslant m}} D^\beta(\varphi^m\, a_{\alpha\beta}\, D^\alpha) . \tag{1.6}$$

Il est clair que $a(u,v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $H^{m/2}_m(\Omega) \times H^{m/2}_m(\Omega)$; comme $H^{m/2}_m(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ avec une image dense, nous notons A l'opérateur engendré par le triplet $\{H^{m/2}_m(\Omega)\ ,\ L_2(\Omega)\ ,\ a(u,v)\}$; d'après (1.3) A est une réalisation de $\mathcal{a}(.,D)$; nous dirons que A est la réalisation de Neumann de $\mathcal{a}(.,D)$, par analogie avec des problèmes non dégénérés.

Pour $s \in \Gamma$, notons :

(1.7)

T_s le sous-espace vectoriel des vecteurs tangents, associés à l'hyperplan tangent en s à Γ

S_{T_s} la sphère unité de T_s

$\nu_s = \dfrac{\text{grad } \varphi(s)}{|\text{grad } \varphi(s)|}$

Nous faisons les hypothèses (H) suivantes sur $a(u,v)$:

(i) Il existe une constante $C > 0$ telle que l'on a :

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(x)\,\xi^{\alpha+\beta} \geqslant C|\xi|^{2m}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

(ii)

$$a_{\alpha\beta}(x) = a_{\beta\alpha}(x)$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$, α et β vérifiant $|\alpha| = |\beta| = m$

(Les $a_{\alpha\beta}(x)$ sont réelles en vertu de (i))

(iii) Pour $s \in \Gamma$ et $\omega \in S_{T_s}$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\int_0^\infty t^m \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(s)\,(\omega + \nu_s\partial_t)^\alpha u\ \overline{(\omega + \nu_s\partial_t)^\beta u}\, dt \geqslant C|u|^2_{m,m/2;\,\mathbb{R}_+}$$

pour tout $u \in H^{m/2}_m(\mathbb{R}_+)$.

Dans l'intégrale du premier membre, nous avons noté :

$$\partial_t = - i \frac{\partial}{\partial t} .$$

Notons :

$$b_{\omega,s}(u,v) = \int_0^\infty t^m \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(s)(\omega + \nu_s\partial_t)^\alpha u \overline{(\omega + \nu_s\partial_t)^\beta v}\, dt$$

et $\mathcal{B}_{\omega,s}$ l'opérateur différentiel, d'une variable, associé à $b_{\omega,s}$:

$$\mathcal{B}_{\omega,s} = \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(s)(\omega + \nu_s\partial_t)^\beta (t^m(\omega + \nu_s\partial_t)^\alpha) .$$

L'opérateur $\beta_{\omega,s}$ (non borné) de $L_2(\mathbb{R}_+)$ dans $L_2(\mathbb{R}_+)$, engendré par le triplet $\{H_m^{m/2}(\mathbb{R}_+), L_2(\mathbb{R}_+) , b_{\omega,s}(u,v)\}$ est appelé la réalisation de Neumann de $\mathcal{B}_{\omega,s}$.

Nous avons prouvé dans [6] les résultats suivants :

<u>THEOREME B.</u> - <u>Sous les hypothèses</u> (H), <u>il existe</u> $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ <u>et une constante</u> $C > 0$ <u>telle que la région</u> :

$$\mathcal{R} = \{\lambda \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Im} \lambda| \geq C(1 + |\lambda|)^{1-(1/2m)}\}$$

<u>est dans l'ensemble résolvant de</u> A . <u>De plus</u> :

(1.8) $$\| (A - \lambda)^{-1} \|_{o,o;\Omega} \leq \frac{C}{d(\lambda)}$$

<u>pour</u> $\lambda \in \mathcal{R}$, $\lambda \neq 0$.

(<u>Dans</u> (1.8), $\| (A - \lambda)^{-1} \|_{o,o;\Omega}$ <u>est la norme de la résolvante</u> $(A - \lambda)^{-1}$ <u>de</u> $L_2(\Omega)$ <u>dans</u> $L_2(\Omega)$ <u>et</u> $d(\lambda)$ <u>la distance de</u> λ <u>à</u> $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[$.)

<u>La résolvante de</u> A <u>est compacte</u>.

<u>Si l'on suppose</u> :

(1.9) $$m > n = \dim \Omega$$

<u>alors, pour</u> $\lambda \in \mathcal{R}$, $(A - \lambda)^{-1}$ <u>est un opérateur intégral dont le noyau d'Agmon associé</u> $G_\lambda(x,y)$ <u>est continu et borné sur</u> $\Omega \times \Omega$:

$$(A - \lambda)^{-1} f = \int_\Omega G_\lambda(\cdot,y) f(y) dy \qquad f \in L_2(\Omega) .$$

THEOREME C. - Sous les hypothèses (H) et la suivante :

(1.10) $$n > 2$$

l'opérateur $\beta_{\omega,s}$, pour $s \in \Gamma$ et $\omega \in S_{T_s}$, est auto-adjoint, strictement positif, à résolvante compacte. Soit la suite $(\mu_j(\omega,s))_{j \geq 1}$ des valeurs propres (*) (réelles et positives) de $\beta_{\omega,s}$ et notons :

$$\rho_j(s) = \frac{1}{n-1} \int_{S_{T_s}} \mu_j(\omega,s)^{(1-n)/m} \, d\omega \qquad (**) .$$

Alors la série $\sum_{j\geq 1} \rho_j(s)$ est convergente et la somme est une fonction bornée sur Γ.

1.2. - ENONCE DES RESULTATS

Voici les résultats essentiels de ce travail ; notons, pour $0 \leq \theta < 1$,

(1.11) $$\mathcal{R}_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ |\operatorname{Im} \lambda| \geq C(1 + |\lambda|)^{1-(\theta/2m)}\}.$$

THEOREME 1.1. - Sous les hypothèses (H), (1.9) et (1.10), pour $0 \leq \theta < 1/3$, il existe des constantes $\rho > 0$, $C > 0$ telles que :

(1.12)
$$\left| \int_\Omega G_\lambda(x,x)\,dx - (2\pi)^{1-n} \alpha_{n,m} \left(\int_\Gamma |\operatorname{grad} \varphi(s)|^{1-n} \left[\sum_{j\geq 1} \rho_j(s)\right] ds\right) (-\lambda)^{-1+(n-1)/m} \right| \leq C \left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{(n-1)/m} \left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{1-(\theta/m)}$$

pour $\lambda \in \mathcal{R}_\theta$, $|\lambda| \geq \rho$.

(Dans (1.12), $(-\lambda)^{-1+((n-1)/m)}$ est la détermination holomorphe de la puissance dans le plan complexe privé de $\mathbb{R}_+$, qui est positive sur le demi-axe négatif, ds est la mesure de surface du bord Γ de Ω et $\alpha_{n,m}$ est la constante :

(1.13) $$\alpha_{n,m} = \frac{\Pi(n-1)}{m} \left(\sin \frac{\Pi(n-1)}{m}\right)^{-1} .)$$

THEOREME 1.2. - Sous les hypothèses (H) et (1.10), on a :

(1.14) $$N(\lambda) = \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j \leq \lambda} 1 = \gamma \, \lambda^{(n-1)/m} + O(\lambda^{((n-1)/m)-(\theta/2m)}) \qquad \lambda \to +\infty$$

pour tout $0 \leq \theta < 1/3$.

(*) *avec la convention habituelle*

(**) $d\omega$ *est la mesure de surface* $((n-2)$ *dimensionnelle) de la sphère* S_{T_s}

(Dans (1.14), $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ désigne la suite des valeurs propres de A, rangée par ordre croissant des modules, et γ est la constante :

(1.15) $$\gamma = (2\pi)^{1-n} \int_\Gamma |\text{grad } \varphi(s)|^{1-n} [\sum_{j\geq 1} \rho_j(s)] ds \quad .)$$

REMARQUE. - On pourrait aussi envisager la réalisation de Dirichlet $\mathring{A}$ de $\mathfrak{a}(.,D)$. On obtient alors des résultats analogues à (1.12) (1.14) (1.15), la constante $\mathring{\gamma}$ correspondante est en général différente de γ.

§ 2. - APERCU DE LA PREUVE DES RESULTATS

Sans diminuer la généralité, on peut toujours faire les hypothèses du théorème 1.1 et supposer que la forme $a(u,v)$ est $H_m^{m/2}(\Omega)$-fortement coercive.

D'après un résultat de P. Bolley - J. Camus [3], le domaine de A est donné par :

$$\mathcal{D}(A) = H_{2m}^m(\Omega) \quad .$$

Alors, le théorème A et B donne le :

LEMME 2.1. - Il existe une constante $C > 0$ telle que :

(2.1)
$$|G_\lambda(x,y)| \leqslant C \frac{|\lambda|^{n/m}}{d(\lambda)}$$
$$|G_\lambda(x,y)| \leqslant C\, |\varphi(x)\varphi(y)|^{-n/4} \frac{|\lambda|^{n/2m}}{d(\lambda)}$$

pour tout $x,y \in \Omega$, $\lambda \in \mathcal{R}$, $|\lambda| \geqslant 1$.

Pour étudier $\int_\Omega G_\lambda(x,x)dx$, on est amené à considérer une partition de Ω :

(2.2) $$\Omega = \Omega_\varepsilon \cup \mathcal{B}_\varepsilon$$

avec $\Omega_\varepsilon = \{x \,;\, \text{dist}(x,\Gamma) \geqslant \varepsilon\}$, $\mathcal{B}_\varepsilon = \Omega - \Omega_\varepsilon$.
$\varepsilon > 0$ est à choisir.

Considérons deux réels δ et δ' tels que $0 < \delta+\delta' < 1$.

Prenons ε de la forme :

$$\varepsilon = |\lambda|^{-\delta'/2m}$$

lorsque λ parcourt la région $\mathcal{R}_\delta$.

On utilise alors (2.1) pour estimer $\int_\Omega G_\lambda(x,x)dx$.

Pour $\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} G_\lambda(x,x)dx = \left[\int_\Gamma \left(\int_0^\varepsilon G_\lambda(s+\nu t, s+\nu t)dt\right)ds\right](1+0(\varepsilon))$, on localise au voisinage de chaque point du bord comme dans [6]. Par la technique des contours successifs, on obtient : pour tout k entier $\geqslant 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\left| \int_\Omega G_\lambda(x,x)dx - (2\pi)^{1-n} \alpha_{n,m} \left(\int_\Gamma |\operatorname{grad} \varphi(s)|^{1-n} \left(\sum_{j\geqslant 1} \rho_j(s)ds\right) (-\lambda)^{-1+n-1/m} \right| \leqslant$$

(2.3)
$$C \frac{|\lambda|^{n-1/m}}{d(\lambda)} \left[\frac{|\lambda|}{d(\lambda)} |\lambda|^{-\delta'/2m} + |\lambda|^{-(n-2)(2-\delta')/4m} + |\lambda|^{-k(1-\delta-\delta')/2m} \right]$$

pour $\lambda \in \mathcal{R}_\delta$, $|\lambda|$ assez grand.

(2.3) donne alors le théorème 1.1 si l'on choisit :

$$\delta = \theta \quad , \delta' = 2\theta \quad \text{et} \quad 1-3\theta > 0 \quad .$$

Pour prouver le théorème 1.2 , on considère, pour $\lambda \notin \mathbb{R}_+$:

(2.4) $$f(\lambda) = \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_j - \lambda} = \int_0^\infty \frac{dN(t)}{t-\lambda}$$

Une formule de A. Pleijel permet d'étudier $N(t)$ lorsque l'on connait $f(\lambda)$, λ parcourant la région $\mathcal{R}_\delta$.

On sait que :

(2.5) $$\int_\Omega G_\lambda(x,x)dx = \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_j - \lambda}$$

et par conséquent, on pourra remplacer dans (2.4) $f(\lambda)$ par $\int_\Omega G_\lambda(x,x)dx$ modulo le reste $\sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_j-\lambda} - \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_j - \lambda}$. Ce reste est donné par le :

<u>LEMME 2.2.</u> - <u>Il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que</u> :

(2.6) $$\left| \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_j-\lambda} - \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_j - \lambda} \right| \leqslant C\, |\lambda|^{-1+n-1/m-1/2m} \left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^2$$

<u>pour</u> $\lambda \in \mathcal{R}$, $|\lambda| \geqslant 1$.

Alors (2.4) (2.5) (2.6), la formule de A. Pleijel et le théorème 1.1 permettent de prouver le théorème 1.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON : Lectures on elliptic boundary value problems, Princeton, Van Nostrand Mathematical Studies, (1965).

[2] P. BOLLEY - J. CAMUS : Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids, Publications de l'Université de Rennes, (1969).

[3] P. BOLLEY - J. CAMUS : Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérées variationnels, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, (1974), p. 651-653.

[4] PHAM THE LAI : Classe de compacité d'opérateur intervenant dans une classe de problèmes elliptiques dégénérés, Israël J. of Math., vol. 17, (1974), p. 364-379.

[5] PHAM THE LAI : Comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés en dimension 2, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, (1974), p. 1619-1622.
Séminaire J. Leray - Collège de France.

[6] PHAM THE LAI : Operateurs elliptiques dégénérés : comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres.
C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, (1975), p. 1067-1070.
A paraître au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.