

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

D. S. TARTAKOFF

Sur la régularité locale des solutions de l'équation $\square_b u = f$

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 9,
p. 1-10*

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A10_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

SUR LA REGULARITE LOCALE DES SOLUTIONS

DE L' EQUATION $\square_b u = f$.

par D. S. TARTAKOFF

Exposé n° IX

13 Janvier 1976

On sait que les opérateurs différentiels sous-elliptiques sont C^∞ hypoelliptiques et même Gevrey-hypoelliptiques (jusqu'à un certain degré) mais en général pas analytique-hypoelliptiques. (voir [1], [2], [4], [6], [7], et [9]). En effet l'exemple de Baouendi et Goulaouic ([1]) perd seulement une demi-dérivée et n'est pas hypoelliptique dans la classe de Gevrey G^s si $1 \leq s < 2$. Le but du travail annoncé ici est de démontrer que l'opérateur \square_b , le Laplacien complexe "du bord", dans certains cas, en particulier le cas strictement pseudo-convexe, a de meilleures propriétés de régularité. Il faut remarquer que la situation étudiée ici est purement locale ; globalement (dans le cas où la variété est strictement pseudo-convexe et compact), l'opérateur \square_b est analytique hypoelliptique ([10]), comme l'est le problème $\bar{\partial}$ -Neumann ([3]).

On suppose donnée une variété hermitienne M de classe G^s (une fonction $g(x)$ est de classe G^s dans ω si elle est dans $C^\infty(\omega)$ et, au voisinage $\omega_{x_0} \subset \omega$ de chaque point x_0 , il existe C tel que $\sup_{\omega_{x_0}} |D^\alpha g(x)| \leq C^{|\alpha|} |\alpha|!^s$ pour tout multi-index α) et de dimension $2n-1$, $n \geq 3$, avec $n-1$ champs de vecteurs Y_j complexes de classe G^s tels que $Y_1, \dots, Y_{n-1}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_{n-1}, T$ sont indépendants, T aussi de classe G^s , et $T \perp \bar{T}$. On suppose que le système $\{Y_j\}$ est formellement intégrable, c'est à dire que

$$[Y_i, Y_j] (= Y_i Y_j - Y_j Y_i) \equiv 0 \text{ modulo } \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_{n-1}, T$$

Alors on peut définir l'opérateur $\bar{\partial}_b$ localement sur les fonctions par $\bar{\partial}_b g = \sum_{i=1}^{n-1} (\bar{Y}_i g) \bar{\zeta}_i$ (où $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, \bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_{n-1}, \tau\}$ forme une base orthogonale de 1-formes sur M duale à $\{Y_1, \dots, Y_{n-1}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_{n-1}, T\}$) ; sur une forme (de type $(0,1)_b$) $\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i \zeta_i$, $\bar{\partial}_b$ est défini par

$$\bar{\partial}_b \sigma = \sum_{i,j=1}^{n-1} (\bar{Y}_j \sigma_i) \bar{\zeta}_i \wedge \bar{\zeta}_j$$

et des termes où les σ_i ne sont pas dérivés, termes donnés uniquement par la condition que $\bar{\partial}_b^2 = 0$, etc. Avec l'aide d'une métrique de classe G^s , on

forme les adjoints, $\bar{\partial}_b^*$, des $\bar{\partial}_b$ et ensuite le Laplacien complexe ("du bord")

$$\square_b = \bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b.$$

L'estimation que nous allons utiliser est la suivante

$$(1) \quad \sum_{j=1}^{n-1} \|Y_j v\|_0^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\bar{Y}_j v\|_0^2 + \|v\|_0^2 \leq C(\square_b v, v)_0 + C' \|v\|_{-1}^2$$

pour toute forme v de type $(0, q)_b$, $v \in C_0^\infty(\omega)$, où $\|\cdot\|_0$ et $\|\cdot\|_{-1}$ désignent respectivement la norme L^2 et la norme de Sobolev d'ordre -1 dans M . Cette estimation est vraie (d'après Kohn) si les conditions $Z(q)$ et $Z(n-q-1)$ sont satisfaites ; $Z(r)$ veut dire : la forme de Levi a au moins $r+1$ valeurs propres positives ou au moins $n-r$ valeurs propres négatives, où la forme de Levi, c_{ij} est donnée par

$$[Y_i, \bar{Y}_j] = \sqrt{-1} c_{ij}^T \text{ modulo } Y_1, \dots, Y_{n-1}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_{n-1}$$

(En tout cas, (1) est satisfait dans le cas où M est strictement pseudoconvexe ($c_{ij} > 0$) et $n \geq 3$, $1 \leq q \leq n-1$).

Théorème 1 : Soit $s > 1$ et soit (1) satisfait pour un ouvert $\omega \subset M$. Soit $\det((c_{ij})) \neq 0$ dans $\bar{\omega}$ et $\square_b u = f \in G^s(\omega)$, $u \in C^\infty(\omega)$. Alors $u \in G^s(\omega)$.

Remarque : Toutes les classes G^s , $s > 1$, contiennent des fonctions à support compact. Dans un certain sens, c'est à cause de cela que le cas $s=1$ (analytique réel) reste ouvert. Mais presque les mêmes méthodes donnent le

Théorème 2 : Il existe une classe quasi-analytique $C^L \subset \bigcap_{s>1} G^s$ telle

que, en remplaçant G^s par C^L partout, le résultat du théorème 1 reste vrai.

(Une classe $C^L = C^{\{L(k)\}} \subset C^\infty$ est définie par : $f \in C^L$, s'il existe C_f tel que pour tout α , localement $|D^\alpha f| \leq C_f^{|\alpha|} L(|\alpha|)$). La classe est quasi-analytique si elle ne contient aucune fonction (sauf 0) dans C_0^∞).

Quelques lemmes

Lemme 1 : Pour que u soit dans $G^s(\omega)$, il faut et il suffit qu'il existe une constante C telle que, pour n'importe quelle composition $Op(p)$ de p opérateurs choisis parmi les $\overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_{n-1}, T$, $|Op(p)u| \leq C^p(p!)^s$.

La démonstration de ce lemme qui dans le cas $s = 1$ ne dit rien d'autre qu'un changement analytique de variables conserve la classe de fonctions analytiques, se réduit facilement au lemme suivant :

Lemme 2 : Soit dans \mathbf{R} , $h(x), g(x) \in G^s$, $s \geq 1$, alors il existe une constante telle que pour tout $r = 1, 2, \dots$,

$$|(h(x)D)^r g(x)| \leq C^r(r!)^s.$$

Démonstration : On écrit $(hD)^r g = hD(hD)^{r-1}g$; et on prend comme hypothèse de récurrence

$$(2) \quad |D^a(hD)^b g| \leq C_0 C_1^a C_2^b (a+b)!^s$$

pour $a > a_0$, $a+b \leq r$, où C_1 et C_2 seront choisis de façon convenable mais indépendantes de r . Pour $b=0$, $a \leq r$, on sait que $|D^a g| \leq C_g^a a!^s$, C_g indépendante de r . et en général, si $b \leq r - a_0$:

$$\begin{aligned} D^{a_0}(hD)^b g &= h D^{a_0+1} (hD)^{b-1} g + \\ &+ \sum_{j=1}^{a_0} \binom{a_0}{j} (D^j h) D^{a_0-j+1} (hD)^{b-1} g \end{aligned}$$

qu'on peut estimer par :

$$\begin{aligned} &\sup |h| C_0 C_1^{a_0+1} C_2^{b-1} (a_0+b)!^s + \\ &+ \sum_{j=1}^{a_0} \binom{a_0}{j} C_h C_1^j j!^s C_0 C_1^{a_0-j+1} C_2^{b-1} (a_0-j+b)!^s \\ &= C_0 C_1^{a_0} C_2^b (a_0+b)!^s H \end{aligned}$$

$$\text{où } H \leq C_h (C_1/C_2) + \sum_{j=1}^{a_0} \binom{a_0}{j} C_h (C_h/C_1)^j (C_1/C_2)^j j!^s (a_0-j+b)!^s$$

et si on choisit $C_1 \geq 2C_h$, et $C_2 \geq 2C_h C_1$, on obtient $H \leq 1$ parce que

$\binom{a_0}{j} \leq \binom{a_0}{j}^s$ si $s \geq 1$. Il est à remarquer que cette démonstration ne marche pas quand $s < 1$.

Lemme 3 : Si la forme de Levi est inversible et $\psi(x)$ est une fonction de classe C^∞ quelconque, on peut modifier T comme suit :

$$T' = \psi T + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(x) Y_j + \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\alpha}_j \bar{Y}_j$$

de façon que pour tout k ,

$$[T', Y_k] \equiv 0 \text{ modulo } Y_1, \dots, Y_{n-1}.$$

Démonstration : Désignant par $\lfloor T$ les composants sur T , on veut que

$$[\psi T + \sum \alpha_j Y_j + \sum \bar{\alpha}_j \bar{Y}_j, Y_k] \lfloor T = 0$$

c'est à dire que

$$\psi [T, Y_k] \lfloor T - Y_k (\psi) T - \sum \bar{\alpha}_j c_{kj} T = 0$$

Mais l'inversibilité de $((c_{kj}))$ donne les α_j ponctuellement (et de classe G^s si $\psi \in G^s$).

Démonstration du théorème : On doit considérer deux sortes de dérivations d'ordre p : T^p et celles qu'on va désigner par $Op(p, \geq r)$ avec $r \geq 1$, c'est à dire celles de la forme $Y_{i_1} Y_{i_2} \dots Y_{i_j} T Y_{i_{j+1}} \dots T$ ou il y a au moins r Y_j . Pour localiser les deuxièmes, on prend $Q \in G^s$ égal à 1 dans $\omega_0 \subset \omega$ et à support contenu dans ω . Avec l'hypothèse (1) on peut écrire $Op(p, \geq r) = Y_j Op(p-1, \geq r-1)$ modulo des termes d'ordre $p-1$ avec moins de T , et pour le terme principal on a

$$\begin{aligned} \|Y_j Op(p-1, \geq r-1)u\|_{\omega_0}^2 &\leq \|Y_j Q Op(p-1, \geq r-1)u\|_{\omega_0}^2 \leq \\ &\leq C(\square_b Q Op(p-1, \geq r-1)u, Q Op(p-1, \geq r-1)u)_{\omega_0} \end{aligned}$$

+ un terme d'ordre $\leq p-1$

Alors on fait passer les Q à droite (puisque $\square_b = \square_b^*$), et on a pour tout v :

$$|\operatorname{Re}(\square_b Qv, Qv)_0| \leq |\operatorname{Re}(\square_b v, Q^2 v)_0| + C' \|v\|_0^2$$

où Q' désigne une dérivée de φ , par exemple $(Y_k Q)$, et en général on va écrire :

$$Q^{(\tau)} = O_p(\tau) Q .$$

On laisse ici ^{de côté} l'estimation de cette classe de dérivations parce que c'est exactement comme le cas elliptique (l'estimation (1) peut être considérée comme elliptique dans les directions Y_j et \bar{Y}_j . Il y a des erreurs, pourtant, de la forme

$$\sum_{i=1}^p \binom{p}{\ell} C^\ell \|a^{(\ell)} Q^{(1)} T^{p-\ell} u\|_0^2$$

c'est à dire, pour chaque ℓ , il y a $\binom{p}{\ell} C^\ell$ termes de la forme indiquée, où a désigne un des coefficients des \bar{Y}_j ou de T . Ainsi il faut (et il suffit) de montrer que $\|T^p u\|_{\operatorname{supp} Q} \leq C C^p p!^S$, ce qui est en tous cas plus difficile.

L'estimation de $\|T^p u\|$.

On prend une autre $Q \in G^S$, égale à un dans le support de l'autre et à support compact dans ω . D'après le lemme 3, on trouve $T_Q = QT + \sum \alpha_j Y_j + \sum \beta_j \bar{Y}_j$, de classe G^S tel que $[T_Q, \bar{Y}_j] \equiv 0$ modulo $Y_1, \dots, Y_{n-1}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_{n-1}$. Alors, on a, d'après (1) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \|Y_j T_Q^p u\|_0^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\bar{Y}_j T_Q^p u\|_0^2 + \|T_Q^p u\|_0^2 &\leq C(\square_b T_Q^p u, T_Q^p u)_0 + C' \|T_Q^{p-1} u\|_0^2 \\ &\leq C \{ \varepsilon \|T_Q^p u\|_0^2 + C_\varepsilon \|T_Q^p \square_b u\|_0^2 \} + C' \|T_Q^{p-1} u\|_0^2 + A \end{aligned}$$

où A désigne ce qui reste :

$$A = |(\square_b, T_Q^p] u, T_Q^p u)|$$

Les autres termes sont faciles à contrôler parce que le lemme 2 nous donne le contrôle de $\|T_Q^p \square_b u\|_0^2$ quand $\square_b u \in G^S$. Le commutateur s'exprime :

$$[\square_b, T_Q^p] = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} C^k \underbrace{[\square_b, T_Q] \cdot T_Q \cdot \dots \cdot T_Q}_{k} T_Q^{p-k}$$

et chaque $[\dots [\square_b, T_Q, \dots, T_Q]]$ s'exprime comme somme de $\binom{k}{a}$ termes, $C = C(n)$ de la forme

$$(Q^{(1)}_D)^k a \binom{(-)}{Y_i} \binom{(-)}{Y_j} \cdot ((Q^{(1)}_D)^k a) \binom{(-)}{Y_i} \cdot \text{ou } ((Q^{(1)}_D)^k a)''$$

D'après le lemme 2, on sait qu'on peut majorer ces coefficients des $\binom{(-)}{Y_j}$ et leurs dérivées, de "façon Gevrey" ; on fait passer un $\binom{(-)}{Y_i}$ à droite, on emploie l'inégalité de Schwartz à poids, et on obtient pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(1 - \varepsilon) I_{p,Q} \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \varepsilon) \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \| Y_j T_Q^p u \|_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \| \bar{Y}_j T_Q^p u \|_0 \right. \\ \left. + \| T_Q^p u \|_0 \right\} \leq C_\varepsilon \left\{ \| T_Q^p \square_b u \|_0 + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} C^k C_Q^k k!^s I_{p-k,Q} \right\}$$

d'où, avec $\varepsilon = 1/2$, et $\square_b u = f$,

$$I_{p,Q} \leq C' \left\{ C_f C_f^p p!^s + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} C_Q^{k+1} k!^s I_{p-k,Q} \right\}.$$

Maintenant c'est très facile, puisque quand

$$s \geq 1, \quad \binom{p}{k} \leq p!^s / k!^s (p-k)!^s ;$$

on fait la récurrence :

$$(3) \quad I_{q,Q} \leq C_0 C_1^q q!^s \quad q < p$$

et on trouve immédiatement que si on choisit $C_0 \geq 2 C' C_f$, $C_1 \geq C_f$, $C_0 \geq 2 C_Q$ et $C_1 \geq 2 C_Q$, on a (3) aussi dans le cas $q = p$. Q. E. D.

Le cas quasi-analytique est plus difficile parce que une telle classe ne contient aucune fonction (sauf 0) à support compact. Mais il y a un théorème de Boman qui dit que (localement) l'intersection de toutes les classes non quasi-analytiques (voir théorème 2, ci-dessus) telles que $L(k)/k! \nearrow$ est la classe $C^{L(k)}$ avec $L(k) = k \log k$, et le théorème de Denjoy-Carleman nous dit que cette classe est quasi-analytique. L'idée est de démontrer le théorème 1 avec G^S remplacé par chaque classe C^L où $L(k)/k! \nearrow$; dans ce cas on a aussi l'analogie de $\binom{p}{k} \leq \binom{p}{k}^S$, c'est-à-dire

$\binom{p}{k} \leq \frac{L(p)}{L(k)L(p-k)}$, et les autres considérations sont les mêmes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. S Baouendi, C. Goulaouic : Analyticity for degenerate elliptic equations and applications, Symp. in Pure Math., vol. 23 (1971), 79-84.
 - [2] M. Derridj : Sur la régularité G^2 au bord des solutions du problème de Neumann pour l'opérateur $\bar{\partial}$, to appear.
 - [3] M. Derridj, D. Tartakoff : On the global real analyticity of solutions to the $\bar{\partial}$ -Neumann problem, to appear .
 - [4] J. J. Kohn : Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds, I and II, Annals of Math. 78, n° 1 (1963), pp. 112-147 and 79 n° 3 (1974) pp. 450-472.
 - [5] J. J. Kohn : Global regularity for $\bar{\partial}$ on weakly pseudo-convex manifolds, Trans. A. M. S. 181, pp. 273-291.
 - [6] J. J. Kohn, L. Nirenberg : Non coercive boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), pp. 443-492.
 - [7] C. B. Morrey, L. Nirenberg : On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957), pp. 271-290.
 - [8] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara : Microfunctions and pseudo-differential equations in vol.287 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1973.
 - [9] D. Tartakoff : Gevrey hypoellipticity for subelliptic boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math. 26 (1973), pp.251-312.
 - [10] D. Tartakoff : On the global real analyticity of solutions to \square_b on compact manifolds, to appear.
-