

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. FOIAS

Quelques résultats sur les fluides en rotation

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 6, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A5_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z

1 9 7 4 - 1 9 7 5

QUELQUES RESULTATS SUR LES FLUIDES EN ROTATION

par C. FOIAS

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné, dont la frontière $\partial\Omega$ est de classe C^2 , invariant par rapport aux notations autour de l'axe Ox_3 . On considère dans Ω les équations de Navier-Stokes

$$(1.1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \text{grad})v = - \text{grad} p + F \quad (t > 0)$$

$$(1.2) \quad \text{div } v = 0$$

où sur $\partial\Omega$ on a (pour tout $t > 0$)

$$(1.3) \quad \begin{cases} v_1(x_1, x_2, x_3) = -\omega x_2 \\ v_2(x_1, x_2, x_3) = \omega x_1 \\ v_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

Ci-dessus $F \in L^2(\Omega)^3$, $\nu > 0$ et $\omega \in (-\infty, \infty)$, $\omega \neq 0$ sont donnés d'avance. Le but de cet exposé est de présenter un résultat de régularité pour les solutions de (1.1-3) qui montrera que l'apparition des phénomènes turbulents est, dans le cas présent, confinée à un intervalle fini de temps, dont on donnera une estimation. On indiquera aussi quelques corollaires et quelques questions ouvertes.

2. Soit

$$(2.1) \quad H_0 = \{u \in C_0^\infty(\Omega)^3 : \text{div } u = 0\}$$

et soient H , resp. H^1 , les adhérences dans $L^2(\Omega)^3$, resp. $H^2(\Omega)^3$, de H_0 .

La norme dans H , induite par celle naturelle de $L^2(\Omega)^3$, sera désignée par $\|u\|$ et le produit scalaire correspondant par (u, v) . Sur

$$(2.2) \quad H^2 = H^1 \cap (H^2(\Omega)^3)$$

on définit l'opérateur A par

$$(2.3) \quad Au = -P\Delta u$$

où P désigne la projection orthogonale de $L^2(\Omega)^3$ sur H . Alors A est un opérateur autoadjoint > 0 , A^{-1} est compact, et $H^1 = \mathcal{D}_A^{1/2}$. On posera

VI.2

$$((u, v)) = (A^{1/2}u, A^{1/2}v), \quad \|u\| = |A^{1/2}u| \quad (u, v \in H^1)$$

On définit, en outre, les opérateurs

$$B \text{ (bilinéaire)} : H^2 \rightarrow H$$

$$C \text{ (linéaire)} : H^2 \rightarrow H$$

par les formules

$$(2.4) \quad \begin{cases} (B(u, v), w) = \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 u_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} w_k \, dx & (u, v \in H^2, w \in H), \\ (Cu, v) = \int_{\Omega} [u, v_2 - v_1 u_2 + \sum_{j=1}^3 (x_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial u_j}{\partial x_1}) v_j] \, dx \\ & (u \in H^1, v \in H) \end{cases}$$

Alors B et C jouissent des propriétés suivantes :

$$(2.5) \quad |(B(u, v), w)| \leq C_1 |A^\alpha u| |A^\beta v| |A^\gamma w|$$

quelq que soient $\alpha + \beta + \gamma = \frac{5}{4}$, $0 \leq \alpha, \gamma \leq 1/2 \leq \beta \leq 1$, et $u, v \in H^2$, $w \in \mathcal{D}_{A^\gamma}$;

$$(2.6) \quad |(Cu, v)| \leq C_2 |A^\alpha u| |A^\beta v|$$

quels que soient $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha, \beta \geq 0$ et $u \in H^2$, $v \in \mathcal{D}_{A^\beta}$. Les estimations (2.5-6) permettent d'étendre la définition de B et C comme applications de $\mathcal{D}_{A^\alpha} \times \mathcal{D}_{A^\beta}$, resp. $\mathcal{D}_{A^\alpha}$, dans $(\mathcal{D}_{A^\gamma})'$, resp. $(\mathcal{D}_{A^\beta})'$. Pour ces extensions on aura

$$(2.7) \quad \langle B(u, v), v \rangle = 0 = \langle Cu, u \rangle \quad (u \in \mathcal{D}_{A^{1/4}}, v \in \mathcal{D}_{A^{1/2}} = H^1).$$

Au lieu d'étudier les solutions $v = \{v_1, v_2, v_3\}$ de (1.1-3), il est plus convenable d'étudier les fonctions vectorielles $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_2 = v_1 + \omega x_2$, $u_2 = v_2 - \omega x_1$, $u_3 = v_3$. Cela revient à étudier les solutions $u(t) \in H^1$ de l'équation

$$(2.8) \quad \frac{du}{dt} + \nu Au + B(u, u) + \omega Cu = f \quad (t > 0) .$$

Plus précisément, par une solution de (2.8) on sous-entendra une fonction $u(t)$ de $[0, \infty]$ faiblement continue de $[0, \infty]$ dans H , fortement continue à droite en tout $t \notin \sigma$ (où σ est un sous-ensemble de $(0, \infty)$, dépendant de la solution, de mesure nulle) telle que

$$(2.9) \quad u(t) = u(0) + \int_0^t u'(\tau) d\tau \quad (\text{dans } H^{-1} = (H^1)' , \quad t \geq 0)$$

$$(2.10) \quad u'(t) + \nu Au(t) + B(u(t), u'(t)) + \omega Cu(t) = f$$

(dans H^{-1} , pp. dans $[0, \infty]$)

$$(2.11) \quad \frac{1}{2} |u(t)|^2 + \nu \int_{t_0}^t \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{1}{2} |u(t_0)|^2 + \int_{t_0}^t (f, u(\tau)) d\tau \quad (\text{pour}$$

tous $t \geq t_0, \quad t_0 \in [0, \infty] \setminus \sigma$).

Notons que dans (2.11) on peut aussi prendre $t_0 = 0$ et que par suite (2.11) entraîne

$$(2.12) \quad u(t) \in L^2(0, T; H^1) \quad (T \in (0, \infty)) .$$

En outre (2.11) entraîne aussitôt

$$(2.13) \quad |u(t)|^2 \leq e^{-\nu \lambda_1 (t-t_0)} |u(t_0)|^2 + \frac{|f|^2}{\nu^2 \lambda_1^2}$$

$$(2.14) \quad \int_{t_0}^t \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{1}{\nu} |u(t_0)|^2 + \frac{|f|^2}{\nu^2 \lambda_1^2} (t-t_0)$$

où $t \geq t_0 \in [0, \infty] \setminus \sigma$ et

$$(2.15) \quad \lambda_1 = \inf \{ \|u\|^2 : |u| = 1 \} .$$

3. Pour le cadre fonctionnel décrit dans le n°2, aussi bien que pour l'existence des solutions $u(t)$, à valeurs initiale $u(0) = u_0 \in H$ donnée, nous renvoyons à [2], § I.2 et § II.1. Rappelons toutefois encore un résultat de [2], § III.1. Dans ce but rappelons d'abord qu'une solution $u(t)$ s'appelle régulière sur $[t_1, t_2] \subset [0, \infty]$ lorsque

$$u(t) \in C([t_1, t_2]; H^1) \cap L^2(t_1, t_2; H^2),$$

et, en outre, que pour tout $u_0 \in H^1$ il existe une solution régulière dans un voisinage $[0, t_0]$ de 0 (dans $[0, \infty]$), telle que $u(0) = u_0$; toute autre solution $\tilde{u}(t)$, telle que $\tilde{u}(0) = u_0$, coïncident avec $u(t)$ sur $[0, t_0]$. Le résultat de [2], § III.1 est le suivant : ci-dessus

$u(t)$ est analytique de $(0, t_0)$ dans H^2 ,

$$(3.1) \quad t_0 \geq t_{00} = \frac{C_3}{1 + [\max\{\|u_0\|, C_4|f|\}\]^4} = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

et

$$(3.2) \quad |Au(t)|^2 \leq \frac{C_5}{t^2} (\|u_0\|^2 + C_6|f|^2)(\|u_0\|^4 + C_6^2|f|^4 + \omega^2 + 1).$$

(pour $0 < t \leq t_{00}$),

où $C_3 - C_6$ sont des constantes (par rapport aux u_0 , f , ω et t).

(Remarquons que pour obtenir (2.13-14) il faut reprendre avec plus de soin les estimations données aux cours de l'alinéa 1.8 de [2], § III.1.)

4. Nous allons maintenant prouver la suivante

Proposition 1 : Il existe des constantes C_7, C_8 (dépendant seulement de Ω et ν) telles que si

$$(4.1) \quad (\omega + \frac{1}{\omega})|f| \leq C_7 \omega^{1/2},$$

alors toute solution $u(t)$ est régulière sur tout intervalle $[t_1, t_2]$ dès que

$$(4.2) \quad t_1 \geq \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \log(\omega |u_0|^2) + C_8$$

Démonstration : En vertu de (2.12), la réunion $\mathcal{R}$ des intervalles $[t_1, t_2]$ où $u(t)$ est régulière est de mesure totale dans $[0, \infty]$. En vertu du n°3 toute composante connexe de $\mathcal{R}$ est un intervalle ouvert J à droite. Soit t_3 l'extrémité droite de J et soit $[t_1, t_3] \subset J$. De nouveau en vertu du n°3, nous avons

$$(4.3) \quad \lim_{t_1 \leq t \rightarrow t_3} \|u(t)\| = \infty,$$

et

$$(4.4) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \nu(Au(t), u(t)) + (B(u(t), u(t)), Au(t)) \\ + \omega(Cu(t), Au(t)) = (f, Au(t))$$

pour tout $t \in [t_1, t_3]$. De (4.4) il découle aussitôt

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 \leq C_9 \|u(t)\|^6 + \omega^2 C_{10} \|u(t)\|^2 + C_{11} |f|^2$$

(par l'utilisation des relations (2.5-6)), d'où

$$(\|u(t)\|^4 + \omega^2)^{-1} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 \leq C_{12} \|u(t)\|^2 + \frac{C_3}{\omega^2} |f|^2$$

et par suite (en utilisant (2.14))

$$(4.5) \quad \frac{1}{\omega} \operatorname{Arctg} \frac{\|u(t)\|^2}{\omega} \leq \frac{1}{\omega} \operatorname{Arctg} \frac{\|u(t_0)\|^2}{\omega} + C_{14} |u(t_0)|^2 + \\ + C_{15} \left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right) |f|^2 (t - t_0)$$

pour tous $t_0, t \in [t_1, t_3]$, où $C_9 - C_{15}$ sont des constantes (dépendant seulement de Ω et ν).

Prenons $t > t_1 + \frac{1}{\omega^2}$. Alors dans (2.14) on peut choisir $t_0 = t - \frac{1}{\omega^2}$.

Il en résulte qu'il existe $t_0 \in (t - \frac{1}{\omega^2}, t)$ tel que

$$\|u(t_0)\|^2 \leq \frac{2\omega^2}{\nu} \left|u\left(t - \frac{1}{\omega^2}\right)\right|^2 + \frac{2|f|^2}{\nu^2 \lambda_1}$$

et par suite de (4.5) nous pouvons déduire facilement

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \operatorname{Arctg} \frac{\|u(t)\|^2}{\omega} &\leq C_{16} \omega \left| u\left(t - \frac{1}{\omega^2}\right) \right|^2 + C_{17} \omega \left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right)^2 |f|^2 \leq \\ &\leq C_{16} \omega |u_0|^2 \exp \left[-\nu \lambda_1 \left(t - \frac{1}{\omega^2}\right) \right] + C_{18} \omega \left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right)^2 |f|^2 \end{aligned}$$

Ainsi si nous posons $C_{17}^2 = \prod_8 C_{18}^{-1}$ et si (4.1) est vérifiée alors (4.6) devient

$$\operatorname{Arctg} \frac{\|u(t)\|^2}{\omega} \leq C_{16} \omega |u_0|^2 \exp \left[-\nu \lambda_1 \left(t - \frac{1}{\omega^2}\right) \right] + \prod_8 ;$$

par conséquent si

$$(4.7) \quad C_{16} \omega |u_0|^2 \exp \left[-\nu \lambda_1 \left(t - \frac{1}{\omega^2}\right) \right] \leq \prod_8$$

on aura

$$(4.8) \quad \|u(t)\|^2 \leq 2C_{16} \omega^2 |u_0|^2 \exp \left[-\nu \lambda_1 \left(t - \frac{1}{\omega^2}\right) \right] + \prod_4$$

Mais en posant $C_8 = \operatorname{Log} (8 C_{16} \cdot \pi^{-1})$, les relations (4.7-8) montrent que si t_1 vérifie (4.2) alors (4.3) est impossible, ce qui achève la preuve de la proposition .

Corollaire : Dans les conditions de la proposition 1, toute solution périodique (en particulier, stationnaire) est régulière .

Remarque : On peut montrer par une méthode de Galerkin (comme dans [4], ch. I) qu'il existe des solutions stationnaires, quels que soient f et ω . Ainsi le corollaire précédent n'est pas dépourvu d'objet.

5. Discutons un peu le cas où $f = 0$.

Proposition 2 : Si $f = 0$, alors pour toute solution $u(t)$ on a

$$(5.1) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} e^{\nu \lambda_1 t} |Au(t)|^2 \leq C_{19} \omega \left(\frac{\omega^2}{\nu} \right)^4 |u_0|^2 .$$

où C_{19} est une constante dépendant seulement de Ω .

Démonstration : De (4.6) et (3.1-2) nous pouvons déduire aussitôt que pour t assez grand on a

$$|Au(t)|^2 \leq \frac{4C_4}{C_5^2} (1 + \omega^2)^2 \omega^2 |u_0|^2 \cdot \exp \left[-\nu \lambda_1 \left(t - \frac{C_3}{2} \frac{1}{1 + \omega^2} \right) \right] \cdot (\omega^2 + 2)$$

d'où

$$(5.2) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} e^{\nu \lambda_1 t} |Au(t)|^2 \leq C_{20}(\nu) (1 + \omega^2)^4 |u_0|^2.$$

Soit $C(\omega, \nu)$ le supremum des quotients

$$\left(\limsup_{t \rightarrow \infty} |Au(t)|^2 e^{-\nu \lambda_2 t} \right) |u_0|^{-2}$$

quand $u(t)$ parcourt la famille de toutes les solutions. Alors (5.2) montre que

$$(5.3) \quad C(\omega, \nu) \leq C_{20}(\nu) (1 + \omega^2)^4.$$

Mais en vertu de la forme de l'équation (2.8) on a

$$(5.4) \quad C(\rho \omega, \rho \nu) = C(\omega, \nu) \quad (\rho \in (0, \infty)).$$

(5.2-4) montrent que (5.1) est vérifiée si l'on prend $C_{19} = C_{20}(1)$.

Corollaire : Pour toute solution $v(t, x) = \{v_1(t, x_1, x_2, x_3), v_2(t, x_1, x_3, x_3), v_3(t, x_1, x_2, x_3)\}$ de (1.1-3) on a

$$(5.5) \quad \begin{cases} |v_1(t, x_1, x_2, x_3) + \omega x_2| \rightarrow 0 \\ |v_2(t, x_1, x_2, x_3) - \omega x_1| \rightarrow 0 \\ |v_3(t, x_1, x_2, x_3)| \rightarrow 0 \end{cases} \quad (t \rightarrow \infty)$$

les convergences étant de rapidité exponentielle uniforme sur $\bar{\Omega}$.

Conséquence directe de la proposition 2 et du plongement de Sobolev $H^2(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.

6. La proposition 2 suggère l'étude du supremum $C_2(R, \omega, \nu)$ des valeurs $t|Au(t)|$ lorsque t parcourt $(0, \infty)$ et $u(t)$ parcourt la famille des solutions telle que $\|u_0\| \leq R$, aussi bien que celui de

$$C_2(\omega, \nu) = \sup \{ C_2(R, \omega, \nu) R^{-1} : R \in (0, \infty) \}.$$

Conjecture : $C_2(\omega, \nu)$ et même $C_2(R, \omega, \nu)$ ($R > 0$) ne peuvent rester bornés lorsque $|\omega| \rightarrow \infty$.

Cela représente une variante beaucoup affaiblie du problème concernant l'existence des solutions turbulentes au sens de Leray [3].

Enfin remarquons que nos propositions 1 - 2 s'apparentent à certains théorèmes de régularité de Leray [3] (cas $\omega = 0$) et vraisemblablement de Duff [1] (cité d'après [5], sans que l'auteur ait eu la possibilité de consulter [1]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. F. D. Duff : On turbulent solutions of the Navier-Stokes Equations (unpublished).
- [2] C. Foias : Solutions statistiques des équations de Navier-Stokes (Cours au Collège de France. 1974).
- [3] J. Leray : Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math.. 63 (1934), 193-248.
- [4] J. L. Lions : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod-Gauthier-Villars, Paris (1969).
- [5] J. E. Marsden, D. G. Ebin, A. F. Fisher : Diffeomorphism groups, hydrodynamics and relativity (Lecture Notes, 1971).