

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. KASHIWARA

Sur la b -fonction

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 25,
p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975__A23_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z
1 9 7 4 - 1 9 7 5

. SUR LA β -FONCTION

par M. KASHIWARA

§ 0. INTRODUCTION

Soient X une variété lisse et f une fonction régulière sur X . L'ensemble des polynômes $b(s)$ d'une variable s tel qu'il existe un opérateur $P(s) = \sum P_j(x, D_x) s^j$ satisfaisant $P(s) f^{s+1} = b(s) f^s$ est un idéal de $\mathbb{C}[s]$. On appelle son générateur la b -fonction de $f(X)$ et on écrit $b_f(s)$.

M. Sato a introduit les notions de "a-fonction", "b-fonction" et "c-fonction" quand il a étudié les transformées de Fourier et les ξ -fonctions associées aux invariants relatifs sur des espaces vectoriels préhomogènes. Bernstein a introduit indépendamment de Sato, la b -fonction et démontré que tout polynôme a sa fonction $b(s)$ non nulle. J. E. Björk a généralisé ce résultat aux fonctions holomorphes.

L'auteur a démontré le théorème suivant :

Théorème : Soient X' une variété lisse, $F: X' \rightarrow X$ un éclatement de centre contenu dans les zéros de f , et $f' = f \circ F$. Alors

$$b_f(s) \mid b_{f'}(s) b_{f'}(s+1) \dots b_{f'}(s+N)$$

pour un entier $N \geq 0$.

Corollaire : Les racines de la b -fonction sont des nombres rationnels négatifs.

En effet, il existe un éclatement $F: X' \rightarrow X$ tel que f' soit à croisements normaux. Si $f' = t_1^{r_1} \dots t_\ell^{r_\ell} b_{f'}(s)$ $= \prod_{v=1}^{\ell} \left[\left(s + \frac{1}{r_v}\right) \dots \left(s + \frac{r_v}{r_v}\right) \right]$.

On ne donne pas ici la démonstration du théorème à cause du manque de temps. A la place, on donnera celle du théorème suivant qui est moins longue.

Théorème : Il existe localement un polynôme $b(s)$ non nul et un opérateur $P(s) = \sum P_j(x, D_x) s^j$ tel qu'on ait $P(s) f^{s+1} = b(s) f^s$.

§ 1. LES RESULTATS FONDAMENTAUX DES SYSTEMES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

On donnera ici les propriétés des $\mathcal{D}$ -modules cohérents sans démonstration.

Soient $\mathcal{D}_X$ le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes sur une variété complexe lisse X , et $\mathcal{D}^{(\ell)}$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre $\leq \ell$. $\mathcal{D}_X$ est un anneau cohérent et ses germes sont un anneau noéthérien. Soit $\mathfrak{M}$ un $\mathcal{D}$ -module cohérent. La filtration croissante $\{\mathfrak{M}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de $\mathfrak{M}$ est dite une bonne filtration si

- i) les $\mathfrak{M}_k$ sont des $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents
- ii) $\mathcal{D}^{(\ell)} \mathfrak{M}_k \subset \mathfrak{M}_{k+\ell}$ et $\mathcal{D}^{(\ell)} \mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}_{k+\ell}$ si $k \gg 0$ et $(\ell \geq 0)$.
- iii) $\mathfrak{M}_k = 0$ $k \ll 0$

Soit T^*X le fibré vectoriel cotangent de X . On dit que le support du $\mathcal{O}_{T^*X}$ -module cohérent $\bigoplus_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{M}_k / \mathfrak{M}_{k-1})$ est la variété caractéristique de $\mathfrak{M}$ et est notée $\widehat{SS}(\mathfrak{M})$. Elle ne dépend pas du choix des bonnes filtrations. Une variété caractéristique est toujours involutive.

Proposition : i) $\text{codim } \widehat{SS}(\text{Ext}^k(\mathfrak{M}, \mathcal{D})) \geq k$
 ii) $\text{Ext}^k(\mathfrak{M}, \mathcal{D}) = 0$ pour $k < \text{codim } \widehat{SS}(\mathfrak{M})$
 iii) $\widehat{SS}(\text{Ext}^k(\mathfrak{M}, \mathcal{D}))$ contient toutes les composantes irréductibles de $\widehat{SS}(\mathfrak{M})$ de codimension k .

Soit V une variété irréductible dans T^*X . On suppose que $\widehat{SS}(\mathfrak{M})$ est contenue dans V au point générique de V . La multiplicité de $\bigoplus_k (\mathfrak{M}_k / \mathfrak{M}_{k-1})$ au point générique de V est dite la multiplicité de $\mathfrak{M}$ le long de V . La multiplicité est une quantité additive : si $0 \rightarrow \mathfrak{M}' \rightarrow \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'' \rightarrow 0$ est une suite exacte, la multiplicité de $\mathfrak{M}$ est une somme de celles de $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$.

Proposition : Soit $\mathfrak{M}$ un $\mathcal{D}$ -module cohérent. Posons $\mathfrak{M}_r = \{u \in \mathfrak{M} \mid \text{codim } \widehat{SS}(\mathcal{D}u) \geq r\}$. Alors, $\mathfrak{M}_r$ est un $\mathcal{D}$ -module cohérent. En effet, on peut construire $\mathfrak{M}_r$ cohomologiquement,

$$\mathfrak{M}_r = \text{Ext}_{\mathcal{D}}^0(\sigma_{\geq r} \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathfrak{M}, \mathcal{D}), \mathcal{D}).$$

Proposition : Si $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ sont des $\mathcal{D}$ -modules holonomes (c'est-à-dire les dimensions des variétés caractéristiques sont égales à celles de X), $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_x$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ pour tout point x de X .

§ 2. L'EXISTENCE DE b-FONCTIONS

Soient X une variété lisse de dimension n , f une fonction holomorphe sur X . On suppose que

i) $\{x; \partial f / \partial x_1 = \dots = \partial f / \partial x_n = 0\}$ est contenu dans l'ensemble des zéros de f .

ii) Il existe un champ de vecteurs X_0 tel qu'on ait $X_0 \circ f = f$.

Soit $\mathcal{D}[s] = \mathcal{D} \otimes \mathbb{C}[s]$. On pose $\mathfrak{N} = \mathcal{D}[s]f^s = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}$, où $\mathcal{J} = \{P(s) \in \mathcal{D}[s]; P(s)f^s = 0 \text{ pour tout } s\}$. $\mathfrak{N}$ est un $\mathcal{D}$ -module cohérent, engendré par f^s (par la propriété ii)).

Soit t l'endomorphisme de $\mathfrak{N}$ défini par $P(s)f^s \mapsto P(s)f^{s+1}$.

Proposition : $\mathfrak{N}$ est un $\mathcal{D}$ -module sous-holonyme (c'est-à-dire sa variété caractéristique est de dimension $n+1$).

Démonstration : La proposition est évidente là où une dérivée de f ne s'annule pas. Donc, $\mathfrak{N}$ est sous-holonyme en dehors des zéros de f . Soit $\mathfrak{N}' = \{u \in \mathfrak{N}; \text{codim } \widehat{\text{SS}}(\mathcal{D}u) \geq n-1\}$. $\mathfrak{N}'$ est un $\mathcal{D}$ -module sous-holonyme et égale à $\mathfrak{N}$ en dehors des zéros de f .

Soit $\overline{f^s}$ l'élément de $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}'$ correspondant à $f^s \in \mathfrak{N}$. Parce que $\mathcal{O}f^s$ est un $\mathcal{O}$ -module cohérent dont le support est contenu dans les zéros de f , il existe un entier m tel que $f^m \cdot \overline{f^s} = 0$, ce qui équivaut à dire que $\mathcal{D}f^{s+m}$ est sous-holonyme. $\mathcal{D}f^{s+m}$ et $\mathfrak{N}$ sont isomorphes par l'homomorphisme t^m , et on obtient la proposition :

Proposition : $\mathfrak{M} = \mathcal{D}[s]f^s / \mathcal{D}[s]f^{s+1} = \mathfrak{N}/t\mathfrak{N}$ est holonyme.

Démonstration : On a une suite exacte $0 \rightarrow \mathfrak{N} \xrightarrow{t} \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M} \rightarrow 0$.

A chaque composante irréductible de la variété caractéristique de $\mathfrak{N}$, la multiplicité de $\mathfrak{M}$ est zéro, alors la variété caractéristique de $\mathfrak{M}$ ne contient aucune composante de celle de $\mathfrak{N}$ donc est de dimension $\leq n+1$, c'est-à-dire n .

Théorème : Pour toute fonction holomorphe f , il existe un polynôme $b(s)$ non nul tel qu'on ait

$$b(s)f^s \in \mathcal{D}[s]f^{s+1}.$$

Démonstration

A) Dans le cas où f a la propriété ii) :

Parce que $\mathfrak{M} = \mathcal{D}[s]f^s / \mathcal{D}[s]f^{s+1}$ est holonome, $\text{End } \mathcal{D}(\mathfrak{M})_x$ est de dimension finie pour tout point x . Donc, il existe un polynôme $b(s)$ non nul qui s'annule $s \in \text{End } \mathcal{D}(\mathfrak{M})_x$.

B) Dans le cas général :

Soit $\tilde{f}(t,x)$ la fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \times X$ définie par $tf(x) \cdot \tilde{f}(t,x)$ possède la propriété (ii). Donc, il existe un polynôme $b(s)$ non nul et un opérateur différentiel $P(t,x,D_t,D_x)$ tel que $b(s)\tilde{f}^s = P\tilde{f}^{s+1}$.

Soit $Q(t,x,D_t,D_x) = \sum Q_j(x,D_x)(tD_t)^j D_t$ la partie homogène de P de degré -1 par rapport à t . Alors, on a

$$b(s)f^s = (s+1)\sum Q_j(x,D_x)s^j f^{s+1}.$$

Q.E.D.